RICHARD H. FRENCH

HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS



HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS

Richard H. French



HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS

TRADUCCIÓN:

M. I. Ariel Friedman
Profesor Asociado
Laboratorio de Hidráulica
Facultad de Ingeniería, UNAM.

REVISIÓN TÉCNICA:

Jorge Esteban Athala Molano
Ingeniero Civil
Jefe de Sección de Hidráulica e Ing. Sanitaria
Escuela Nacional de Estudios
Profesionales Acatlán, UNAM.

McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS
SIDNEY • TOKIO • TORONTO

HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS

Atlacomulco 499-501, Fracc. Industrial San Andrés Atoto,
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-445-X

Traducido de la primera edición en inglés de
OPEN-CHANNEL HYDRAULICS

ISBN 0-07-022134-0

1234567890 P.E.-88 8123456798

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en marzo de 1988
en Programas Educativos, S.A.
Calzada Chabacano No. 65-A
Col. Asturias
06860 México, D.F.

Se tiraron 4 000 ejemplares

Contenido

Prefacio

Desde los puntos de vista de cantidad y calidad, los proyectos de recursos hidráulicos son de gran importancia para el mantenimiento y progreso de la civilización como se conoce hoy en día. El conocimiento de la hidráulica de los canales abiertos es esencial para el desarrollo de los recursos hidráulicos y la preservación del agua con la calidad necesaria junto con otras áreas de conocimiento de la ingeniería, que han sido exploradas en las dos últimas décadas.

En cierto grado esta explosión de información se debe al advenimiento de las computadoras digitales de alta velocidad que le han permitido al ingeniero hidráulico solucionar problemas que apenas hace 20 años eran desde el punto de vista computacional demasiado grandes para ser contemplados. Además de esto, el interés de la sociedad respecto a la preservación y restauración del medio ambiente acuático ha guiado al ingeniero hidráulico a considerar los procesos del flujo en canales abiertos, los cuales, antes del movimiento ecológico no se consideraban importantes y ahora requieren de estudio. En este momento, únicamente hay dos libros bien conocidos sobre la materia de hidráulica de canales abiertos: *Open-Chanel Hydraulics* por V.T. Chow, publicado en 1959, y *Open Channel Flow* por F.M. Henderson publicado en 1966. Ninguno de estos libros provee los modernos puntos de vista acerca de esta importante materia.

Esta obra está diseñada fundamentalmente como un libro de referencia para el ingeniero práctico; sin embargo, se utilizan muchos ejemplos y por lo tanto, el libro puede utilizarse adecuadamente como un texto en cursos de licenciatura y posgrado en ingeniería civil o agricultura. Como sucede con todos los libros, este texto es una exposición de lo que el autor considera importante, con extensión limitada por razones de espacio. Debido a la experiencia del autor, esta obra enfoca la hidráulica de los canales abiertos desde el punto de vista de presentar los principios básicos y demostrar las aplicaciones de estos principios. A diferencia de los libros que le han precedido, profundiza en los métodos numéricos de solución de problemas; aunque como sucede en los libros anteriores el enfoque de la materia es principalmente unidimensional.

El libro está dividido en 14 capítulos. En el capítulo 1 se introducen las definiciones básicas y las ecuaciones que gobiernan el flujo en canales abiertos.

En los capítulos 2 y 3 se estudian las leyes de conservación de energía y cantidad de movimiento, así como las aplicaciones de estas leyes básicas a canales rectangulares y no rectangulares.

En los capítulos 4 y 5 se estudia el flujo uniforme y su cálculo. En conexión con el tema de flujo uniforme, se analiza también la resistencia de flujo.

En el capítulo 6 se estudia el flujo gradual y espacialmente variado. Las soluciones a estos problemas que implican procedimientos tabulares, gráficos y numéricos también son consideradas.

En el capítulo 7 se presentan varios métodos para diseño de canales. Los tipos de canales estudiados incluyen canales revestidos, estables, no revestidos, de tierra y canales revestidos con pasto. También se hacen consideraciones acerca de la economía y las pérdidas en el canal.

En el capítulo 8 se estudian los métodos para medición de flujos. Las técnicas incluidas en este aparato son dispositivos y procedimientos para aforo de corrientes, vertedores, medidores de régimen crítico y alcantarillas.

En el capítulo 9 se trata el flujo rápidamente variado en canales no prismáticos. Se incluyen análisis acerca de flujo a través de contracciones en puentes; el control de saltos hidráulicos con vertedores de cresta delgada, de cresta ancha, ascensos y caídas súbitas, tanques de amortiguamiento, (*disipadores de caída*), y el diseño de transiciones en canales.

En el capítulo 10 se estudian los procesos de transporte conocidos como difusión turbulenta y dispersión. Después que las ecuaciones fundamentales de una y dos dimensiones han sido desarrolladas, se analizan métodos de estimación de coeficientes para difusión turbulenta vertical y transversal y el coeficiente de dispersión longitudinal.

En el capítulo 11 se estudia el tema de chorros turbulentos superficiales ascendentes en canales abiertos.

En los capítulos 12 y 13 se analizan los flujos gradual y rápidamente variados no permanentes. En estos capítulos, se estudian modernos métodos numéricos para solucionar las ecuaciones fundamentales.

En el capítulo 14 se estudia el diseño, construcción y uso de modelos físicos en el estudio de la hidráulica de los canales abiertos.

Debe aclararse que este libro está interesado únicamente en el flujo de agua en canales donde el agua no transporta una cantidad significativa de aire o sedimento. En áreas donde el transporte de contaminantes es la razón primaria para describir el flujo, no se analizan soluciones específicas; por el contrario, sólo se considera el transporte de un trazador neutro. En la parte de flujo no permanente, la hidráulica de mareas no se toma en cuenta debido a que este tema es parte de la ingeniería costera.

Cuando el autor comenzó este libro en el otoño de 1981, no se imaginaba la magnitud del proyecto que se echaba a cuestas. A causa de su posición como un miembro de la facultad de investigación, el sistema de la Universidad de Nevada sólo podía proporcionar con razón palabras de aliento y apoyo moral

a este proyecto. Así, esta obra fue completada en las tardes, días de fiesta y fines de semana. El autor está especialmente en deuda con el profesor Vicent T. Ricca de la Universidad Estatal de Ohio, que originalmente introdujo al autor a la materia de hidráulica de canales abiertos, y con el profesor Hugo B. Fischer de la Universidad de California, Berkeley, quien continuó el proceso educacional. El autor da también las gracias al Dr. S. C. McCutcheon de la U. S. Geological Survey y al profesor J. W. Bird de la Universidad de Nevada, Reno, quienes dedicaron numerosas horas de su tiempo a la lectura del manuscrito. El autor está agradecido también con su esposa, Darlene, cuya ayuda a lo largo de este trabajo aparentemente sin fin proporcionó un invaluable aliento que fue absolutamente necesario.

Richard H. French

UNO

Conceptos de Flujo de Fluidos

SINOPSIS

En la sección 1.2, son clasificados los diversos tipos de flujo que se encuentran en los canales abiertos, con respecto al tiempo, espacio, viscosidad, densidad y gravedad. Además, se definen los tipos de canales más frecuentemente utilizados y sus propiedades geométricas. En la sección 1.3 se plantean las ecuaciones que gobiernan el flujo de los canales abiertos: conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, así como los coeficientes para corrección de la cantidad de movimiento. En la sección 1.4, se estudian ampliamente los conceptos teóricos como el ajuste de ecuaciones diferenciales parciales, leyes de contorno y distribución de velocidades en los flujos homogéneos y en los estratificados. En la sección 1.5, se muestran los conceptos básicos de similitud geométrica dinámica en relación a sus aplicaciones al diseño de modelos hidráulicos físicos.

1.1 INTRODUCCIÓN

Por definición, un canal abierto es un conducto para flujo el cual tiene una superficie libre, i.e., una de las fronteras está expuesta a la atmósfera. La superficie libre es esencialmente una interfase entre dos fluidos de diferente densidad. En el caso de la atmósfera, la densidad del aire es mucho más baja que la densidad de un líquido como el agua, además, la presión es constante. En el caso de fluidos en movimiento, este fenómeno es causado generalmente por efectos gravitacionales y la distribución de presiones dentro del fluido es generalmente hidrostática. Los flujos en los canales abiertos son casi siempre turbulentos y no son afectados por tensión superficial; sin embargo, en muchos casos de importancia práctica, algunos flujos son de densidad estratificada. El interés en la mecánica del flujo de canales abiertos radica en su importancia hacia la civilización. Como se definió arriba, los canales abiertos incluyen flujos que ocurren en canales a lo largo de calles residenciales y carreteras, canales para irrigación que transportan agua a través de medio continente desde ríos vitales como el Misisipí, Nilo, Rhin, Amarillo, Ganges, Amazonas. Sin excepción, uno de los requerimientos primarios para el desarrollo, mantenimiento y avance de la civilización es el suministro de agua.

En el material que sigue, se supone que el lector está familiarizado con los principios básicos de la moderna mecánica de fluidos y la hidráulica, el cálculo, análisis numérico y la ciencia de la computación. El propósito de este capítulo es revisar brevemente un número de definiciones básicas, principios y leyes con la intención de aplicarlos al estudio de la mecánica del flujo en canales abiertos.

1.2 DEFINICIONES

Tipos de flujo

Cambios del tirante* con respecto al tiempo y al espacio Como se demostrará en está sección, es posible clasificar el tipo de flujo que ocurrirá en un canal abierto con base en muy diferentes criterios. Uno de los criterios primarios de clasificación es la variación del tirante del flujo y en el tiempo t y el espacio x. Si se toma el tiempo como criterio, entonces un flujo puede ser clasificado como *permanente*, lo cual implica que el tirante del flujo no cambia con el tiempo ($\partial y/\partial t = 0$), o bien, como *no permanente*, lo cual implica que el tirante cambia con el tiempo ($\partial y/\partial t \neq 0$). La diferencia entre flujo permanente y no permanente depende del punto de vista del observador y es relativamente mejor que una clasificación absoluta. Por ejemplo, considérese un oleaje i.e., una onda singular con un frente agudo moviéndose hacia arriba y abajo de un canal. Para un observador estacionario en la orilla del canal, el flujo es no permanente ya que notará un cambio en el tirante del flujo con el tiempo. Sin embargo, para un observador que se mueve enfrente de la ola, el flujo es permanente ya que no se puede notar la variación del tirante con el tiempo. Si se agrega o se sustrae agua a lo largo del canal, cada consideración cambiará como es el caso de cunetas y aliviaderos, entonces el flujo puede ser permanente, pero es no uniforme. Específicamente, este tipo de flujo se denomina *espacialmente variado* o flujo *discontinuo*.

Si el espacio es utilizado como el criterio de clasificación, entonces un flujo puede ser clasificado como *uniforme*, si el tirante del flujo no varía con la distancia ($\partial y/\partial x = 0$) o como *no uniforme* si el tirante varía con la distancia ($\partial y/\partial x \neq 0$). Aunque conceptualmente un flujo no permanente y uniforme es posible el tirante del flujo varía con el tiempo pero permanece constante con la distancia, desde un punto de vista práctico un flujo de este tipo es imposible. Por lo tanto, la terminología *uniforme* o *no uniforme* por lo general implica que el flujo es también permanente. El flujo no uniforme, también llamado *flujo variado*, es además clasificado como *rápidamente variado* (el tirante del flujo cambia rápidamente sobre una distancia relativamente corta como es el caso de un salto hidráulico) o *gradualmente variado* (el tirante del flujo cambia menos rápidamente con la distancia como es el caso de un almacenamiento aguas arriba de una presa).

Nótese que desde un punto de vista teórico las clasificaciones de permanente y uniforme son muy restrictivas. Por ejemplo, la terminología *flujo uniforme* implica que en todo punto en el campo del fluido en un instante arbitrario en el tiempo, los vectores de velocidad tienen la misma magnitud y dirección. Como una definición estricta es mucho más restrictiva para uso práctico; entonces, las definiciones dadas arriba han sido extendidas o relajadas a un pun-

* N del R. T.: El término "tirante" se utiliza para definir la distancia desde el fondo del canal a la superficie libre del agua, y el término "profundidad" se utiliza más para definir la distancia vertical desde la superficie libre del agua a un nivel por debajo de dicha superficie.

to en el cual sean útiles. Por ejemplo, en la práctica, las clasificaciones de flujo con respecto al tiempo y al espacio son comúnmente realizadas con base en las características de flujo denso. Si la velocidad espacial promedio del flujo $\left(\bar{u} = \int\int_A u\, dA\right)$ no varía significativamente con el tiempo, entonces el flujo es clasificado como permanente. De igual forma, si el tirante promedio del flujo es constante en el espacio, entonces el flujo es considerado uniforme. La figura 1.1 muestra ejemplos esquemáticos de las definiciones de arriba aplicadas a situaciones de campo.

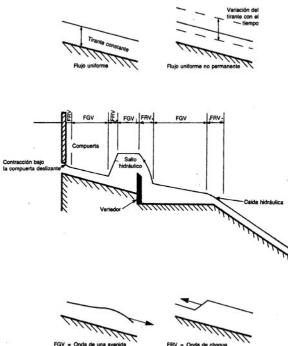


FIGURA 1.1 Tipos de flujo en canales abiertos; FGV = flujo gradualmente variado, FRV = flujo rápidamente variado (Chow, 1959).

Viscosidad, densidad y gravedad Recuérdese de la mecánica elemental de fluidos que, dependiendo de la magnitud de la proporción de las fuerzas de inercia sobre las fuerzas de viscosidad, un flujo puede ser clasificado como laminar, transicional o turbulento. La base para esta clasificación es un parámetro adimensional conocido como el número Reynolds, o

$$\mathbf{R} = \frac{UL}{\nu} \tag{1.2.1}$$

en donde U = velocidad característica del flujo, después de tomar la velocidad promedio del flujo
L = longitud característica
ν = viscosidad cinemática

Entonces, un *flujo laminar* es aquel en el que las fuerzas de viscosidad son relativamente más grandes que las fuerzas inerciales y de ahí que las fuerzas viscosas predominan en el flujo. Por lo que en un flujo, las partículas del fluido se mueven definiendo las trayectorias suaves en una forma coherente. En un *flujo turbulento*, las fuerzas inerciales son relativamente más grandes que las fuerzas de viscosidad; por esto, las fuerzas inerciales dominan la situación. En este tipo de flujo, las partículas de fluido se mueven de una forma incoherente o de manera aparentemente aleatoria. Un *flujo transicional* es aquel clasificado como ni laminar ni turbulento. En el flujo de canales abiertos, la longitud característica comúnmente utilizada es el radio hidráulico que es la proporción del área del flujo A entre el perímetro mojado P. Entonces

$\mathbf{R} \leq 500$	flujo laminar
$500 \leq \mathbf{R} \leq 12\,500$	flujo transicional
$12\,500 \leq \mathbf{R}$	flujo turbulento

El estado del flujo basado en la proporción de inercia a fuerzas de viscosidad es una consideración crítica cuando se considera la resistencia del flujo.

Los flujos son clasificados como homogéneos o estratificados basados en la variación de la densidad dentro del flujo. Si en todas las dimensiones espaciales la densidad del flujo es constante, entonces se dice que el flujo es *homogéneo*, si la densidad del flujo varía en cualquier dirección, entonces el flujo es denominado *estratificado*. La ausencia de un gradiente de densidad en la mayor parte de los flujos de los canales abiertos naturales demuestra que la velocidad del flujo es suficiente para mezclar completamente el flujo con respecto a la densidad o que los fenómenos que tienden a introducir el gradiente de densidad no son importantes. La importancia de la densidad de estratificación radica en que, cuando existe densidad estable de estratificación, i.e., la densidad se incrementa con la profundidad o yacen fluidos más ligeros sobre fluidos pesados, la efectividad de la turbulencia como un mecanismo mezclador se reduce. En el flujo bidimensional del tipo normalmente encontrado en

canales abiertos, una medida comúnmente aceptada de la resistencia de la estratificación de la densidad, es el número de gradiente Richardson

$$Ri = \frac{g(\partial\rho/\partial y)}{\rho(\partial u/\partial y)^2} \tag{1.2.2}$$

en donde g = aceleración de la gravedad
ρ = densidad del fluido
y = coordenada vertical
$\partial u/\partial y$ = gradiente de velocidad en dirección vertical
$\partial\rho/\partial y$ = gradiente de densidad en dirección vertical

Cuando $\partial u/\partial y$ es relativamente pequeña en comparación con $\partial\rho/\partial y$, Ri es grande, y la estratificación es estable. Cuando $\partial u/\partial y$ es relativamente grande en comparación con $\partial\rho/\partial y$, Ri es pequeño, y como $Ri \to 0$, el flujo del sistema se aproxima a una condición homogénea o neutral. Hoy otros parámetros que son utilizados para medir la estabilidad de un flujo, y serán estudiados, según sean requeridos, en los capítulos siguientes de este libro.

Dependiendo de la magnitud de la proporción de las fuerzas de gravedad e inercia, un flujo es clasificado como subcrítico, crítico o supercrítico. El parámetro sobre el cual se basa esta clasificación es conocido como el *número de Froude*

$$\mathbf{F} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{1.2.3}$$

en donde U = velocidad característica del flujo y L = longitud característica. En un canal abierto, la longitud característica es tomada como el *tirante hidráulico*, que por definición es el área hidráulica A dividida por el ancho de la superficie libre del agua T, o

$$D = \frac{A}{T} \tag{1.2.4}$$

Si $\mathbf{F} = 1$, el flujo está en un régimen crítico con las fuerzas inerciales y gravitacionales en equilibrio. Si $\mathbf{F} < 1$, el flujo está en un régimen subcrítico, y las fuerzas gravitacionales predominan. Si $\mathbf{F} > 1$, el flujo está en un régimen supercrítico y las fuerzas de inercia predominan.

El denominador del número de Froude es la aceleración de una onda elemental de gravedad en agua superficial. En la figura 1.2*a* una onda elemental de agua con altura Δy es creada por el movimiento de una placa impermeable de izquierda a derecha con una velocidad Δu. La onda tiene una celeridad c, y la velocidad del flujo en el frente de la ola es de cero. La situación definida por la figura 1.2*a* es de inestabilidad y no puede ser analizada por técnicas elementales.

Sin embargo, como se indica en una sección posterior de este capítulo, algunas situaciones de flujo no permanente pueden ser transformadas en problemas de flujos permanentes (Fig. 1.2*b*). En este caso, la transformación se com-

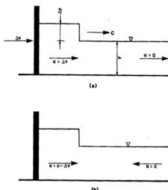


FIGURA 1.2 Propagación de una onda elemental.

pleta mediante la adaptación de un sistema de coordenadas que se mueva a una velocidad c. Esto equivale a cambiar el punto de vista del observador; i.e., en la figura 1.2*a* el observador es estacionario, mientras que, en la figura 1.2*b* el observador se mueve con la velocidad de la ola. La aplicación de la ecuación de continuidad o la situación permanente descrita en la figura 1.2*b* produce

$$cy = (y + \Delta y)(c - \Delta u)$$

y simplificando,

$$c = y\frac{\Delta u}{\Delta y} \tag{1.2.5}$$

La aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento unidimensional permanente producirá

$$\tfrac{1}{2}\gamma y^2 - \tfrac{1}{2}\gamma(y + \Delta y)^2 = \rho c y[(c - \Delta u) - c]$$

o

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{g}{c} \tag{1.2.6}$$

Substituyendo la ecuación (1.2.6) en la ecuación (1.2.5) se tendrá

$$c = \frac{gy}{c}$$

o

$$c = \sqrt{gy} \tag{1.2.7}$$

Suponiendo que $y \simeq d$ (en donde d es el tirante del flujo), lo cual es una suposición válida si el canal es ancho, entonces puede probarse que la celeridad de una onda elemental de gravedad es igual al denominador del número de Frou-

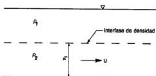


FIGURA 1.3 Notación para el número de Frouder densimétrico.

de. Con esta observación, puede aplicarse la siguiente interpretación a los flujos de régimen subcrítico y supercrítico:

1. Cuando el flujo es subcrítico, $\mathbf{F} < 1$, la velocidad del flujo es menor que la celeridad de una onda infinitesimal de gravedad. Por lo tanto, una onda puede propagarse nuevamente aguas arriba contra el flujo, y de ahí que las áreas aguas arriba están en comunicación hidráulica con las áreas aguas abajo.

2. Cuando el flujo es supercrítico, $\mathbf{F} > 1$, la velocidad del flujo es mayor que la celeridad de una onda infinitesimal de gravedad. Por lo tanto, como una onda no puede propagarse nuevamente aguas arriba contra el flujo, las áreas del canal que se encuentran aguas arriba no están en comunicación hidráulica con las áreas aguas abajo.

Así, la posibilidad de una propagación infinitesimal de onda aguas arriba con el flujo puede utilizarse como un criterio para diferenciar entre flujos subcríticos y supercríticos.

En el caso de flujo en canales abiertos de densidad estratificada, es corriente definir una forma completa pero invertida del número del gradiente de Richardson. El número interno o densimétrico de Froude $\mathbf{F}_D$ es definido por

$$\mathbf{F}_D = \frac{U}{\sqrt{g(\Delta\rho/\rho)L}} = \frac{U}{\sqrt{g'L}} \qquad (1.2.8)$$

en donde, con referencia a la figura 1.3, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, $g' = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho$, y $L =$ a la longitud característica que generalmente se toma como el tirante del flujo en la capa inferior y_1. La interpretación de $\mathbf{F}_D$ es análoga a la $\mathbf{F}$; e.g., en un flujo internamente supercrítico, una onda en la interfase de densidad no puede propagarse aguas arriba contra el flujo.

Tipos de canales

Los canales abiertos pueden ser clasificados como naturales o artificiales. La terminología *canal natural* se refiere a todos los canales que han sido desarro-

llados por procesos naturales y que no han tenido una mejoría significativa por parte de los humanos. Dentro de esta categoría están los riachuelos, grandes y pequeños ríos y los estuarios. La categoría de *canales artificiales* incluye todos los canales que han sido desarrollados por el esfuerzo humano. Dentro de esta categoría están los canales de navegación, canales de fuerza e irrigación, cunetas y asequias de drenaje. No obstante, los principios básicos de este libro son aplicables a canales naturales, un entendimiento completo del flujo en canales naturales es un esfuerzo interdisciplinario que requiere conocimiento de algunas otras técnicas hidráulica de canales abiertos, hidrología, geomorfología y transporte de sedimentos. Aunque el flujo en canales naturales será analizado, un tratamiento extensivo de la materia está fuera del alcance de este libro. Varias de las propiedades de los canales artificiales son controladas por el diseño, y este tipo de canales es bastante más fácil de analizar.

Dentro de la amplia categoría de artificiales, los canales abiertos tienen la siguiente subdivisión:

1. *Prismáticos*: un canal prismático es el que tiene constantes tanto la forma transversal como la pendiente del fondo. Los canales que no entran en este criterio son los llamados *no-prismáticos*.
2. *Canal*: el término canal se refiere a un gran conducto abierto de pendiente suave. Estos conductos abiertos pueden ser no revestidos o revestidos con concreto, cemento, pasto, madera, materiales bituminosos, o una membrana artificial.
3. *Medidor de régimen crítico*: en la práctica, el término *medidor* de régimen crítico se refiere a un canal construido sobre la superficie del terreno para conducir un flujo a través de una depresión. Estos medidores usualmente se construyen de madera, metal, mampostería o concreto. El término medidor de régimen crítico es también aplicado a canales construidos en el laboratorio para estudios básicos y de aplicación.
4. *Caída y disipadores*: una caída es un canal de pendiente fuerte. Un canal disipador también tiene una pendiente fuerte pero mucho menor que una caída.
5. *Alcantarilla*: una alcantarilla fluye sólo parcialmente llena, y se trata de un canal abierto principalmente utilizado para drenar carreteras, caminos y calles.

Finalmente puede notarse que en la terminología de este libro, *sección del canal*, se refiere a la seción transversal del canal tomada en dirección normal del flujo.

Elementos de la sección

En esta parte se definen las propiedades de una sección de canal que son determinadas por la forma geométrica del canal y el tirante del flujo.

1. *Tirante del flujo y*: éste es la distancia vertical desde el punto más bajo de la sección del canal a la superficie del agua. En bastantes casos, esta terminología se usa intercambiándola con el término tirante del flujo de la sección *d*, que es el tirante del flujo medido perpendicularmente al fondo del canal. La relación entre *y* y *d* es

$$y = \frac{d}{\cos\theta}$$

en donde θ es el ángulo de la pendiente del fondo del canal con una línea horizontal. Si θ es pequeño

$$y \simeq d$$

Únicamente en el caso de canales con inclinación (pendiente) pronunciada, es en donde hay una diferencia significativa entre *y* y *d*. Nótese que en algunas partes de este libro *y* es también utilizada para designar la coordenada vertical de un sistema de coordenadas cartesianas. Aunque esta definición dual de una variable puede ser confusa, es inevitable si se utiliza un sistema de notación tradicional.

2. *Nivel del agua:** el nivel del agua de un flujo es la elevación de la superficie libre del agua relativa a un plano de referencia. Si el punto más bajo de la sección de un canal se toma como el plano de referencia, entonces el nivel del agua y el tirante del flujo coinciden.

3. *Ancho superficial T*: el ancho superficial de un canal es el ancho de la sección del canal en la superficie libre del agua.

4. *Área hidráulica A*: el área hidráulica es el área de la sección transversal del flujo, tomada normal a la dirección del flujo.

5. *Perímetro mojado P*: el perímetro mojado es la longitud de la línea que es la interfase entre el fluido y el contorno del canal.

6. *Radio hidráulico R*: el radio hidráulico es la relación del área hidráulica entre el perímetro mojado o

$$R = \frac{A}{P} \tag{1.2.9}$$

7. *Tirante hidráulico D*: el tirante hidráulico es la relación del área hidráulica con el ancho superficial o

$$D = \frac{A}{T} \tag{1.2.10}$$

La tabla 1.1 resume las ecuaciones para los elementos básicos de las formas de canales encontradas normalmente en la práctica.

*N. del R. T.: el término que utiliza el autor en inglés es el de "stage".

Canales irregulares son también encontrados en la práctica, y en tales casos los valores del ancho superficial, área hidráulica y la localización del centro del área de flujo deben de ser interpolados a partir de los valores de estas variables, las cuales son tabuladas como un función del tirante del flujo. Franz (1982) ha desarrollado un método consistente y racional para ejecutar estas interpolaciones. Definiendo

$$A_y = \int_0^y T_\phi \, d\phi \tag{1.2.11}$$

y

$$\bar{y}A_y = \int_0^y (y - \phi)T_\phi \, d\phi = \int_0^y A_\phi \, d\phi \tag{1.2.12}$$

donde ϕ = variable sustituta de integración

T_ϕ = ancho superficial del canal a la distancia ϕ arriba del origen (Fig. 1.4)

A_y = área hidráulica correspondiente al tirante del flujo y

$\bar{y}$ = distancia de la superficie del agua al centroide del área hidráulica

Franz (1982) designó la compatibilidad de la interpolación por medio de 1) que los valores tanto tabulares como interpolados sean consistentes con las ecuaciones (1.2.11) y (1.2.12), y 2) las variables cambien monotónicamente entre los valores tabulados. Entonces, dadas las tablas de T y A como funciones de y tal que $y_i \leq y \leq y_{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, y $n + 1$ = al número de valores del tirante tabulados,

$$T_y = T_i + \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i}(T_{i+1} - T_i) \tag{1.2.13}$$

$$A_y = A_i + \tfrac{1}{2}(y - y_i)(T_y + T_i) \tag{1.2.14}$$

y

$$\bar{y}A_y = \bar{y}_i A_i + \tfrac{1}{2}(y - y_i)(A_y + A_i) - \tfrac{1}{12}(y - y_i)^2(T_y - T_i) \tag{1.2.15}$$

Nótese que la precisión de los valores interpolados por las ecuaciones (1.2.13) a (1.2.15) depende de la precisión en la aproximación del ancho superficial porque todos los otros valores interpolados son exactos si la aproximación al ancho superficial es exacta; en forma inversa errores en el ancho superficial se propagarán a todas las otras variables.

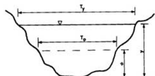


FIGURA 1.4 Definición de las secciones transversales por interpolación.

TABLA 1.1 Elementos geométricos de secciones de canales.

Canal tipo	Área A	Perímetro mojado P
(a)	by	$b + 2y$
(b)	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + z^2}$
(c)	zy^2	$2y\sqrt{1 + z^2}$
(d)	$\frac{2}{3}Ty$	$T + \frac{8}{3}\frac{y^2}{T}$*
(e)	$\frac{1}{8}(\theta - \text{sen}\,\theta)\,d_0^2$	$\frac{1}{2}\theta\, d_0$

* Aproximación satisfactoria cuando $0 < 4y/T \leq 1$.

Para $4y/T > 1$ $P = \frac{T}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4y}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y}\ln\left(\frac{4y}{T} + \sqrt{1 + \left(\frac{4y}{T}\right)^2}\right)\right]$

Radio hidráulico R	Ancho superficial T	Tirante hidráulico D	Factor de sección Z
$\frac{by}{b+2y}$	b	y	$by^{1.5}$
$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\frac{(b+zy)y}{b+2zy}$	$\frac{[(b+zy)y]^{1.5}}{\sqrt{b+2zy}}$
$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{2}}{2}zy^{2.5}$
$\frac{2T^2y}{3T^2+8y^2}$	$\frac{3}{2}\frac{A}{y}$	$\frac{2}{3}y$	$\frac{2}{9}\sqrt{6}Ty^{1.5}$
$\frac{1}{4}\left(1-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)d_0$	$2\sqrt{y(d_0-y)}$	$\frac{1}{8}\left(\frac{\theta-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}\right)d_0$	$\frac{\sqrt{2}(\theta-\operatorname{sen}\theta)^{1.5}}{32\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}}d_0^{2.5}$

Definiciones abstractas

Una *línea de corriente* es una línea construida de tal forma que en cualquier instante tiene la dirección del vector velocidad en todo punto; i.e., no puede presentarse un flujo transversal a la línea de corriente. Un *tubo de corriente* es una colección de líneas de corriente. Se hace notar y se subraya que, ninguno de los dos, líneas de corriente o tubo de corriente tienen medida física; son únicamente abstracciones convencionales.

1.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES

En varios flujos de canales abiertos de importancia práctica, el número de Reynolds excede a 12 500 y el régimen del flujo es turbulento. Por lo tanto, la mayor parte de los regímenes de flujo laminar no son tratados en este libro. La aparente naturaleza aleatoria de la turbulencia ha llevado a muchos investigadores a suponer que este fenómeno puede ser descrito en términos estadísticos. Con base en esta suposición, es conveniente definir la velocidad instantánea en términos de una velocidad de tiempo promedio y una fluctuación de componente aleatorio. Para un sistema de coordenadas cartesianas, las velocidades instantáneas en las direcciones x, y, z, son respectivamente,

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v' \tag{1.3.1}$$

y

$$w = \bar{w} + w'$$

Nota: las velocidades promedio utilizadas arriba pueden ser determinadas promediando sobre el tiempo en un punto en el espacio o sobre un área horizontal a un punto en el tiempo. En este libro, el simbolismo $\bar{u}_T$ indica un promedio en el tiempo mientras que $\bar{u}$ indica un promedio en el espacio. Es esencial que estas definiciones sean recordadas en secciones posteriores. Desde este punto y en adelante, las estadísticas pertinentes se definirán únicamente en la dirección x con el entendimiento tácito de que estas definiciones se aplican también a las dos direcciones remanentes de las coordenadas cartesianas. La velocidad de tiempo promedio es definido como

$$\bar{u}_T = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \tag{1.3.2a}$$

en donde T indica una escala de tiempo que es mucho mayor que la escala de tiempo de la turbulencia. La velocidad promedio espacialmente es dada por:

$$\bar{u} = \frac{1}{A}\iint_A u\,dA \tag{1.3.2b}$$

Entonces, cuando las fluctuaciones de la velocidad turbulenta sean aleatorias en términos de un tiempo promedio,

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt \tag{1.3.3}$$

Entonces los parámetros estadísticos de interés son:

1. Raíz cuadrada media (rcm) del valor de las fluctuaciones de velocidad

$$\text{rcm}(u') = \left[\frac{1}{T}\int_0^T (u')^2\,dt\right]^{1/2} \tag{1.3.4}$$

2. Energía cinética promedio (EC) de la turbulencia por unidad de masa

$$\frac{\underline{\text{(EC) promedio de turbulencia}}}{\text{Masa}} = \tfrac{1}{2}[\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2}] \tag{1.3.5}$$

3. Correlaciones entre variables que miden el grado en que dos variables son interdependientes. En el caso de las fluctuaciones de velocidad en el plano xy, el parámetro

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'v'\,dt \tag{1.3.6}$$

mide la correlación que existe entre u' y v'. En un flujo cortante turbulento, $\overline{u'v'}$ es finito: por lo tanto, se concluye u' y v' están correlacionados.

Conservación de la masa

Independientemente de que un flujo sea laminar o turbulento, todo flujo de fluido debe satisfacer la ecuación de conservación de la masa, comúnmente llamada ecuación de continuidad. Substituyendo las expresiones de las velocidades instantáneas definidas en la ecuación (1.3.1) dentro de la ecuación estándar de continuidad (se supone que la densidad es constante) (véase, por ejemplo, Streeter y Wylie, 1975) se obtiene

$$\frac{\partial(\overline{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w} + w')}{\partial z} = 0$$

o

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{1.3.7}$$

Tomando el tiempo o espacio promedio de cada término en la ecuación (1.3.7),

$$\overline{\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}} = 0$$

y

$$\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación (1.3.7) producirá dos ecuaciones de continuidad, una para la media o movimiento de tiempo-promedio y una para las fluctuaciones de turbulencia

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{1.3.8}$$

y

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{1.3.9}$$

En muchas aplicaciones de importancia práctica de la hidráulica de canales abiertos, la ecuación (1.3.8) es la única ecuación de continuidad que se utiliza. En este punto y para el resto de esta sección, la sobrerraya y el apóstrofo que indican un tiempo promedio serán omitidos.

Otras formas de la ecuación de continuidad pueden ser derivadas si se especifican apropiadamente las condiciones de frontera. Por ejemplo, supóngase que la frontera del fondo del flujo es dada por la función

o

$$F = y - y_0(x,z) \tag{1.3.10}$$

en donde $y = y_0$ es la elevación del fondo sobre un plano de referencia. Entonces, si se supone que 1) la velocidad en el fondo es cero o tangencial a la superficie y 2) una partícula de fluido en contacto con la superficie del fondo permanece en contacto con ella, la condición que debe ser satisfecha en la frontera del fondo es

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{1.3.11}$$

Al sustituir la ecuación (1.3.10) en la ecuación (1.3.11) se produce

$$u\frac{\partial y_0}{\partial x} + w\frac{\partial y_0}{\partial z} - v(x,y_0,z) = 0 \tag{1.3.12}$$

En una forma análoga, la superficie libre se define por la función

$$F = y - y^*(x,z,t)$$

y

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} + u\frac{\partial y^*}{\partial x} + w\frac{\partial y^*}{\partial z} - w(x,y^*,z) = 0 \tag{1.3.13}$$

en donde y^* es la elevación de la superficie libre sobre un plano de referencia. Integrando la ecuación (1.3.8) sobre el intervalo de y_0 a y^*

$$\int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial w}{\partial z}\,dy = 0$$

se obtiene

$$\int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial w}{\partial z}\,dy + v(x,y^*,z) - v(x,y_0,z) = 0 \tag{1.3.14}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y^*} u\,dy = u(x,y^*,z)\frac{\partial y^*}{\partial x} - u(x,y_0,z)\frac{\partial y_0}{\partial x} + y^*\frac{\partial u(x,y^*,z)}{\partial x} - z_0\frac{\partial u(x,y_0,z)}{\partial x}$$

y se notará que

$$\int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy = y^*\frac{\partial u(x,y^*,z)}{\partial x} - y_0\frac{\partial u(x,y_0,z)}{\partial x}$$

Cambiando las ecuaciones de arriba, se tendrá

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y^*} u\,dy = u(x,y^*,z)\frac{\partial y^*}{\partial x} - u(x,y_0,z)\frac{\partial y_0}{\partial x} + \int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

o

$$\int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y^*} u\,dy + u(x,y_0,z)\frac{\partial y_0}{\partial x} - u(x,y^*,z)\frac{\partial y^*}{\partial x} \quad (1.3.15)$$

En una forma análoga

$$\int_{y_0}^{y^*}\frac{\partial w}{\partial z}\,dy = \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y^*} w\,dy + w(x,y_0,z)\frac{\partial y_0}{\partial z} - u(x,y^*,z)\frac{\partial y^*}{\partial z} \quad (1.3.16)$$

Combinando las ecuaciones (1.3.12) a la (1.3.16) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y^*} u\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y^*} w\,dy + \frac{\partial y^*}{\partial t} = 0 \quad (1.3.17)$$

La ecuación (1.3.17) es una forma de la ecuación de continuidad a partir de la cual se pueden derivar otras, las cuales son utilizadas en el campo de la hidráulica de canales abiertos. Algunos ejemplos son los que siguen.

1. Defínase

$$q_x = \int_{y_0}^{y^*} u\,dy$$

y

$$q_z = \int_{y_0}^{y^*} w\,dy$$

en donde q_x y q_z son los componentes del flujo de volumen en el punto (x, z) por unidad de tiempo y anchos unitarios de las secciones verticales transversales en las direcciones x y z respectivamente, medidas entre la superficie y el fondo. Con estas definiciones, la ecuación (1.3.17) es

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial y^*}{\partial t} = 0 \quad (1.3.18)$$

2. En muchos casos, pueda ser conveniente introducir valores de u y w que son valores promedio verticalmente, i.e., valores promedio espacialmente. Defínase

$$\overline{u} = \frac{1}{y^* - y_0} \int_{y_0}^{y^*} u \, dy$$

y

$$\overline{w} = \frac{1}{y^* - y_0} \int_{y_0}^{y^*} w \, dy$$

Nota: En este caso u y w son velocidades promedio en el espacio más que en el tiempo. Reescribiendo la ecuación (1.3.17)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^* - y_0}{y^* - y_0} \int_{y_0}^{y^*} u \, dy\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{y^* - y_0}{y^* - y_0} \int_{y_0}^{y^*} w \, dy\right] + \frac{\partial y^*}{\partial t} = 0$$

y substituyendo las definiciones de u y w se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}[(y^* - y_0)\overline{u}] + \frac{\partial}{\partial z}[(y^* - y_0)\overline{w}] + \frac{\partial y^*}{\partial t} = 0 \qquad (1.3.19)$$

3. En el caso de un canal rectangular prismático

$$Q = \overline{u}A(t) = (y^* - y_0)b\overline{u}$$

donde b = ancho del canal. Dado que el canal es prismático, el flujo puede ser considerado unidimensional, y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}[(y^* - y_0)\overline{u}] + \frac{\partial y^*}{\partial t} = 0 \qquad (1.3.20)$$

o

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial y^*}{\partial t} = 0 \qquad (1.3.21)$$

En este prolongado análisis de la ecuación de continuidad se ha realizado un intento para derivar las formas de esta ecuación que serán utilizadas a través del libro y que se encuentran en la literatura moderna.

Conservación de la cantidad de movimiento

Un enfoque muy útil para derivar una ecuación apropiada para la conservación de la cantidad de movimiento para flujo en canales abiertos, puede obtenerse a partir de una consideración del volumen de control unidimensional de

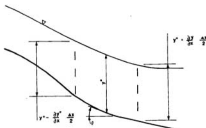


FIGURA 1.5 Volumen de control unidimensional.

la figura 1.5; el principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de acumulación}\\ \text{de la cantidad de movimiento}\\ \text{dentro del volumen de control}\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{flujo neto de la cantidad}\\ \text{de movimiento que entra}\\ \text{al volumen de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Suma de fuerzas}\\ \text{que actúan sobre}\\ \text{el volumen de control}\end{array}\right\} \quad (1.3.22)$$

El flujo de la cantidad de movimiento que entra al volumen de control es el producto de la razón del flujo másico y la velocidad o

$$\text{Entrada de cantidad de movimiento} = \rho u y^*(u) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 y^*)$$

$$\text{Salida de cantidad de movimiento} = \rho u y^*(u) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 y^*)$$

Entonces, la rapidez con que la cantidad de movimiento entra al volumen de control es

$$\rho u y^*(u) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 y^*) - \left[\rho u y^*(u) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 y^*) \right] = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 y^*) \quad (1.3.23)$$

Las fuerzas actuantes sobre el volumen de control que se muestra en la figura 1.5 son: 1) gravedad, 2) presión hidrostática y 3) fricción. La fuerza de cuerpo producida por la gravedad es el peso del fluido dentro del volumen de control actuando en la dirección del eje x o

$$F_y = \rho g y^* \, \Delta x \operatorname{sen} \theta = \rho g y^* \, \Delta x \, S_x \quad (1.3.24)$$

en donde θ = ángulo formado por el eje x con el fondo del canal, y se supone que

$$S_x = \text{sen } \theta$$

La fuerza de presión sobre cualquier sección vertical de ancho unitario y tirante del agua y^* es

$$F_p = \int_0^{y^*} p\, dy = \int_0^{y^*} \rho g(y^* - y)\, dy = \tfrac{1}{2}\rho g(y^*)^2 \qquad (1.3.25)$$

La fuerza friccionante que se supone actúa sobre el fondo y los lados del canal está dada por

$$F_f = \rho g y^* \Delta x\, S_f \qquad (1.3.26)$$

en donde S_f = pendiente de la línea de gradiente de energía o pendiente de fricción.

Combinando las ecuaciones (1.3.23) a (1.3.26) con las leyes de conservación de cantidad de movimiento, la ecuación (1.3.22) produce

$$\Delta x \frac{\partial}{\partial t}(\rho u y^*) = -\Delta x \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 y^*) + g y^* \rho (S_x - S_f) - \frac{g}{2}\Delta x \frac{\partial y^{*2}}{\partial x}$$

Suponiendo que ρ es constante y dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por $\rho \Delta x$,

$$\frac{\partial (u y^*)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 y^*) + \frac{g}{2}\frac{\partial y^{*2}}{\partial x} = g y^* (S_x - S_f) \qquad (1.3.27)$$

que es conocida como la forma de conservación de la ecuación de cantidad de movimiento. Si esta ecuación es expandida.

$$y^* \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial y^*}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(u y^*) + y^* u \frac{\partial u}{\partial x} + g y^* \frac{\partial y^*}{\partial x} = g y^* (S_x - S_f) \qquad (1.3.28)$$

En una forma análoga, la ley de conservación de cantidad de movimiento puede, cuando sea requerido, ser escrita en forma bidimensional o

$$\frac{\partial}{\partial t}(u y^*) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 y^*) + \frac{\partial}{\partial y}(u v y^*) + \frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial x}(y^{*2}) = g y^* (S_x - S_{fx}) \qquad (1.3.29)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}(v y^*) + \frac{\partial}{\partial x}(u v y^*) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2 y^*) + \frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial y}(y^*)^2 = g y^* (S_y - S_{fy}) \qquad (1.3.30)$$

donde S_x y S_y son las pendientes del fondo del canal en las direcciones x y y, respectivamente, y S_{fx} y S_{fy} son las pendientes de fricción en las direcciones

x y y. Estas ecuaciones pueden también ser expandidas para obtener formas similares a la ecuación (1.3.28).

En un canal rectangular prismático, donde la ecuación de continuidad está dada por la ecuación (1.3.20), la correspondiente ecuación de conservación de cantidad de movimiento es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y^*}{\partial x} = g(S_x - S_f) \qquad (1.3.31)$$

En este punto, es conveniente notar que la conservación de cantidad de movimiento en un flujo turbulento está gobernado por un conjunto de ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Reynolds que pueden derivarse a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes por la sustitución de la ecuación (1.3.1). El resultado en un sistema general de coordenadas cartesianas es

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p} + \gamma h) + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}\right) - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right) \qquad (1.3.32)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\bar{p} + \gamma h) + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right) - \rho\left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right)$$

donde h = distancia vertical
ρ = densidad
p = presión
μ = viscosidad absoluta o dinámica

Las ecuaciones anteriores permitirán junto con la ley de conservación de masa gobernar todos los flujos turbulentos; pero sin una suposición para cuantificar las fluctuaciones de velocidad, no es posible una solución de este conjunto de ecuaciones.

Un método popular para cuantificar los términos de fluctuación turbulenta en la ecuación (1.3.32) es la suposición de Boussinesq que define el remolino de viscosidad de tal forma que las ecuaciones de arriba se convierten en

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + (\mu + \eta)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p} + \gamma h) + (\mu + \eta)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}\right) \tag{1.3.33}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\bar{p} + \gamma h) + (\mu + \eta)\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right)$$

donde η = remolino de viscosidad. Debe notarse que la suposición de Boussinesq trata a η como si fuera una propiedad del fluido similar a μ; siendo que, η no es una propiedad del fluido pero es un parámetro que es una función del flujo y la densidad. En la práctica, en flujos turbulentos, μ es despreciado cuando es mucho más pequeño que η.

Prandtl (véase, por ejemplo, Schlichting, 1968), en un esfuerzo para relacionar el transporte de la cantidad de movimiento con las características medias del flujo, introdujo una longitud característica que se denomina la *longitud mixta*. Prandtl sostuvo que

$$u' \sim v' \sim \ell \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{1.3.34}$$

donde ℓ = longitud mixta. Entonces

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 \tag{1.3.35}$$

donde τ = esfuerzo cortante. Una comparación de las teorías de turbulencia de Boussinesq y Prandtl nos da una interrelación entre el remolino de viscosidad y la longitud mixta o

$$\eta = \rho \ell^2 \frac{d\bar{u}}{dy}$$

y

$$\frac{\eta}{\rho} = \ell^2 \frac{d\bar{u}}{dy} = \epsilon \tag{1.3.36}$$

donde η/ρ = factor de turbulencia cinemática similar a la viscosidad cinemática. ϵ es una medida directa de la capacidad de transporte o mezcla de un flujo turbulento. En un flujo homogéneo, ϵ se refiere a todos los procesos de transporte, f.g., cantidad de movimiento, calor, salinidad y sedimentación. En un flujo de densidad estratificada, la siguiente desigualdad se considera válida:

$$\epsilon > \epsilon_M^s > \epsilon_{Ma}^s \tag{1.3.37}$$

donde ϵ_M^S = coeficiente de transporte de la cantidad de movimiento estratificado y ϵ_{Ma}^S = coeficiente de transporte de la masa estratificado.

Ecuación de energía

De la hidráulica elemental y la mecánica de fluido, recuérdese que la energía total de una porción de fluido que viaja a una aceleración constante sobre una línea de corriente es igual a la suma de la carga de posición (elevación de un punto sobre un plano de referencia), la carga de presión, y la carga de velocidad. La ecuación unidimensional que cuantifica esta proposición es conocida como la ecuación de energía de Bernoulli o

$$H = z_A + d_A \cos\theta + \frac{u_A^2}{2g} \tag{1.3.38}$$

donde el subíndice A = punto sobre la línea de corriente de un flujo en el canal abierto
z_A = elevación del punto A sobre un plano de referencia arbitrario
d_A = tirante de la sección del flujo
θ = ángulo de la pendiente del canal
u_A = velocidad en el punto A

Para valores pequeños de θ la ecuación (1.3.38) se reduce a

$$H = z + y + \frac{\overline{u}^2}{2g} \tag{1.3.39}$$

donde $\overline{u}$ = velocidad promedio espacialmente del flujo y y = tirante del flujo.

Coeficientes de energía y cantidad de movimiento

En bastantes problemas de canales abiertos es conveniente y apropiado utilizar las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en forma unidimensional. En tal caso, las leyes de conservación son:

1. *Conservación de masa (Continuidad)*

$$Q = \overline{u}A$$

2. *Conservación de cantidad de movimiento*

$$\Sigma F = \rho Q(\overline{u}_2 - \overline{u}_1)$$

3. *Conservación de energía*

$$H = z + y + \frac{\overline{u}^2}{2g}$$

Por supuesto, ningún flujo real es unidimensional; por lo tanto, la verdadera transferencia de cantidad de movimiento a través de una sección transversal

$$\iint_A \rho u^2 \, dA$$

no es necesariamente igual a la transferencia promedio espacialmente

$$\rho Q \overline{u}$$

Así, en situaciones donde el perfil de velocidad varía significativamente en las direcciones vertical y/o transversal, puede ser necesario definir un coeficiente de corrección de cantidad de movimiento, o

$$\beta \rho Q \overline{u} = \iint_A \rho u^2 \, dA$$

y resolviendo

$$\beta = \frac{\iint_A \rho u^2 \, dA}{\rho Q \overline{u}} = \frac{\iint_A \rho u^2 \, dA}{\rho \overline{u}^2 A} \tag{1.3.40}$$

donde β = coeficiente de corrección de cantidad de movimiento. En forma análoga, el coeficiente de corrección de energía cinética es

$$\alpha \left(\gamma \frac{\overline{u}^3}{2g} \right) = \iint_A \gamma \frac{u^3}{2g} \, dA$$

y solucionar

$$\alpha = \frac{\iint_A \gamma u^3 \, dA}{\gamma \overline{u}^3 A} \tag{1.3.41}$$

donde α = coeficiente de corrección de energía cinética. Considérense las siguientes propiedades de β y α:

1. Ambas son iguales a la unidad cuando el flujo es uniforme. En todos los otros casos β y α deben ser mayores a la unidad.
2. Una comparación de las ecuaciones (1.3.40) y (1.3.41) demuestran que para una sección de canal dada y una distribución de velocidad α es mucho más sensitiva a la variación en la velocidad que β.

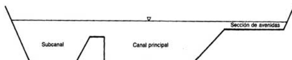


FIGURA 1.6 Canal principal con subcanales y sección de avenidas.

3. En la hidráulica de los canales abiertos, β y α son generalmente usadas únicamente cuando el canal consiste de un canal principal con subcanales y/o bermas y plános húmedos (Fig. 1.6). En tales casos, la gran variación en la velocidad de sección a sección efectivamente abarca todas las variacionnes graduales en velocidad, y es apropiado considerar la velocidad en cada una de las subsecciones como constante. En canales de sección compuesta, el valor de α puede exceder de 2.

1.4 CONCEPTOS TEÓRICOS

Ecuaciones de escala

En general, la terminología escala de ecuaciones, se refiere a un proceso por el cual una ecuación diferencial compleja es examinada de una manera racional para determinar si puede ser reducido a una forma simple dada una aplicación específica. El primer paso en el proceso es no dimensionar la ecuación. Como ejemplo, considérese un flujo incompresible, laminar, de densidad y viscosidad constantes ocurriendo en un campo gravitacional. Las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la ecuación de continuidad gobiernan el comportamiento de este flujo. Para simplificar únicamente la componente x de las ecuaciones de Navier-Stokes será tratada o

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1.4.1)$$

Defínanse las siguientes cantidades adimensionales

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \qquad \hat{v} = \frac{v}{U}$$

$$\hat{y} = \frac{y}{L} \qquad \hat{w} = \frac{w}{U}$$

$$\hat{z} = \frac{z}{L} \qquad \hat{t} = \frac{tU}{L}$$

$$\hat{h} = \frac{h}{L} \qquad \hat{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$\hat{u} = \frac{u}{U} \quad (1.4.2)$$

donde L y U son una característica de la longitud y la velocidad, respectivamente. Sustituyendo estas variables adimensionales en la ecuación (1.4.1) se obtendrá

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{U^2}{L}\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{U^2}{L}\hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{U^2}{L}\hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -g\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{U^2}{L}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu U}{\rho L^2}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}\right) \quad (1.4.3)$$

La substitución no ha alterado la forma ni las unidades de la ecuación (1.4.1). La ecuación (1.4.3) puede ser adimensionada dividiendo ambos lados por U^2/L siendo el resultado

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\left(\frac{gL}{U^2}\right)\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu}{\rho UL}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}\right) \quad (1.4.4)$$

La ecuación (1.4.4) es adimensional, y los dos grupos de variables adimensionales que aparecen han sido definidos previamente como el número de Froude, i.e.,

$$\mathbf{F}^2 = \frac{U^2}{gL}$$

y el número de Reynolds, i.e.

$$\mathbf{R} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

La ecuación adimensional puede ser reescrita como

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{1}{\mathbf{F}^2}\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\mathbf{R}}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}\right) \quad (1.4.5)$$

Después de que una ecuación o conjunto de ecuaciones han sido escaladas, e.g., la ecuación (1.4.5), es examinada para determinar si puede realizarse una simplificación matemática significativa basada en especificaciones de un problema particular. Por ejemplo en la ecuación (1.4.5), si $\mathbf{R}$ es grande, entonces el último grupo de términos del lado derecho de la ecuación es despreciable.

Capa límite

El principio de escala puede ser usado para reducir las ecuaciones de Navier-Stokes a un conjunto de ecuaciones matemáticamente tratables conocido como las *ecuaciones de capa límite* (Schlichting, 1968). Un bien establecido prin-

cipio de la mecánica de fluidos es el que dice que una partícula de fluido en contacto con una frontera sólida estacionaria no tiene velocidad. Así, todos los flujos sobre fronteras estacionarias exhiben perfiles de velocidad a través de los cuales la fuerza de arrastre causada por la frontera es transmitida al exterior. Por ejemplo, considérese una superficie plana en un flujo, si la viscosidad del fluido es pequeña, entonces el efecto de la superficie es confinado a una débil capa de fluidos en la inmediata vecindad de la superficie. Fuera de esta "capa límite" el fluido se comportará como si no tuviera viscosidad. Además, cuando la capa límite es comparada con la escala típica longitudinal, la ley de diferencia de presión es despreciable.

Considérese una superficie plana con U velocidad del flujo fuera de la capa límite. Evidencias experimentales y teóricas demuestran que δ, el espesor de la capa límite, depende de U, ρ, μ, y x. Para una capa límite laminar la solución de Blasius (Schlichting, 1968) dará

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\mathbf{R}_x}} \quad \text{para } \frac{u}{U} = 0.99 \tag{1.4.6}$$

donde x = distancia desde el borde anterior de la superficie y $\mathbf{R}_x = \rho U x/\mu$ = un número de Reynolds usado en la distancia longitudinal. En la ecuación (1.4.6) se puede notar que δ es proporcional a $\sqrt{x}$, y así cuando x se incrementa δ también se incrementa. Como el espesor de la capa límite laminar se incrementa, la capa límite es inestable y se transforma en una capa límite turbulenta (Fig. 1.7*a*). Esta traducción ocurre en el rango

$$500\,000 < \mathbf{R}_x < 1\,000\,000$$

El espesor de una capa límite turbulenta está dado por

$$\delta = \frac{0.37x}{\mathbf{R}_x^{0.2}} \quad \text{para } \frac{u}{U} = 0.99 \tag{1.4.7}$$

Igualmente en una capa límite turbulenta existe una capa muy delgada cerca de la frontera que permanece en su mayor parte en forma laminar, y es conocida como la *subcapa laminar*. Con relación a las capas límites, especialmente a la hidráulica de canales abiertos:

1. Como se ha mencionado, el espesor de una capa límite, cuando es laminar o turbulenta, es una función de U, ρ, μ, y x. En general, la interrelación que existe es

$$x\uparrow, \mu\uparrow, \rho\downarrow, U\downarrow \Rightarrow \delta\uparrow$$

y

$$x\downarrow, \mu\downarrow, \rho\uparrow, U\uparrow \Rightarrow \delta\downarrow$$

donde $\uparrow$ indica un incremento en el valor y $\downarrow$ indica un decremento en el valor.

2. Las capas límite frecuentemente se producen dentro de otras capas límites. En muchos flujos de canales abiertos, la capa límite intersecta la su-

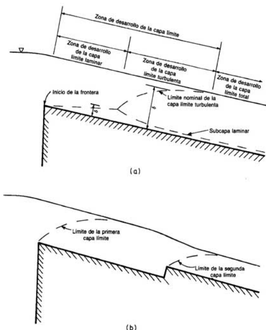


FIGURA 1.7 *a*) Esquema de la capa límite desarrollada en canales abiertos. *b*) Desarrollo de capas límites dentro de capas límites.

perficie libre; así el tirante total del flujo es el espesor de la capa límite. Un cambio en la forma del canal o en la rugosidad del canal puede dar por resultado la formación y crecimiento de una nueva capa límite (Fig. 1.7*b*).

3. Las superficies de frontera son clasificadas como hidráulicamente lisas o rugosas con base en una comparación del espesor de la subcapa laminar y de la rugosidad ponderada. Si la frontera rugosa es tal que los elementos de rugosidad son cubiertos por la subcapa laminar, entonces la frontera es por definición hidráulicamente lisa. En este caso, la rugosidad no tiene efecto sobre el flujo fuera de la subcapa. Por lo tanto, si la frontera de los elementos rugosos se proyecta a través de la subcapa, entonces por definición, la frontera es hidráulicamente rugosa y el flujo fuera de la subcapa

es afectado por la rugosidad. Schlichting (1968) en conexión con superficies planas y tuberías, determinó experimentalmente los siguientes criterios para clasificar las superficies límites:

Frontera hidráulicamente lisa

$$0 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 5 \qquad (1.4.8a)$$

Frontera de transición

$$5 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 70 \qquad (1.4.9a)$$

Frontera hidráulicamente rugosa

$$70 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \qquad (1.4.10a)$$

donde u_* = velocidad cortante $= \sqrt{gRS}$, y k_s = rugosidad ponderada. Si la ecuación de resistencia de Chezy (cap. 4) o

$$\bar{u} = C\sqrt{RS}$$

donde C = coeficiente de resistencia de Chezy, y es utilizado para calcular u^*, entonces las ecuaciones (1.4.8a) a (1.4.10a) serán

$$0 \leq \frac{k_s \bar{u}\sqrt{g}}{C\nu} \leq 5 \qquad (1.4.8b)$$

$$5 \leq \frac{k_s \bar{u}\sqrt{g}}{C\nu} \leq 70 \qquad (1.4.9b)$$

$$70 \leq \frac{k_s \bar{u}\sqrt{g}}{C\nu} \qquad (1.4.10b)$$

Debe recalcarse que definir k_s como una rugosidad ponderada conduce a una impresión impropia. k_s es un parámetro que caracteriza no únicamente el tamaño vertical de los elementos rugosos, sino también su orientación, su arreglo geométrico, y el espacio. Por esta razón, la escala de rugosidad raramente corresponderá a lo ponderado de los elementos rugosos. La tabla 1.2 resume algunos valores aproximados de k_s para varios materiales.

4. El flujo alrededor de un cuerpo escarpado, por ejemplo una esfera, generalmente da como resultado que sea limitada la separación de la capa límite. En el caso de una esfera, el flujo en la vecindad del fondo es similar al que está sobre una superficie plana. Por lo tanto, aguas abajo donde la superficie hace curva agudamente, cambia el flujo en dirección opuesta a la capa límite que la separa de la superficie (Schilichting, 1968). La separación de la capa límite que resulta es conocida como forma de arrastre, que puede ser la componente primaria de arrastre de un cuerpo escabroso. Recuérdese

TABLA 1.2 Valores aproximados de k_s (Chow, 1959)

Material	k_s rango, ft	k_s rango, m
Latón, cobre, plomo, vidrio	0.0001-0.0030	0.00003-0.0009
Hierro forjado, acero	0.0002-0.0080	0.00006-0.002
Hierro fundido asfaltado	0.0004-0.0070	0.0001 -0.002
Hierro galvanizado	0.0005-0.0150	0.0002 -0.0046
Hierro fundido	0.0008-0.0180	0.0002 -0.0055
Duela de madera	0.0006-0.0030	0.0002 -0.0009
Cemento	0.0013-0.0040	0.0004 -0.001
Concreto	0.0015-0.0100	0.0005 -0.003
Dren de teja	0.0020-0.0100	0.0006 -0.003
Acero riveteado	0.0030-0.0300	0.0009 -0.009
Fondo natural de río	0.1000-3.000	0.3 -0.9

de la mecánica de fluidos básica que el arrastre total, i.e., superficie más forma de arrastre, está dado por

$$F = C_D A \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \tag{1.4.11}$$

donde F = fuerza de arrastre total sobre el cuerpo
C_D = coeficiente de arrastre
A = área del cuerpo proyectado sobre un plano normal al flujo

Nótese arriba que el caso más común en el flujo de canales abiertos es que la capa límite esté completamente desarrollada; i.e., la capa límite llena completamente la sección del canal. Existen bastantes casos en los siguientes capítulos, donde es muy importante la comprensión de los conceptos básicos acerca de capas límites.

Distribución de velocidades

Dentro de una capa límite turbulenta, Prandtl (véase, por ejemplo, Echlichting, 1968) demostró que el perfil de velocidad vertical es aproximadamente logarítmico. La ecuación (1.3.35) establece que el esfuerzo cortante en cualquier punto del flujo es

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

o

$$du = \sqrt{\frac{\tau}{\rho \ell^2}}\, dy \tag{1.4.12}$$

Se supone generalmente que

$$\ell = ky \tag{1.4.13}$$

donde k fue originalmente llamada la constante de turbulencia de von Karman; por lo tanto es más apropiado llamar al término k como un coeficiente cuando hay alguna evidencia de que k puede variar sobre un rango de valores como una función del número de Reynolds (véase por ejemplo, Slotta, 1963, Hinze, 1964 y Vanoni, 1946). Supóngase que k puede ser aproximado a 0.4, al substituir la ecuación (1.4.13) en la ecuación (1.4.12) se obtiene, después de integrar,

$$u = 2.5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{y}{y_0}$$

o

$$u = 2.5u_* \ln \frac{y}{y_0} \qquad (1.4.14)$$

donde se supone que $\tau = \tau_0$ = esfuerzo cortante sobre la frontera del fondo, u = velocidad turbulenta promedio a una distancia y sobre el fondo [Ec.(1.3.1)], y y_0 = una constante de integración. La ecuación (1.4.14) es conocida como la ley universal de distribución de velocidad de Prendtl-von Karman. La constante de integración y_0 es del mismo orden de magnitud que el espesor de la subcapa viscosa y es una función de cuando la frontera es hidráulicamente lisa o rugosa. Si la frontera es hidráulicamente lisa, entonces y_0 depende únicamente de la viscosidad cinemática y de la velocidad cortante o

$$y_0 = \frac{m\nu}{u_*} \qquad (1.4.15)$$

donde m es un coeficiente y es aproximadamente igual a 1/9 para superficies lisas (Chow, 1959), al sustituir la ecuación (1.4.15) en la ecuación (1.4.14) se obtiene

$$u = 2.5u_* \ln \frac{9yu_*}{\nu} \qquad (1.4.16)$$

Cuando la frontera de la superficie es hidráulicamente rugosa, y_0 depende únicamente de la rugosidad ponderada a

$$y_0 = mk_s \qquad (1.4.17)$$

donde en este caso m es un coeficiente aproximadamente igual a 1/30 para rugosidades de granos de arena. Sustituyendo la ecuación (1.4.17) en la ecuación (1.4.14) se obtiene

$$u = 2.5u_* \ln \frac{30y}{k_s} \qquad (1.4.18)$$

Las ecuaciones (1.4.16) y (1.4.18) representan adecuadamente el perfil vertical de velocidad que existe en un canal ancho llevando un flujo no estratificado. En flujos de densidad estratificada, la estratificación de densidad ocasiona que el perfil de velocidad sea modificado (McCutcheon, 1979, 1981 y French, 1978). La figura 1.8 ilustra los tres tipos de perfiles de velocidad vertical que

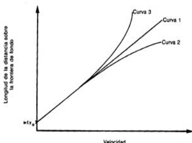


FIGURA 1.8 Tipos de perfiles de velocidad esperadas en un flujo unidimensional.

son encontrados en flujos de capa límite unidimensional turbulentas, completamente desarrollados. La curva 1 es el perfil no estratificado representado por la ecuación (1.4.18). La curva 2 representa el perfil de velocidad esperada en un flujo unidimensional, estratificado establemente, mientras que la curva 3 ilustra el tipo de perfil de velocidad esperado, en un flujo unidimensional no estable estratificado. Ya que la densidad de estratificación inestable es raramente encontrada en el flujo de canales abiertos, será ignorada aquí.

La forma del perfil de velocidad en un flujo no estratificado es una función de u_* y y con viscosidad no importante excepto cerca de la frontera. La escala de rugosidad k_s determina la magnitud de la velocidad en un flujo pero no tiene efecto en la forma del perfil. Monin y Obukhov (en Monin y Yaglom, 1971) introdujeron un parámetro denominado el flujo ascendente (*buoyancy flux*) B, que en un flujo de densidad estratificada puede ser utilizado con y y u_* para describir el perfil de velocidad. El flujo ascendente se define mediante

$$B = -\frac{\overline{\rho' v'}}{g/\bar{e}} \tag{1.4.19}$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad promedio sobre el tirante del flujo y $\overline{\rho' v'}$ es la fluctuación turbulenta de densidad y la velocidad vertical promedio sobre el tiempo en un punto en el espacio o sobre un área horizontal en un punto en el tiempo. El teorema Π de Buckingham puede ser utilizado para combinar u_*, y y B dentro de un simple parámetro dimensional

$$\zeta = \frac{y}{L}$$

(1.4.20)

donde $$L = -\frac{u_*^3}{kB} = -\frac{u_*^3 \bar{\rho}}{kg\overline{\rho' v'}}$$

donde k fue introducida por Obukhov y ha sido retenida en todos los análisis subsecuentes (Monin y Yaglom, 1971), L es una longitud de escala que está relacionada a la altura de la subcapa dinámica donde las fuerzas cortantes del flujo dominan los efectos de estratificación. Por convención, L es negativa para flujos estratificados estables y positiva pàra flujos estratificados inestables.

El análisis dimensional también dará una expresión para la forma del perfil de velocidades en flujos estratificados o

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{yk}{u_*} = \phi(\zeta) \tag{1.4.21}$$

donde $\phi(\zeta)$ = una función de y/L. Para flujos estratificados estables en la atmósfera, Monin y Obukhov, en Monin y Yaglom (1971), aseveraron que

$$\phi(\zeta) = 1 + \alpha_w\left(\frac{y}{L}\right) \tag{1.4.22}$$

y Webb (1970) determinó que el coeficiente α_ω tiene un valor de 5.2. Otros investigadores (por ejemplo, Monin y Yaglom, 1971, y Panofsky, 1974) tienen valores determinados α_ω tan bajos como 0.6 y tan altos como 10. McCutcheon (1979) encontró que α_ω varía entre 4.4 a 7.8 con un valor promedio de 5.8. El uso que Webb dio a una larga serie de datos de alta calidad es un argumento convincente para suponer que α_ω tiene un valor aproximadamente de 5. Prescindiendo de la forma $\phi(\zeta)$ y el valor de cualquier coeficiente asociado, $\phi(\zeta)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\lim_{\zeta\to 0}\phi(\zeta) = 1 \tag{1.4.23}$$

y

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*}{ky} \tag{1.4.24}$$

En este momento, debe determinarse una expresión para el flujo ascendente (buoyancy flux). McCutcheon (1978, 1981) demostró que cuando la estratificación es ligera

$$\overline{\rho' v'} = k^2 y^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.4.25}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.4.25) y (1.4.22) en la ecuación (1.4.21) y resolviendo para

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*}{ky}\left[\frac{1}{1 + (c\alpha_\omega g k^2 y^2/\overline{\rho} u_*^2)(\partial\rho/\partial y)}\right] \tag{1.4.26}$$

donde c es un coeficiente que mide la razón de masa a longitudes mixtas de cantidad de movimiento. c no es una constante pero varía ligeramente; sin embargo puede suponerse que vale aproximadamente 1. Entonces con una su-

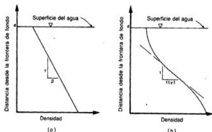


FIGURA 1.9 *a)* Gradiente de densidad lineal. *b)* Gradiente de densidad no lineal.

posición acerca del gradiente de densidad, la ecuación (1.4.26) puede resolverse. Por ejemplo, si $\partial\rho/\partial y = \beta$ (Fig. 1.8) donde β es una constante, entonces

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{(y/y_0)^2 + (g\alpha_w\beta/\bar{\rho}u_*^2)k^2y^2}{1 + (g\alpha_w\beta/\bar{\rho}u_*^2)k^2y^2}\right]^{1/2} \tag{1.4.27}$$

si se adopta un gradiente general de densidad por ejemplo, $\partial\rho/\partial y = f(y)$ (Fig. 1.9), entonces

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{k}\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y[1 + (\alpha_w g/\bar{\rho}u_*^2)k^2y^2 f(y)]} \tag{1.4.28}$$

Las ecuaciones del perfil de velocidad vertical derivadas previamente, se aplican a flujos que ocurren en una amplia variedad de canales. Utilizando la ley de velocidad de Prandtl-von Karman [Ec. 1.4.14)], Keulegan (1938) derivó una ecuación para la velocidad promedio de un flujo en un canal de forma arbitraria. La modificación de Chow (1969) a la derivación de Keulegan, y con referencia a la figura 1.10 establece que el gasto total a través de una sección del canal es

$$Q = \bar{u}A = \int_0^d \bar{u}\, dA = \int_0^A \bar{u}\beta\, dy \tag{1.4.29}$$

donde d = tirante del flujo y β = longitud de la isovel (la curva de igual velocidad). Se supone que β es proporcional a la distancia vertical desde la frontera o

$$\beta = P - \Gamma y$$

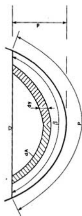


FIGURA 1.10 Definición de símbolos.

donde Γ es una función que depende de la forma del canal. Entonces

$$A = \int_0^d \beta \, dy = Pd - \frac{\Gamma d^2}{2} \tag{1.4.30}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (1.4.14) y (1.4.30) en la ecuación (1.4.29), al integrar y simplificarse obtiene

$$u = 2.5u_* \ln \left[\frac{R}{y_0} \frac{d}{R} \exp \left(-1 - \frac{\Gamma d^2}{4A} \right) \right] \tag{1.4.31}$$

donde y_0 se define mediante las ecuaciones (1.4.15) y (1.4.17). en la ecuación (1.4.31) el parámetro

$$\frac{d}{R} \exp \left(-1 - \frac{\Gamma d^2}{4A} \right)$$

es una función de la forma de la sección transversal del canal. Keulegan y Chow han demostrado que la variación de este parámetro con secciones de varias formas es pequeño, y por lo tanto este parámetro puede representarse en general mediante una constante β. Con esta suposición, la ecuación (1.4.31) será

$$\bar{u} = u_* \left(\beta + 2.5 \ln \frac{mR}{y_0} \right)$$

que es una ecuación teórica para la velocidad promedio de flujo en un canal abierto. Keulegan (1938) llegó a las siguientes conclusiones específicas:

Para canales hidráulicamente lisos

$$\bar{u} = u_* \left(3.25 + 2.5 \ln \frac{Ru_*}{\nu} \right) \tag{1.4.32}$$

Para canales hidráulicamente rugosos

$$\bar{u} = u_* \left(6.25 + 2.5 \ln \frac{R}{k_s} \right) \tag{1.4.33}$$

Las ecuaciones anteriores para la distribución de velocidades en flujo de canales abiertos son unidimensionales; i.e., consideran únicamente la variación de la velocidad en la dimensión vertical. Muchos de los canales encontrados en la práctica exhiben distribuciones de velocidad que son por lo general rigurosamente bidimensionales y en varios casos tridimensionales. Por ejemplo la ley de distribución de velocidad de Prandtl-von Karman predice que la velocidad máxima ocurre en la superficie libre; sin embargo las medidas en laboratorios y en el campo demuestran que la velocidad máxima por lo común ocurre abajo de la superficie libre, no obstante en flujos superficiales, rápidos y anchos o en flujos que ocurren en canales muy lisos la velocidad máxima puede estar en la superficie libre. Estas observaciones demuestran que una ley de

distribución de velocidad unidimensional no puede describir completamente flujos que son bidimensionales y tridimensionales. En general, la distribución de velocidad en un canal de forma arbitraria se cree que depende de la forma de la sección transversal, de la rugosidad de la frontera, de la presencia de escalones y de cambios en la forma de la sección transversal. Las corrientes secundarias causadas por escalones y cambios en las formas del canal, son denominadas *corrientes secundarias fuertes*. La forma de la sección transversal y la distribución de la rugosidad de la frontera ocasionan una distribución uniforme de los esfuerzos de Reynolds en el flujo y da por resultado corrientes secundarias débiles. La terminología *corriente o flujo secundario.* se refiere a un movimiento circular del fluido alrededor de un eje que es paralelo al flujo o corriente primario, que a su vez es una traslación del fluido en la dirección longitudinal. En esta sección, se considerarán los desarrollos modernos acerca de las corrientes secundarias débiles.

Einstein y Li (1958) intentaron identificar la causa de las corrientes secundarias débiles y concluyeron que 1) las corrientes secundarias no ocurren en flujos turbulentos isotrópicos o laminares; 2) las corrientes secundarias en flujos turbulentos ocurren únicamente cuando las isoveles (las líneas o fronteras de igual velocidad) del flujo primario no son paralelas una con otra, o con las fronteras del canal; y 3) los esfuerzos de Reynolds contribuyen al flujo secundario únicamente cuando su distribución es no lineal. Tracy (1965) dirigió una investigación sobre líneas similares y llegó aproximadamente a las mismas conclusiones. El mayor progreso en esta área de investigación ha sido realizada por Liggett y otros (1965) y Chiu y otros (1967, 1971, 1876, 1978) que empezaron por investigar corrientes secundrias débiles que ocurrían en esquinas (Liggett y otros 1965). Estos métodos iniciales fueron posteriormente extendidos a flujos en canales triangulares (Chiu y Lee, 1971) y finalmente a canales de una forma de sección transversal arbitraria (Chiu y otros, 1976, 1978). Este método de estimar corrientes secundarias y, sobre todo las distribuciones de la velocidad tridimensional, requiere primero el establecimiento de un sistema de coordenadas curvilíneas que está formado por las isoveles, las curvas ϵ en la figura 1.11, y las curvas η en esta figura que tienen trayectorias ortogonales a las curvas ϵ. Chiu y otros (1976) sostuvieron que una extensión heurística de la distribución de velocidad de Prandtl-von Karman era

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{1.4.34}$$

donde ϵ_0 = una constante y ϵ = la coordenada curvilínea definida arriba. A lo largo de la frontera del canal $\epsilon \simeq \epsilon_0$; y por lo tanto, $u = 0$. En este punto se requiere una suposición semiempírica acerca de la forma de los isoveles. En un canal natural, Chiu y otros (1976) pretendieron que la siguiente ecuación daría una estimación adecuada de las curvas

$$\epsilon = \frac{y}{d}\left(1 - \frac{|z|}{T_i}\right)^{\beta_i} \tag{1.4.35}$$

donde y = coordenada vertical
d = tirante del flujo
z = coordenada transversal
T_i = distancia transversal entre el eje y ($z = 0$) y la intersección izquierda o derecha de la superficie del agua y la frontera
β_i = coeficiente de la curva izquierda y derecha (Fig. 1.11)

Combinando las ecuaciones (1.4.34) y (1.4.36) se obtendrá

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{y}{d} \right) \left(1 - \frac{|z|}{T_i} \right)^{\beta_i} \right] \qquad (1.4.36)$$

Esta teoría puede también ser extendida para estimar el gasto de una sección natural o irregular. De la ecuación (1.4.35), la frontera del canal está dada por

$$y = f_0(z) = d\epsilon_0 \left(1 - \frac{|z|}{T_i} \right)^{-\beta_i} \qquad (1.4.37)$$

El área de la sección transversal es

$$A_i = \int_{z=0}^{T_i} \int_{y=f_0(z)}^{d} dy\, dz = T_i d \left[1 - \frac{1}{1 - \beta_i} (\epsilon_0 - \beta_i \epsilon_0^{-\beta_i}) \right] \qquad (1.4.38)$$

El flujo volumétrico está dado por

$$Q = \int_{z=0}^{T_1} \int_{y=f_0(z)}^{d} u_1\, dy\, dz + \int_{z=0}^{T_2} \int_{y=f_0(z)}^{d} u_2\, dy\, dz$$

o

$$Q = Td \frac{u_*}{k} \left[-1 - \ln \epsilon_0 + \epsilon_0 - \frac{1}{T} (T_1 \beta_1 \phi_1 + T_2 \beta_2 \phi_2) \right] \qquad (1.4.39)$$

donde

$$\phi_i = \frac{A_i}{T_i d} = 1 - \frac{1}{1 - \beta_i} (\epsilon_0 - \beta_i \epsilon_0^{-\beta_i}) \qquad (1.4.40)$$

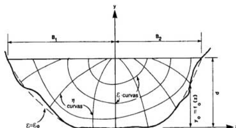


FIGURA 1.11 Esquema de ϵ, η del sistema de coordenadas (*Chiu et al., 1976*).

En estas ecuaciones, hay tres parámetros que deben ser determinados: ϵ_0, β_1 y β_2. Para una situación específica, los valores de estos parámetros pueden ser estimados generalmente a partir de la información dada. En cualquier situación común se supone que la geometría del canal se conoce; por lo tanto, A_i, T_i y ϕ_i para $i = 1, 2$ están definidas. Si además, Q, $u*$ y d son conocidas, entonces ϵ_0, β_1 y β_2 son determinadas a partir de la resolución por ecuaciones simultáneas de las ecuaciones (1.4.40) para $i = 1, 2$ y (1.4.39). Alternativamente, si únicamente se conoce el tirante del flujo en una sección, entonces las ecuaciones (1.4.39) y (1.4.40) contienen 4 incógnitas y debe encontrarse una ecuación auxiliar. Un examen de la ecuación (1.4.36) demuestra que sobre el eje y

$$\epsilon = \frac{y}{d}$$

Por lo tanto, si las dos medidas de velocidad están disponibles para los ejes, puede estimarse el valor de ϵ_0. Por ejemplo, si $u(0.2)$ es la velocidad en $y/d = 0.2$ y $u(0.8)$ es la velocidad en $y/d = 0.8$, entonces

$$u(0.2) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{0.2}{\epsilon_0}$$

$$u(0.8) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{0.8}{\epsilon_0}$$

y resolviendo simultáneamente

$$\epsilon_0 = \ln^{-1} \left\{ \frac{0.22 - 1.61[u(0.8)/u(0.2)]}{[u(0.8)/u(0.2)] - 1} \right\} \tag{1.4.41}$$

El valor de ϵ_0 estimado en la ecuación (1.4.41) puede utilizarse en la ecuación (1.4.40) para estimar valores de β_1 y β_2. La implicación de este método es que para dos medidas de la velocidad en la línea central de un canal, puede estimarse el flujo en el canal.

La ecuación (1.4.36) proporciona un método para estimar la distribución de velocidad primaria en un flujo de canal abierto que ocurre en un canal de forma arbitraria. Según la ecuación (1.4.35) las trayectorias ortogonales de las curvas ϵ son

$$\eta = y^2 - \frac{1}{\beta_i} (\beta_i - |z|)^2 \tag{1.4.42}$$

La componente ϵ de la velocidad secundaria permanente es

$$u_\epsilon = \left(\frac{\rho}{h_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \epsilon} \right)^{-1} \left[-\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z) + \frac{1}{h_\epsilon} \frac{\partial \tau_{\epsilon x}}{\partial \epsilon} + \frac{\tau_{\epsilon x}}{h_\epsilon h_\tau} \frac{\partial h_\tau}{\partial \epsilon} \right] \tag{1.4.43}$$

donde z = elevación media de la frontera del canal y

$$\tau_{\epsilon x} = \frac{\rho k^2 (\partial u/\partial \epsilon)^4}{(\partial^2 u/\partial \epsilon^2)^2} \tag{1.4.44}$$

La otra componente de velocidad es

$$u_\eta = -\frac{1}{h_\epsilon}\int_0^\eta \left(h_\epsilon h_\eta \frac{\partial u}{\partial x} + h_\eta \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \epsilon} + u_\epsilon \frac{\partial h_\eta}{\partial \epsilon}\right) d\eta \qquad (1.4.45)$$

donde h_ϵ y h_η son coeficientes métricos dadas por

$$h_\epsilon = \frac{T_i d}{[1 - (|z|/T_i)]^{\beta_i - 1}\sqrt{(T_i - |z|)^2 + \beta_i^2 y^2}}$$

y

$$h_\eta = \frac{0.5 T_i}{\sqrt{\beta_i^2 y^2 + (T_i - |z|)^2}}$$

Las componentes de velocidad u_ϵ y u_η pueden ser transferidas en coordenadas cartesianas por un procedimiento estándar de transformación de coordenadas.

Con respecto al método de Chiu de estimación de velocidades en corrientes primarias y secundarias, nótese lo siguiente. Primero, la confirmación directa de las predicciones obtenidas por las ecuaciones (1.4.43) y (1.4.45) no es posible en la mayor parte de los canales naturales que transportan además fluidos sólidos, burbujas de aire y otras impurezas. La distribución de velocidad primaria estimada por la ecuación (1.4.36) ha sido verifivado con medidas de campo (Chiu y otros, 1976). Segundo, la técnica computacional ilustrada aquí es en ocasiones inadecuada, ya que no puede hacer frente a la verdadera irregularidad tridimensional de un canal natural.

1.5 SIMILITUD Y MODELOS FÍSICOS

El número de importantes problemas modernos de la hidráulica de canales abiertos que puede solucionarse satisfactoriamente por técnicas analíticas puras es muy limitado: la mayor parte de los problemas deben ser solucionados por una combinación de técnicas numéricas y analíticas, medidas de campo y modelado físico. En un modelo físico, se deben satisfacer dos criterios: 1) el modelo y prototipo deben ser geométricamente similares, y 2) el modelo y prototipo deben ser dinámicamente similares. El requerimiento de similitud geométrica puede establecerse mediante una escala de longitudes como la razón entre el prototipo y el modelo. El requerimiento de similitud dinámica establece que los dos sistemas con fronteras geométricamente similares tengan patrones de flujo geométricamente similares, en instantes de tiempo correspondiente. Esto requiere que todas las fuerzas individuales que actúan sobre elementos correspondientes del fluido tengan las mismas razones (proporciones) en los dos sistemas. El problema principal en el desarrollo de modelos físicos no es encontrar los requerimientos de similitud geométrica, sino asegurar la similitud dinámica.

Un enfoque para el desarrollo apropiado de parámetros para asegurar la similitud dinámica es la escalación de las ecuaciones fundamentales. Por ejem-

plo, la ecuación (1.4.5) tiene la misma solución para los sistemas de flujo geométricamente similares, ya que **F** y **R** son numéricamente iguales para los dos sistemas. En algunos casos uno de estos parámetros puede no ser importante; sin embargo para una similitud dinámica exacta **F** y **R** deben ser iguales tanto para el modelo como para el prototipo. La igualación de los números de Frounde requiere

$$\frac{U_M}{\sqrt{g_M L_M}} = \frac{U_P}{\sqrt{g_p L_p}} \tag{1.5.1}$$

o

$$U_R = \sqrt{g_R L_R} \tag{1.5.2}$$

donde el subíndice M designa al modelo, P al prototipo, y R la razón de las variables modelo a prototipo. El requerimiento de igualdad de los números de Reynolds da como resultado

$$U_R = \frac{\mu_R}{\rho_R L_R} \tag{1.5.3}$$

al combinar las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) y reconociendo que $g_R = 1$ da por resultado

$$L_R = \left(\frac{\mu_R}{\rho_R}\right)^{2/3} = \nu_R^{2/3} \tag{1.5.4}$$

donde ν = viscosidad cinemática. Así, si un modelo físico exacto de un flujo en canal abierto es construido, el diseñador tiene únicamente un grado de libertad—la selección del modelo de fluido. Ya que la escala de viscosidad cinemática entre fluidos comúnmente disponibles es bastante limitada, los requerimientos impuestos por la ecuación (1.5.4) generalmente dan por resultado un modelo que tiene el mismo tamaño que el prototipo. La conclusión es que los modelos físicos exactos de flujos de canales abiertos son virtualmente imposibles.

En muchos flujos de canales abiertos, los efectos de viscosidad son relativamente despreciables para efectos de la gravedad, por lo tanto en muchos casos los modelos físicos son construidos basados sólo en la igualdad del número de Froude. Si únicamente se requiere la similitud del número de Froude, entonces

$$U_R = \sqrt{g_R L_R} \tag{1.5.5}$$

y

$$T_R = \sqrt{\frac{L_R}{g_R}} \tag{1.5.6}$$

donde T_R = razón de la escala de tiempo. En requerimientos de similitud que necesitan únicamente el número de Froude, el diseñador debe estar enterado de dos problemas:

1. Deberá tener especial cuidado para asegurar que el modelo no permita efectos viscosos dominantes. Por ejemplo, si el flujo en el prototipo es turbulento, entonces el flujo en el modelo no puede ser laminar.

2. En algunos casos, la fricción del fluido es importante pero la viscosidad molecular no lo es tanto, *e.g.*, en flujos con un número de Reynolds alto. En tales casos, la similitud de efectos friccionantes es una similitud de rugosidad de frontera más que de igualdad de números de Reynolds.

En el caso que la estratificación de densidad sea un efecto importante, entonces el modelo podrá basarse en la igualdad del número densimétrico de Fraude [Ec. (1.2.8)].

En una situación específica, parámetros adimensionales adicionales deben ser considerados. Por ejemplo, en un modelo en que pequeñas olas son generadas, la tensión superficial debe considerarse. La tensión superficial debe tomarse en cuenta también en situaciones en que pequeñas olas pueden evitarse. El parámetro que mide la magnitud relativa de las fuerzas de inercia y capilaridad es el número de Weber o

$$\mathbf{W} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \tag{1.5.7}$$

donde σ = fuerza de tensión superficial por unidad de longitud.

BIBLIOGRAFÍA

Chiu, C.-L., "Factors Determining the Strength of Secondary Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 93, no. EM4, August 1967, pp. 69–77.

Chiu, C.-L., and Lee, T.-S., "Methods of Calculating Secondary Flow," *Water Resources Research*, vol. 7, no. 4, August 1971, pp. 834–844.

Chiu, C.-L., Lin, H. C., and Mizumura, K., "Simulation of Hydraulic Processes in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 102, no. HY2, February 1976, pp. 185–205.

Chiu, C.-L., Hsiung, D. E., and Lin, H., "Three-Dimensional Open Channel Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY8, August 1978, pp. 1119–1136.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Einstein, H. A., and Li, H., "Secondary Currents in Straight Channels," *Transactions of American Geophysical Union*, vol. 39, 1958, p. 1085.

Franz, D. D., "Tabular Representation of Cross-Sectional Elements," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 108, no. HY10, October 1982, pp. 1070–1081.

French, R. H., "Stratification and Open Channel Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY1, January 1978, pp. 21–31.

Hinze, J. O., "Turbulent Pipe Flow," in *The Mechanics of Turbulence*, A. Favre, ed., Gordon Breach, New York, 1964, pp. 129–165.

Keulegan, G. H., "Laws of Turbulent Flow in Open Channels," Research Paper RP 1151, *Journal of Research*, U.S. Bureau of Standards, vol. 21, December 1938, pp. 707–741.

Liggett, J. A., Chiu, C.-L., and Miao, L. S., "Secondary Currents in a Corner," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY6, November 1965, pp. 99–117.

McCutcheon, S. C., "The Modification of Open Channel Vertical Velocity Profiles by Density Stratification," Ph.D. dissertation, Vanderbilt University, Nashville, TN, December 1979.

McCutcheon, S. C., "Vertical Velocity Profiles in Stratified Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 107, no. HY8, August 1981, pp. 973–988.

Monin, A. S., and Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, vol. 1, J. L. Lumley, ed., MIT Press, Cambridge, MA, 1971, pp. 425–486.

Panofsky, H. A., "The Atmospheric Boundary Layer below 150 Meters," *The Annual Review of Fluid Mechanics*, M. van Dyke, ed., Annual Reviews, Palo Alto, CA, 1974, pp. 147–178.

Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

Slotta, L. S., "A Critical Investigation of the Universality of Karman's Constant in Turbulent Flow," in *Studies of the Effects of Variations on Boundary Conditions on the Atmospheric Boundary Layer*, H. H. Lettau, ed., University of Wisconsin Annual Report, Madison, WI, 1963, pp. 1–36.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

Tracy, H. J., "Turbulent Flow in a Three Dimensional Channel," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY6, November 1965, pp. 9–35.

Vanoni, V. A., "Transportation of Suspended Sediment by Water," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1946, vol. III, pp. 67–133.

Webb, E. K., "Profile Relationship: The Log-Linear Range, and Extension to Strong Stability," *Quarterly Journal Royal Meteorological Society*, vol. 96, 1970, pp. 67–90.

DOS

Principio de energía

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo, se analizan las aplicaciones de la ley de conservación de energía a los flujos en canales abiertos. La sección 2.1 define la energía específica. El efecto de la curvatura en la trayectoria de la distribución de presión dentro del campo del flujo es también considerado. La sección 2.2 define el flujo subcrítico, crítico y supercrítico. En esta sección se presentan diversas técnicas—de tanteos, gráficas y explícitas—con objeto de estimar el flujo crítico en los canales con diversas formas de sección transversal. La sección 2.3 estudia los controles "aguas arriba" y "aguas abajo" y la accesibilidad de varios puntos sobre la *E*-*y* o curva de energía específica. En la sección 2.4 se introduce al lector a varias aplicaciones del principio de energía que se presentan en la práctica, incluyendo el uso de curvas adimensionales *E*-*y*, cálculos asociados con transiciones en canales y problemas encontrados en canales de sección compuesta.

2.1 DEFINICIÓN DE ENERGÍA ESPECÍFICA

Un principio central en cualquier tratamiento de la hidráulica de flujo en canales abiertos debe ser la ley de conservación de energía. Recuérdese de la mecánica de fluidos elemental, que la energía total de una porción de agua viajando sobre una línea de corriente está dada por la ecuación de Bernoulli o

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \tag{2.1.1}$$

donde H = energía total
z = elevación de la línea de corriente sobre un plano de referencia
p = presión
γ = peso específico del fluido
p/γ = carga de presión
u = velocidad de la línea de corriente
$u^2/2g$ = carga de velocidad
g = aceleración local de la gravedad

La suma $z + (p/\gamma)$ define la elevación de la línea de gradiente hidráulico sobre el plano de referencia; en general, el valor de esta suma varía de punto a punto a lo largo de la línea de corriente. Para examinar la variación de esta suma bajo diversas circunstancias, considérese una partícula de área en la sección transversal δA, longitud δs, densidad ρ, y masa $\rho\ \delta A\ \delta s$ moviéndose a lo largo de una línea de corriente arbitraria en la dirección $+S$ (Fig. 2.1). Si se supone que el fluido es sin fricción, entonces no hay fuerzas cortantes, y únicamente la fuerza gravitacional del cuerpo y las fuerzas en la superficie

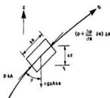


FIGURA 2.1 Componente de fuerzas actuando sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea de corriente.

sobre los límites de la partícula, deben de ser considerados. La fuerza gravitacional es $\rho g\, \delta A\, \delta s$, la fuerza de presión sobre la cara que está aguas arriba es $p\, \delta A$, y la fuerza de presión sobre la cara aguas abajo es $[p + (\partial p/\partial s)\, \delta s]\, \delta A$. Aplicando la segunda ley del movimiento de Newton en la dirección del flujo, se obtiene

$$F_s = a_s\, \delta m$$

o $$\rho a_s\, \delta A\, \delta s = p\, \delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\delta s\right)\delta A - \rho g\, \delta A\, \delta s \cos\theta$$

donde a_s = aceleración de la partícula del fluido a lo largo de la línea de corriente. Simplificando esta ecuación

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} + \rho a_s = 0$$

y notando que $$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos\theta$$

produce $$\frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma z) + \rho a_s = 0 \qquad (2.1.2)$$

La ecuación (2.1.2) es conocida como la ecuación de Euler de movimiento a lo largo de una línea de corriente. Si $a_s = 0$, la ecuación (2.1.2) puede ser integrada para obtener la ley hidrostática; i.e., la presión varía en forma lineal con respecto a la profundidad.

Las implicaciones de la ecuación (2.1.2) en el flujo de canales abiertos son significativas. Primero, se ignoran fluctuaciones menores producidas por la turbulencia y las líneas de corriente no tienen componentes de aceleración en el plano de la sección transversal, i.e., las líneas de corriente no tienen curvatura sustancial ni divergencia, entonces el flujo se denomina paralelo y prevalece una distribución de presión hidrostática. En la práctica, muchos flujos uniformes (Caps. 4 y 5) y flujos gradualmente variados (Cap. 6) pueden ser considerados como flujos paralelos con distribuciones de presiones hidrostáticas en donde la divergencia y curvatura de las líneas de corriente son despreciables. En un flujo paralelo, la suma $z + p/\gamma$ es constante e igual al tirante del flujo y, si el plano de referencia es tomado como el fondo del canal. Enton-

ces, por definición, la energía específica de un flujo en el canal abierto relativo al fondo del canal es

$$E = y + \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g} \tag{2.1.3}$$

donde α = factor de corrección de energía cinética que es usado para corregir la no-uniformidad del perfil de velocidad y $\bar{u}$ = velocidad promedio del flujo ($\bar{u} = Q/A$ donde A es el área hidráulica y Q es el gasto). La suposición inherente en la ecuación (2.1.3) es que la pendiente del canal es pequeña, o $\cos\theta \simeq 1$, y $y = d \cos\theta$ (Fig. 2.2*a*). En general, si $\theta < 10°$ o $S < 0.018$ donde S es la pendiente del canal, la ecuación (2.1.3) es válida

Si θ no es pequeña, entonces la distribución de presiones no es hidrostática cuando el tirante vertical del flujo es significativamente diferente del tirante medido perpendicularmente al fondo del canal. Además, en canales de gran pendiente, e.g., caídas rápidas, el flujo contiene aire lo que cambiará tanto la densidad como el tirante del fluido. En el material subsecuente, a menos que se especifique otra cosa, debe suponerse que la pendiente del canal es tal que existe una distribución de presión hidrostática.

Además, si $a_s \neq 0$, entonces las líneas de corriente de un flujo cualquiera tendrán una cantidad significativa de curvatura o divergencia, y el flujo se denominará *curvilíneo*. Tal situación puede ocurrir cuando el fondo del canal está curveado, en compuertas, y en cascadas a caídas libres. En tales casos, la distribución de presiones no es hidrostática, y debe estimarse un factor de corrección de presión. En situaciones de flujo cóncavo (Fig. 2.2*b*), las fuerzas resultantes de la curvatura de las líneas de corriente refuerzan las fuerzas de gravedad. En el caso de flujo convexo (Fig. 2.2*c*), las fuerzas resultantes de la curvatura de las líneas de corriente actúan contra las fuerzas gravitacionales. Si un canal tiene un perfil longitudinal curveado, entonces la desviación de la distribución de presiones a partir de la condición hidrostática puede estimarse desde una aplicación de la segunda ley de Newton

$$c = \frac{y}{g} \frac{\bar{u}^2}{r} \tag{2.1.4}$$
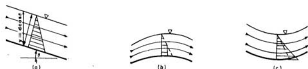


FIGURA 2.2 (*a*) Distribución de presión en un flujo paralelo con $\cos\theta \simeq 1$, (*b*) Distribución de presión en un flujo cóncavo. (*c*) Distribución de presión en un flujo convexo.

donde r = radio de curvatura del fondo del canal. La verdadera distribución de presiones en una sección es entonces

$$p = y \pm \frac{y}{g}\frac{\overline{u}^2}{r} \tag{2.1.5}$$

donde los signos más y menos son usados respectivamente, con flujos cóncavos y convexos. En muchos casos, es conveniente definir un coeficiente de presión tal que, la carga de presión en un flujo curvilíneo pueda definirse como $\alpha' y$ donde α' = el coeficiente de presión. Puede demostrarse que

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{Qy}\iint_A cu\, dA \tag{2.1.6}$$

donde Q = gasto total y dA = un incremento de área. Entonces $\alpha' > 1$ para flujo cóncavo, $\alpha' = 1$ para flujo paralelo, y $\alpha' < 1$ para flujo convexo. Para flujos curvilíneos complejos, la distribución de presiones puede estimarse a partir de mallas o redes de flujo o con pruebas de modelos (véase, Streeter y Wylie, 1975).

2.2 FLUJO SUBCRÍTICO, CRÍTICO Y SUPERCRÍTICO

Un examen de la ecuación (2.1.3) demuestra que si $\cos\theta \approx 1$, $\alpha = 1$, y la sección y gasto del canal son especificados, entonces la energía específica es únicamente una función del tirante del flujo. Si y es graficado contra E (Fig. 2.3), resultará una curva con dos ramas. La rama AC se aproxima asintóticamente al eje E, y la rama AB se aproxima asintóticamente a la línea $E = y$.

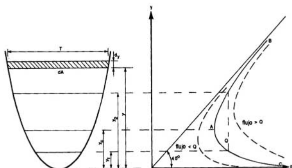


FIGURA 2.3 Curva de energía específica.

Para todos los puntos sobre el eje E mayor que el punto A, hay dos posibles tirantes de flujo, conocidos como los tirantes alternos del flujo. Cuando A representa la mínima energía específica, las coordenadas de este punto pueden ser encontradas tomando la primera derivada de la ecuación (2.1.3) con respecto a y, e igualando el resultado a cero o

$$E = y + \alpha \frac{\overline{u}^2}{2g} = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$
$$\frac{dE}{dy} = 1 - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 0 \tag{2.2.1}$$

donde A = área hidráulica. En la figura 2.3, el área diferencial de agua dA cercana a la superficie libre es igual a $T\,dy$ donde T = el ancho superficial o de la superficie del agua. Por definición, el tirante hidráulico D es

$$D = \frac{A}{T} \tag{2.2.2}$$

Substituyendo $\alpha = 1$ y la ecuación (2.2.2) en la ecuación (2.2.1) se obtienen

$$1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^2}\frac{T}{A} = 1 - \frac{\overline{u}^2}{g}\frac{1}{D} = 0$$

o

$$\frac{\overline{u}^2}{2g} = \frac{D}{2} \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}} = \mathbf{F} = 1 \tag{2.2.4}$$

que es la definición de flujo crítico presentada anteriormente. Así, la energía específica mínima ocurre en el tirante hidráulico crítico. Con este conocimiento, la rama AC puede interpretarse como representativa de flujos supercríticos mientras que la rama AB representa flujos subcríticos. Con respecto a la figura 2.3 y a la ecuación (2.2.4), debe considerarse lo siguiente. Primero, para canales de gran pendiente, ángulo θ y $\alpha \neq 1$, se puede demostrar fácilmente que el criterio para energía específica mínima es

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{(gD\cos\theta/\alpha)}} \tag{2.2.5}$$

Segundo, en la figura 2.3, las curvas E-y para valores de gasto mayores que Q están situadas a la derecha de la curva de Q, y las curvas E-y para valores de gasto menores que Q están situadas a la izquierda de la curva de Q. Tercero, en el caso de canales rectangulares de ancho b, la ecuación (2.2.4) puede reducirse a formas más adecuadas que facilitan los cálculos. Por ejemplo, defínase el gasto por unidad de ancho q como

$$q = \frac{Q}{b}$$

La velocidad promedio será

$$\bar{u} = \frac{q}{y}$$

y para un canal rectangular, $y = D$. Con estas definiciones, la ecuación (2.2.4) puede reordenarse para dar

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \qquad (2.2.6)$$

Al substituir las definiciones de arriba en la ecuación (2.2.3) se obtiene

$$\frac{\bar{u}_c^2}{2g} = \frac{1}{2} y_c \qquad (2.2.7)$$

Y usando la definición de energía específica, ecuación (2.1.3), y ecuación (2.2.7),

$$y_c = ⅔E_c \qquad (2.2.8)$$

donde E_c = energía específica a la velocidad y tirante crítico.

En este momento, es apropiado estudiar métodos para calcular el tirante crítico de flujo en canales no rectangulares cuando se especifican la forma del canal y el gasto. Para canales simples, el planteamiento más fácil y directo a este cálculo es una solución algebraica involucrando soluciones del tipo de tanteos de cada una de las ecuaciones (2.2.3), (2.2.4) o (2.2.5).

EJEMPLO 2.1

Para un canal trapecial con ancho de base b = 6.0 m (20 ft) y talud z = 2, calcúlese el tirante crítico del flujo si Q = 17 m³/s (600 ft³/s).

Solución

De la tabla 1.1

$$A = (b + zy)y = (6.0 + 2y)y$$

$$T = b + 2zy = 6 + 4y$$

$$D = \frac{A}{T} = \frac{(3 + y)y}{3 + 2y}$$

y

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{17}{2\,(3 + y)y}$$

Substituyendo lo anterior en la ecuación (2.2.3) se obtiene

$$\frac{[17/(6 + 2y)]^2}{g} = \frac{(3 + y)y}{3 + 2y}$$

Simplificando,

$$7.4(3 + 2y) = [(3 + y)y]^3$$

Por tanteos, el tirante crítico es aproximadamente

$$y_c = 0.84 \text{ m } (2.8 \text{ ft})$$

y la velocidad crítica correspondiente es

$$u_c = \frac{17}{[6 + 2(0.84)]0.84} = 2.6 \text{ m/s } (8.5 \text{ ft/s})$$

Un segundo método para enfocar el problema de calcular el tirante crítico es a través de ecuaciones semiempíricas. Straub (1982) desarrolló para este propósito un conjunto de ecuaciones para diversas formas de canales comunes. Éstas son resumidas en la tabla 2.1

EJEMPLO 2.2

Para un canal trapecial con $b = 6.0$ m (20 ft) y $z = 2$, encuéntrese el tirante crítico del flujo si $Q = 17$ m³/s (600 ft³/s).

Solución

De la tabla 2.1

$$y_c = 0.81 \left(\frac{\psi}{z^{0.75} b^{1.25}} \right)^{0.27} - \frac{b}{30z} \quad \text{para } 0.1 < \frac{Q}{b^{2.5}} < 0.4$$

donde

$$\psi = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

Verificando la validez de la desigualdad $Q/b^{2.5} = 17/6^{2.5} = 0.19$, se confirma la aplicación de la ecuación de arriba proveniente de la tabla 2.1. Ahora sustitúyanse los valores apropiados,

$$\psi = \frac{1(17)^2}{9.8} = 29.5$$

$$y_c = 0.81 \left(\frac{29.5}{2^{0.75} 6^{1.25}} \right)^{0.27} - \frac{6}{30(2)}$$
$$= 0.86 \text{ m } (2.8 \text{ ft})$$

Al comparar este resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 2.1 para el mismo problema, se nota que las respuestas son muy similares y además el método del ejemplo 2.1 requiere de muy pocos cálculos que no son complicados.

Un tercer método para determinar el tirante crítico cuando la forma de la sección del canal y el gasto son especificados, implica el uso de un diagrama de diseño. En el desarrollo de un diagrama para este propósito, es conveniente definir el factor de sección para calcular el gasto crítico. Al sustituir $\bar{u} = Q/A$ en la ecuación (2.2.3) se obtiene después de simplificar,

$$\frac{Q}{\sqrt{g/\alpha}} = Z = \sqrt{\frac{A^3}{T}} \tag{2.2.9}$$

El lado izquierdo de la ecuación (2.2.9) es por definición el factor de sección para el gasto crítico Z, y el lado derecho de la ecuación es una función únicamente de la forma del canal y el tirante del flujo. Con el propósito de resolver el problema del tirante crítico se muestra un diagrama de diseño en la figura 2.4.

EJEMPLO 2.3

Un canal circular de 3.0 ft (0.91 m) de diámetro, conduce un gasto de 25 ft³/s) (0.71 m³/s); estímese el tirante crítico del flujo.

Solución

De la ecuación (2.2.9) con $\alpha = 1.0$

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{g/\alpha}} = \frac{25}{\sqrt{32.2}} = 4.41$$

y

$$\frac{z}{d_0^{2.5}} = \frac{4.41}{(3)^{2.5}} = 0.283$$

Según la figura 2.4

$$\frac{y_c}{d_0} = 0.54$$

$$y_c = 0.54(3) = 1.6 \text{ ft } (0.49 \text{ m})$$

Para el diseño de secciones complejas que no pueden ser tratadas por alguna de las ecuaciones semiempíricas resumidas en la tabla 2.1 o el método de diagrama de diseño presentado en la figura 2.4, se puede utilizar un procedimiento gráfico. Este método es también aplicable a canales naturales. En este procedimiento, es construida una curva de y_c contra Z, de manera que, para un valor especificado de $Z = Q/\sqrt{g}$ se pueda estimar el valor de y_c.

TABLA 2.1 Ecuaciones semiempíricas para la estimación de Y_c (Straub, 1982).

Canal tipo	Ecuación para y_c en términos de $\psi = \alpha Q^2/g$	
Rectangular	$\left(\frac{\psi}{b^2}\right)^{1/3}$	
Trapecial	$0.81\left(\frac{\psi}{z^{0.75}b^{1.25}}\right)^{0.27} - \frac{b}{30z}$	Rango de aplicación $0.1 < \frac{Q}{b^{2.5}} < 0.4$ Para $\frac{Q}{b^{2.5}} < 0.1$ Utilícese la ecuación para canal rectangular
Triangular	$\left(\frac{2\psi}{z^2}\right)^{0.20}$	
Parabólico	$(0.84c\psi)^{0.25}$	Ecuación del perímetro $y = cx^2$
Circular	$\left(\frac{1.01}{d_0^{0.26}}\right)\psi^{0.25}$	Rango de aplicación $0.02 \leq \frac{y_c}{d_0} \leq 0.85$

TABLA 2.1 *(Continuación)*

Canal tipo	Ecuación para y_c en términos de $\psi = \alpha Q^2/g$	
Elíptico	$0.84b^{0.22}\left(\frac{\psi}{a^2}\right)^{0.25}$	Rango de aplicación $0.05 \le \frac{y_c}{2b} \le 0.85$ a = Eje mayor b = Eje menor
Exponencial	$\left(\frac{m^3\psi c^{2m-2}}{4}\right)^{1/(2m+1)}$	Ecuación del perímetro $y = cx^{1/(m-1)}$

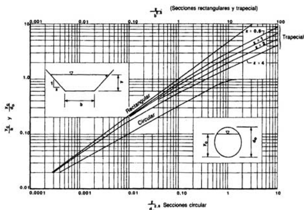


FIGURA 2.4 Curvas para estimar el tirante crítico.

EJEMPLO 2.4

Un canal trapecial con $b = 20$ ft (6.0 m) y $z = 1.5$ conduce un gasto de 600 ft³/s (17 m³/s); estímese el tirante crítico del flujo.

Solución

El primer paso en la solución de este problema es construir una curva y contra Z (Fig. 2.5). El valor del factor de sección es entonces calculada a partir de los datos disponibles.

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{A^3}{T}} = \frac{600}{\sqrt{32.2}} = 105$$

Entonces, según la figura 2.5, $y_c = 2.8$ ft (0.85 m).

2.3 ACCESIBILIDAD Y CONTROLES

La introducción de los conceptos de energía específica y flujo crítico hace posible analizar la reacción del flujo en un canal según cambios en la forma del canal y las estructuras hidráulicas para diferentes regímenes de flujo permanente.

En cualquier sección transversal, la energía total es

$$H = \frac{\overline{u}^2}{2g} + y + z \tag{2.3.1}$$

donde y = tirante del flujo, z = elevación del fondo del canal sobre un plano de referencia, y se supone que $\alpha = 1$ y $\cos\theta = 1$. Diferenciando la ecuación

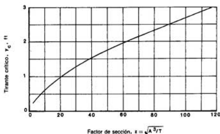


FIGURA 2.5 y_c contra z para un canal trapecial con b = 20 ft y $z = 1.5$.

(2.3.1) con respecto a la distancia longitudinal x se obtiene

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d(\bar{u}^2/2g)}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \tag{2.3.2}$$

El término dH/dx es el cambio de energía en relación a la distancia longitudinal o a la fricción de la pendiente. Se define

$$\frac{dH}{dx} = -S_f \tag{2.3.3}$$

El término dz/dx es el cambio de elevación del fondo del canal con respecto a la distancia o a la pendiente del fondo. Se define

$$\frac{dz}{dx} = -S_0 \tag{2.3.4}$$

Para un gasto dado Q, el término

$$\frac{d(\bar{u}^2/2g)}{dx}$$

se convertirá en

$$\frac{d(\bar{u}^2/2g)}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{Q^2T}{gA^3}\frac{dy}{dx} = -\mathbf{F}^2\frac{dy}{dx} \tag{2.3.5}$$

Substituyendo las ecuaciones (2.3.3) a (2.3.5) en la ecuación (2.3.2) y simplificando, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \mathbf{F}^2} \tag{2.3.6}$$

que describe la variación del tirante del flujo en un canal de forma arbitraria como una función da S_0, S_f, y $\mathbf{F}^2$. En este capítulo, se consideran únicamente soluciones de la ecuación (2.3.6) donde $S_f = 0$ (flujos sin fricción). En el capítulo 6 se examinan soluciones para el caso donde $S_f \neq 0$ serán considerados.

En lo que resta de este capítulo, se buscarán las soluciones de la ecuación (2.3.6) para el caso especial de $S_f = 0$, pero primero se examinará desde un punto de vista cualitativo, el comportamiento del tirante del flujo en respuesta a cambios en la forma de la sección transversal. Para este propósito, supóngase un canal rectangular.

Caso I: canal con ancho constante

En el caso de un canal rectangular con ancho constante, el gasto por unidad de ancho q es constante, y la ecuación (2.3.6) puede cambiarse para obtener

$$(1 - \mathbf{F}^2)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0 \tag{2.3.7}$$

En este momento puede considerarse una serie de subcasos.

1. Si $dz/dx > 0$ y $\mathbf{F} < 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) > 0$ y dy/dx debe ser menor que cero. Por lo tanto, el tirante del flujo se decrementa al incrementarse x.
2. Si $dz/dx > 0$ y $\mathbf{F} > 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) < 0$ y dy/dx debe ser mayor que cero. Por lo tanto, bajo estas condiciones el tirante del flujo se incrementa al incrementarse x.
3. Si $dz/dx < 0$ y $\mathbf{F} < 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) > 0$ y dy/dx debe ser mayor que cero. Por lo tanto, bajo estas condiciones, el tirante del flujo se incrementa al incrementarse x.
4. Si $dz/dx < 0$ y $\mathbf{F} > 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) < 0$ y dy/dx debe ser menor que cero. Bajo estas condiciones, el tirante del flujo se decrementa al incrementarse x.

Cuando $dz/dx = 0$, se presenta un caso muy interesante y común. Bajo esta condición, la ecuación (2.3.7) será

$$(1 - \mathbf{F}^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Entonces, $dy/dx = 0$ o $\mathbf{F}^2 = 1$. Este tipo de situación puede ocurrir tanto en caídas rápidas o en vertederos de cresta ancha. Por observación se sabe que en estas situaciones $dy/dx \neq 0$, y por lo tanto, $\mathbf{F}^2 = 1$. Una sensata aplicación de estos resultados puede dar un efectivo método para medida de flujo. En tal caso, el tirante crítico no ocurre exactamente en la caída libre pero sí ligeramente antes de este punto.

EJEMPLO 2.5

Un vertedor de cresta ancha se coloca en un canal de ancho b. Si el tirante del flujo aguas arriba es y_1 y la carga de velocidad aguas arriba y las pérdidas por fricción pueden ser despreciadas, desarróllese una ecuación teórica para el gasto en términos del tirante del flujo aguas arriba.

Solución

Dada la situación descrita arriba y en la figura 2.6, aplíquese la ecuación de energía de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 o

$$\frac{\overline{u}_1^2}{2g} + y_1 = \frac{\overline{u}_c^2}{2g} + y_c = E_c$$

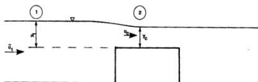


FIGURA 2.6 Vertedor de cresta ancha.

Para un fondo, y un flujo moviéndose relativamente lento en la sección de aguas arriba, $\bar{u}_1^2/2g \ll y_1$, y por tanto

$$y_1 = E_c$$

Entonces por la ecuación (2.2.8)

$$E = \tfrac{3}{2} y_c$$

y

$$y_1 = \tfrac{3}{2} y_c$$

o

$$y_c = \tfrac{2}{3} y_1$$

Reordenando la ecuación (2.2.6) se obtiene

$$y_c^3 = \left(\frac{2}{3}\, y_1\right)^3 = \frac{q^2}{g}$$

o

$$\frac{q^2}{g} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 y_1^3$$

y por lo tanto

$$Q = b\sqrt{g}(\tfrac{2}{3})^{3/2} y_1^{3/2}$$

Para $g = 32.2$ ft/s² (9.8 m/s²)

$$Q = 3.09\; b y_1^{3/2}$$

Una comparación del coeficiente en la ecuación de arriba con coeficientes derivados empíricamente (véase, King y Brater, 1963) para este tipo de vertederos demostró excelente concordancia y confirmó que, cuando las pérdidas de fricción son despreciables y $\bar{u}_1^2/2g \ll y_1$, este tipo de aproximación es válido.

El ejemplo anterior demuestra una importante aplicación práctica de los conceptos de energía específica y tirante crítico; i.e., muchas formas estructurales de medidas de flujo se basan en el flujo que pasa a través del tirante crítico cuando para este tirante de flujo hay una interrelación explícita entre el tirante y el gasto.

Caso II: canal con ancho variable

En este caso, el gasto por unidad de ancho no es constante pero $S_0 = 0$. Se comienza con la ecuación de energía total,

$$H = y + z + \frac{[q(x)]^2}{2gy^2}$$

donde el símbolo $q(x)$ indica que q es una función de x cuando el ancho del canal es una función de x. Entonces

$$\frac{dH}{dx} = 0 = \frac{dy}{dx} + \underset{0}{\frac{dz}{dx}} - \frac{[q(x)]^2}{gy^3}\frac{dy}{dx} + \frac{q(x)}{gy^2}\frac{d[q(x)]}{dx} \tag{2.3.8}$$

Cuando $Q = qb =$ constante

$$\frac{dQ}{dx} = 0 = b\frac{d[q(x)]}{dx} + q(x)\frac{db}{dx}$$

o

$$b\frac{d[q(x)]}{dx} = -q(x)\frac{db}{dx} \tag{2.3.9}$$

Substituyendo la ecuación (2.3.9) en la ecuación (2.3.8) se obtiene

$$(1 - \mathbf{F}^2)\frac{dy}{dx} - \mathbf{F}^2\frac{y}{b}\frac{db}{dx} = 0 \tag{2.3.10}$$

En este momento pueden considerarse cuatro subcasos.

1. Si $db/dx > 0$ y $\mathbf{F} < 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) > 0$ y dy/dx debe ser mayor que cero. En este caso el tirante del flujo se incrementa al incrementarse x.
2. Si $db/dx > 0$ y $\mathbf{F} > 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) < 0$ y dy/dx debe ser menor que cero. En este caso el tirante del flujo disminuye al incrementarse x.
3. Si $db/dx < 0$ y $\mathbf{F} < 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) > 0$ y dy/dx debe ser menor que cero. Bajo estas condiciones, el tirante del flujo disminuye al incrementarse x.
4. Si $db/dx < 0$ y $\mathbf{F} > 1$, entonces $(1 - \mathbf{F}^2) < 0$ y dy/dx debe ser mayor que cero. Bajo estas condiciones, el tirante del flujo se incrementa al incrementarse x.

El análisis anterior ilustra la interrelación entre el gasto q y el tirante y. Entonces, por definición, un control es cualquier característica que determine la relación tirante-gasto. A partir de esta definición, se observa que cualquier característica que actúe como un control del gasto puede calcularse una vez que el tirante del flujo sea conocido. Este factor hace secciones de control atractivas para medidas de flujo, y una sección de control crítica, i.e., una en

la cual el gasto pase con el tirante crítico, es especialmente atractiva desde el punto de vista de medida del flujo. En el capítulo 8 se analiza una colección de dispositivos para medir flujos que operan para producir una sección crítica.

Una aplicación primaria de los conceptos de energía específica es la predicción de cambios en el tirante del flujo en respuesta a transiciones del canal, i.e., cambios en el ancho del canal y/o en la elevación del fondo. En un examen de estos problemas, la accesibilidad de los diversos puntos de la curva *E*-*y* deben ser considerados. Considérese un canal rectangular de ancho constante b al cual llega un gasto permanente por unidad de ancho q. En el fondo del canal horizontal se llega a presentar un cambio de pendiente donde origina un pequeño escalón de altura z (Fig. 2.7*a*). Dada esta situación, se puede construir una curva *E*-*y* (Fig. 2.7*b*). En esta figura, el flujo aguas arriba del paso se representa por un punto A sobre la curva *E*-*y*. El punto A' tiene la misma energía específica que el punto A y la selección entre el punto igualmente correcto A y A' es una función del número de Froude aguas arriba. Si el punto A' es escogido para representar el flujo aguas arriba, entonces este flujo es subcrítico; i.e., $\mathbf{F} < 1$. Cuando q es una constante, el punto que represente el flujo aguas abajo del paso debe también estar sobre la misma curva *E*-*y*. La localización del punto aguas abajo sobre el eje E puede determinarse aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos aguas arriba y aguas abajo o

$$\frac{\overline{u}_1^2}{2g} + y_1 = \frac{\overline{u}_2^2}{2g} + y_2 + \Delta z$$

$$E_2 = E_1 - \Delta z \qquad (2.3.11)$$

donde puede suponerse que la disipación de energía entre estos puntos es despreciable. Una vez determinado matemáticamente el valor de E_2, la ecuación (2.3.11) puede resolverse para determinar los valores correspondientes de y_2. Existen tres valores de y que satisfacen la ecuación (2.3.11). Una de estas soluciones es negativa y no tiene significado físico; sin embargo las dos solu-

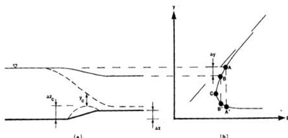


FIGURA 2.7 El problema de accesibilidad.

ciones remanentes, puntos B y B', son soluciones igualmente válidas para el problema. La selección de un punto que sea físicamente correcto es la esencia de la accesibilidad del problema.

De los análisis anteriores de la ecuación de flujo-variado [Ec. (2.3.6)], puede concluirse que cuando $dz/dx > 0$ y $\mathbf{F} < 1$, el tirante del flujo disminuye de los puntos 1 al 2; sin embargo, cuando B y B' representan tirantes del flujo que son menores que y_1, esta conclusión no es útil. La curva E-y en sí misma, proporciona la solución al problema. Cuando el ancho del canal no cambia, q es constante y el "punto de flujo" puede moverse únicamente a lo largo de la curva E-y definida por este valor de q; i.e., el punto de flujo no puede saltar a través del espacio que separa los puntos B y B'. Así, el punto de flujo debe pasar a través del punto C si éste se mueve al punto B'; sin embargo, el movimiento al punto C es posible únicamente si el incremento en la elevación del canal es mayor que el cambio Δz especificado. Esta situación es representada por la línea punteada en la figura 2.7*a*. Así, puede concluirse que para una situación específica sólo el punto B es accesible desde el punto A.

El análisis anterior supone que existe una solución al problema especificado. De hecho es muy fácil especificar un problema que no tenga solución. Por ejemplo, en la figura 2.7*a* y *b* si la altura del paso excede Δz_c, no existe solución. En resumen, los tres valores prescritos, q, E y Δz, no pueden existir al mismo tiempo. Una interpretación física de esta situación es que el área hidráulica ha sido obstruida lo suficiente para que el flujo esté bloqueado. El flujo al acumularse atrás de esta obstrucción, q disminuirá porque el tirante del flujo se incrementa, se establecerá un nuevo flujo permanente sobre la curva E-y a la izquierda de lo que se muestra en la figura 2.7*b*.

Una observación adicional es que cercano a la condición crítica, el punto C en la figura 2.7*b*, tendrá grandes cambios en la superficie del agua que pueden ser afectados por pequeños cambios en el nivel del fondo. Así los flujos que ocurren cercanos al tirante crítico son inherentemente inestables y podrán evitarse.

2.4 APLICACIÓN PRÁCTICA DEL PRINCIPIO DE ENERGÍA

Problema de transición

La aplicación principal del principio de energía, en la práctica, es la solución de problemas de transición en canales. En general, la solución de estos problemas puede efectuarse por métodos algebraicos o gráficos. Los siguientes ejemplos ilustran las técnicas básicas de solución.

EJEMPLO 2.6

Un canal rectangular se extiende suavemente desde un ancho de 1.5 m (4.9 ft) a 3.0 m (9.8 ft). Aguas arriba de la expansión el tirante del

flujo es de 1.5 m (4.9 ft) y la velocidad del flujo es de 2.0 m/s (6.6 ft/s). Estímese el tirante del flujo después de la expansión.

Solución algebraica

Cuando no hay cambio en la elevación del fondo del canal, la energía específica E_1 aguas arriba es igual a la energía específica E_2 aguas abajo, o

$$E_1 = E_2$$

donde $$E_1 = y_1 + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} = 1.5 + \frac{4}{2(9.8)} = 1.7 \text{ m (5.6 ft)}$$

La velocidad en la estación que se encuentra aguas abajo es

$$\overline{u}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{2(1.5)(1.5)}{3y_2} = \frac{1.5}{y_2}$$

y por lo tanto

$$E_2 = y_2 + \frac{\overline{u}_2^2}{2g} = y_2 + \frac{0.11}{y_2^2} = 1.7 \text{ m (5.6 ft)}$$

o $$y_2^3 - 1.7y_2^2 + 0.11 = 0$$

Al solucionar esta ecuación se obtiene

$$y_2 = \begin{cases} 1.6 \text{ m (5.2 ft)} \\ 0.28 \text{ m (0.92 ft)} \end{cases}$$

Una consideración de los conceptos de accesibilidad indican que sólo el tirante subcrítico del flujo es físicamente posible, y por lo tanto la respuesta correcta es

$$y_2 = 1.6 \text{ m (5.2 ft)}$$

Solución gráfica

La solución gráfica de este problema requiere que se construya una curva apropiada E-y para la estación que se encuentra aguas abajo. La ecuación fundamental para esta curva es

$$E_2 = y_2 + \frac{0.11}{y_2^2}$$

Una gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 2.8. A partir de esta gráfica pueden encontrarse los valores de y correspondientes a $E_2 = 1.7$ m (5.6 ft)

$$y_2 = \begin{cases} 1.6 \text{ m (5.2 ft)} \\ 0.28 \text{ m (0.92 ft)} \end{cases}$$

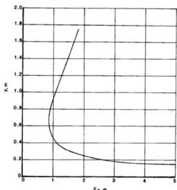


FIGURA 2.8 Solución gráfica del ejemplo 2.6.

Nuevamente, un examen del problema demuestra que el tirante supercrítico del flujo, i.e., $y_2 = 0.28$ m (0.92 ft), no es accesible y así $y_2 =$ 1.6 m (5.2 ft).

Aunque, los métodos anteriores proporcionan respuestas satisfactorias, ellos requieren de la solución de una ecuación cúbica o la construcción de una curva E-y para cada problema. Para canales rectangulares, las dificultades computacionales pueden superarse construyendo una curva adimensional E-y. Dividiendo ambos lados de la ecuación de la energía específica por el tirante crítico,

$$\frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{q^2}{2gy^2y_c} \tag{2.4.1}$$

Definiendo $E' = E/y_c$ y $y' = y/y_c$ y substituyendo la ecuación (2.2.6) en la ecuación (2.4.1) se obtiene

$$E' = y' + \frac{1}{2(y')^2} \tag{2.4.2}$$

que es una ecuación adimensional de la energía específica. En la figura 2.9, se muestra la ecuación (2.4.2) una gráfica de donde puede observarse que el punto crítico ocurre en las coordenadas (1.5.1.0). En la práctica, esta gráfica no puede leerse con la suficiente precisión; por esta razón, Babcock (1959) redujo la gráfica adimensional E-y a una forma tabular (Tabla 2.2). Todos los problemas de transición que ocurren en canales rectangulares pueden resolverse eficientemente utilizando tanto la figura 2.9 o la tabla 2.2.

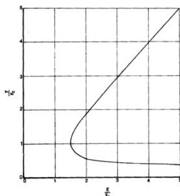


FIGURA 2.9 Curva adimensional E-y.

TABLA 2.2 $E' = E/E_c$ **como una función de** $y' = y/y_c$ **(Babcock, 1959)**

	E' como una función de y'									
y'	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0		5000	1250	555.6	312.5	200.1	138.9	102.1	78.21	61.82
0.1	50.10	41.43	34.84	29.71	25.65	22.37	19.69	17.47	15.61	14.04
0.2	12.70	11.55	10.55	9.682	8.920	8.250	7.656	7.129	6.658	6.235
0.3	5.856	5.513	5.203	4.921	4.665	4.432	4.218	4.022	3.843	3.677
0.4	3.525	3.384	3.254	3.134	3.023	2.919	2.823	2.734	2.650	2.572
0.5	2.500	2.432	2.369	2.310	2.255	2.203	2.154	2.109	2.066	2.026
0.6	1.989	1.954	1.921	1.890	1.861	1.833	1.808	1.784	1.761	1.740
0.7	1.720	1.702	1.684	1.668	1.653	1.639	1.626	1.613	1.602	1.591
0.8	1.581	1.572	1.564	1.556	1.549	1.542	1.536	1.531	1.526	1.521
0.9	1.517	1.514	1.511	1.508	1.506	1.504	1.502	1.501	1.501	1.500
1.0	1.500	1.500	1.501	1.501	1.502	1.504	1.505	1.507	1.509	1.511
1.1	1.513	1.516	1.519	1.522	1.525	1.528	1.532	1.535	1.539	1.543
1.2	1.547	1.552	1.556	1.560	1.565	1.570	1.575	1.580	1.585	1.590
1.3	1.596	1.601	1.607	1.613	1.618	1.624	1.630	1.636	1.642	1.649
1.4	1.655	1.662	1.668	1.674	1.681	1.688	1.695	1.701	1.708	1.715
1.5	1.722	1.729	1.736	1.744	1.751	1.758	1.766	1.773	1.780	1.788
1.6	1.795	1.803	1.810	1.818	1.826	1.834	1.841	1.849	1.857	1.865
1.7	1.873	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.930	1.938	1.946
1.8	1.954	1.963	1.971	1.979	1.988	1.996	2.004	2.013	2.022	2.030
1.9	2.038	2.047	2.056	2.064	2.073	2.082	2.090	2.099	2.108	2.116

TABLA 2.2 *(Continuación)*

	E' como una función de y'									
y'	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	2.125	2.134	2.142	2.151	2.160	2.169	2.178	2.187	2.196	2.204
2.1	2.213	2.222	2.231	2.241	2.249	2.258	2.267	2.276	2.285	2.294
2.2	2.303	2.312	2.322	2.330	2.340	2.349	2.358	2.367	2.376	2.385
2.3	2.394	2.404	2.413	2.422	2.431	2.440	2.450	2.459	2.468	2.478
2.4	2.487	2.496	2.505	2.515	2.524	2.533	2.543	2.552	2.561	2.571
2.5	2.580	2.589	2.599	2.608	2.618	2.627	2.636	2.646	2.655	2.665
2.6	2.674	2.683	2.693	2.702	2.712	2.721	2.731	2.740	2.750	2.759
2.7	2.769	2.778	2.788	2.797	2.807	2.816	2.826	2.835	2.845	2.854
2.8	2.864	2.873	2.883	2.892	2.902	2.912	2.921	2.931	2.940	2.950
2.9	2.960	2.969	2.979	2.988	2.998	3.008	3.017	3.027	3.036	3.046
3.0	3.056	3.064	3.075	3.084	3.094	3.104	3.113	3.123	3.133	3.142
3.1	3.152	3.162	3.171	3.181	3.191	3.200	3.210	3.220	3.229	3.239
3.2	3.249	3.258	3.268	3.278	3.288	3.297	3.307	3.317	3.326	3.336
3.3	3.346	3.356	3.365	3.375	3.385	3.395	3.404	3.414	3.424	3.434
3.4	3.443	3.453	3.463	3.472	3.482	3.492	3.502	3.512	3.521	3.531
3.5	3.541	3.551	3.560	3.570	3.580	3.590	3.600	3.609	3.619	3.629
3.6	3.639	3.648	3.658	3.668	3.678	3.688	3.697	3.707	3.717	3.727
3.7	3.737	3.746	3.756	3.766	3.776	3.786	3.795	3.805	3.815	3.825
3.8	3.835	3.844	3.854	3.864	3.874	3.884	3.894	3.903	3.913	3.923
3.9	3.933	3.943	3.953	3.962	3.972	3.982	3.992	4.002	4.012	4.021
4.0	4.031	4.041	4.051	4.061	4.071	4.080	4.090	4.100	4.110	4.120
4.1	4.130	4.140	4.150	4.159	4.169	4.179	4.189	4.199	4.209	4.218
4.2	4.228	4.238	4.248	4.258	4.268	4.278	4.288	4.297	4.307	4.317
4.3	4.327	4.337	4.347	4.357	4.366	4.376	4.386	4.396	4.406	4.416
4.4	4.426	4.436	4.446	4.456	4.465	4.475	4.485	4.495	4.505	4.515
4.5	4.525	4.535	4.544	4.554	4.564	4.574	4.584	4.594	4.604	4.614
4.6	4.624	4.634	4.643	4.653	4.663	4.673	4.683	4.693	4.703	4.713
4.7	4.723	4.732	4.742	4.752	4.762	4.772	4.782	4.792	4.802	4.812
4.8	4.822	4.832	4.842	4.851	4.861	4.871	4.881	4.891	4.901	4.911
4.9	4.921	4.931	4.941	4.951	4.960	4.970	4.980	4.990	5.000	5.010

EJEMPLO 2.7

El agua fluye en un canal rectangular con un ancho de 10 ft (3.0 m) y con una velocidad de 10 ft/s (3.0 m/s) y con un tirante de 10 ft (3.0 m). Hay un escalón de 2.0 ft (0.61 m) agua arriba. ¿Qué expansión debe colocarse simultáneamente a lo ancho, para que este flujo sea posible?

Solución

Primero, examínese el flujo aguas arriba y el escalón sin considerar la expansión. A partir de la exposición del problema, pueden calcular-

se las siguientes cantidades:

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{10(10)(10)}{10} = 100 \text{ (ft}^3\text{/s)/ft [9.3 (m}^3\text{/s)/m]}$$

$$y_c = \left(\frac{q_c^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{100^2}{32.2}\right)^{1/3} = 6.76 \text{ ft (2.1 m)}$$

$$E_1 = y_1 + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} = 10 + \frac{10^2}{2(32.2)} = 11.6 \text{ ft (3.5 m)}$$

y

$$E_1' = \frac{E_1}{y_c} = \frac{11.6}{6.76} = 1.72$$

La energía específica adimensional aguas abajo, considerando únicamente el escalón puede ser

$$E_2' = E_1' - \frac{\Delta z}{y_c} = 1.72 - \frac{2}{6.76} = 1.42$$

A partir de la figura 2.9 puede determinarse que sin una expansión no es posible especificar el flujo ya que la energía específica adimensional no corresponde a los valores que se tienen en la curva E'-y'. Si el flujo aguas abajo ocurre en el tirante crítico, entonces la expansión requerida es un mínimo. La condición aguas abajo será entonces

$$E_2' = 1.5 = \frac{E_2}{y_{c2}}$$

o

$$y_{c2} = \frac{E_2}{1.5}$$

donde $E_2 = E_1 - \Delta z = 9.55$ y y_{c2} = tirante crítico aguas abajo. Entonces

$$y_{c2} = \frac{9.55}{1.5} = 6.37 \text{ ft (1.9 m)}$$

y

$$q = \sqrt{g y_{c2}^3} = 91.1 \text{ (ft}^3\text{/s)/ft [8.5 (m}^3\text{/s)/m]}$$

Por lo tanto, el ancho aguas abajo es

$$b = \frac{Q}{q} = \frac{1000}{91.1} = 11 \text{ ft (3.4 m)}$$

o la mínima expansión requerida es (11 − 10) = 1.0 ft (0.30 m).

En el material anterior, únicamente se trató el caso específico de transiciones en canales rectangulares. Es necesario desarrollar una metodología equi-

valente para formas no rectangulares. Para un canal de forma arbitraria

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{2.4.3}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por y_c,

$$\frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{Q^2}{2gA^2 y_c} \tag{2.4.4}$$

De la ecuación (2.2.3)

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} = \frac{y_c^3 (T_c')^3}{T_c} \tag{2.4.5}$$

Donde A_c y T_c = área hidráulica y el ancho superficial del canal, respectivamente, cuando el tirante del flujo es y_c y T_c' = ancho superficial de un canal rectangular equivalente, i.e., tiene el mismo tirante y área hidráulica de un canal no rectangular para el mismo tirante crítico del flujo (Fig. 2.10)

Combinando las ecuaciones (2.4.4.) y (2.4.5) se obtendrá

$$\frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{y_c}{y}\right)^2 \left[\frac{(T_c')^3}{T_c (T')^2}\right] \tag{2.4.6}$$

Para un canal rectangular, esto es, $T_c' = T_c = T' = b$, la ecuación (2.4.6) se reduce a la ecuación (2.4.2). El término que se encuentra entre corchetes en la ecuación (2.4.6) es esencialmente un factor de forma, y Silvester (1961) demostró que para canales trapeciales, triangulares y parabólicos este factor puede evaluarse fácilmente. En un canal trapecial

$$T = b + 2zy$$

y

$$T' = b + zy$$

Un canal triangular es un caso especial de un canal trapecial, con $b = 0$. Para un canal parabólico con $T = a\sqrt{y}$ donde a es un coeficiente, el factor de forma

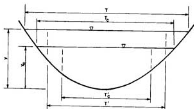


FIGURA 2.10 Definición de las variables para la energía específica en canales no rectangulares.

es $\frac{2}{3}y_c/y$. El uso de esta técnica se puede ilustrar mejor con un ejemplo que involucre un canal trapecial.

EJEMPLO 2.8

Un canal trapecial con $b = 20$ ft (6.1 m) y $z = 2$ produce un gasto de 4000 ft³/s (110 m³/s) a un tirante de 12 ft (3.7 m). Si un puente se apoya sobre el canal en dos pilas de 3.0 ft de ancho (0.91 m), determínese el tirante del flujo abajo del puente (Fig. 2.11)

Solución

De la tabla 2.1 para la sección del puente que se encuentra aguas arriba

$$y_c = 0.81\left(\frac{Q^2/32.2}{z^{0.75}b^{1.25}}\right)^{0.27} - \frac{b}{30z} = 8.5 \text{ ft (2.6 m)}$$

Con

$$\frac{Q}{b^{2.5}} = 2.2$$

Entonces

$$T_c' = b + zy_c = 20 + 2(8.5) = 37 \text{ ft (11 m)}$$

$$T_c = b + 2zy_c = 20 + 2(2)(8.5) = 54 \text{ ft (16 m)}$$

$$T' = b + zy = 20 + 2(12) = 44 \text{ ft (13 m)}$$

El factor de forma es

$$\left[\frac{(T_c')^3}{T_c(T')^2}\right] = \left[\frac{(37)^3}{54(44)^2}\right] = 0.48$$

y

$$\frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{y_c}{y}\right)^2\left[\frac{(T_c')^3}{T_c(T')^2}\right] = \frac{12}{8.5} + \frac{1}{2}\left(\frac{8.5}{12}\right)^2(0.48) = 1.5$$

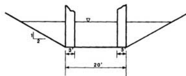


FIGURA 2.11 Esquema para el ejemplo 2.8.

La sección del canal abajo del puente puede aproximarse a un canal trapecial con $b = 14$ ft (4.3 m). En este caso

$$\frac{Q}{b^{2.5}} = 5.4$$

y, por lo tanto las ecuaciones en la tabla 2.1 no pueden ser usadas para estimar y_c.

El factor de sección es

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{g}} = \frac{4000}{\sqrt{32.2}} = 705$$

y

$$\frac{Z}{b^{2.5}} = \frac{705}{14^{2.5}} = 0.96$$

De la figura 2.4

$$\frac{y_c}{b} = 0.66$$

$$y_c = 9.2 \text{ ft } (2.8 \text{ m})$$

Entonces

$$T_c' = b + zy_c = 14 + 2(9.2) = 32.4 \text{ ft } (9.9 \text{ m})$$

$$T_c = b + 2zy_c = 14 + 2(2)(9.2) = 50.8 \text{ ft } (15 \text{ m})$$

$$T' = b + zy = 14 + 2(12) = 38 \text{ ft } (12 \text{ m})$$

donde el cálculo de T' está basado sobre un estimado del tirante del flujo en el puente para evitar una solución implícita. Esta suposición será rectificada subsecuentemente. El factor de forma es

$$\left[\frac{(T_c')^3}{T_c(T')^2}\right] = \left[\frac{(32.4)^3}{50.8(38)^2}\right] = 0.46$$

Asumiendo que no existe pérdida de energía cuando el flujo pasa a través de la contracción formada por las pilas del puente, la energía específica adimensional en el puente es

$$\frac{E_2}{y_{c2}} = E_1'\left(\frac{y_{c1}}{y_{c2}}\right) = 1.5\left(\frac{8.5}{9.2}\right) = 1.39$$

Entonces

$$\frac{E_2}{y_{c2}} = \frac{y_2}{y_{c2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{y_{c2}}{y_2}\right)^2 (0.46) = 1.39$$

Esta ecuación debe ser solucionada para y_2/y_{c2} por tanteos o por algún otro método. Por tanteos, la solución es

$$\frac{y_2}{y_{c2}} = 1.24$$

$$y_2 = 9.2(1.24) = 11.4 \text{ ft } (3.5 \text{ m})$$

Entonces verificando el cálculo aproximado para T' previamente establecido,

$$T' = 14 + 2(11.4) = 36.8 \text{ ft } (11 \text{ m})$$

y el efecto de esta corrección sobre el factor de forma

$$\left[\frac{(T_c')^3}{T_c(T')^2}\right] = \left[\frac{(32.4)^3}{50.8(36.8)^2}\right] = 0.49$$

que es una modificación despreciable.

Energía específica en canales de sección compuesta

A través de este capítulo, el uso del factor de corrección de energía cinética ha sido indicado para contabilizar la no uniformidad de la distribución de velocidades en el flujo de canales abiertos. Recordemos la ecuación (2.1.3) que define la energía específica en un canal unidimensional;

$$E = y + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2}$$

donde, a partir de la ecuación (1.3.41), α es

$$\alpha = \frac{\iint_A u^3 \, dA}{\bar{u}^3 A}$$

α será especialmente significativa en canales de sección compuesta. Tradicionalmente (Chow, 1959 y Henderson, 1966) han calculado este factor como

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} (K_i^3/A_i^2)}{K^3/A^3} \tag{2.4.7}$$

donde K_i = Conducción de la i-ésima subsección del canal
A_i = Área de la i-ésima subsección del canal
K = Conducción de la sección total
A = Área total de la sección transversal
N = Número de subsecciones en la sección dada

Como se estudiará en el capítulo 5, la conducción de la subsección es calculada por la ecuación de Manning como

$$K_i = \frac{\phi}{n_i} A_i R_i^{2/3} \tag{2.4.8}$$

donde n_i = coeficiente de resistencia o rugosidad de Manning para la i-ésima subsección

ϕ = factor de corrección para el sistema de unidades utilizado (ϕ = 1.49 para unidades inglesas y ϕ = 1 para unidades SI)
R_i = radio hidráulico de la i-ésima subsección

El desarrollo de la ecuación (2.4.7) está basado en dos suposiciones: 1) El canal puede ser dividido en dos subsecciones para localizar apropiadamente líneas verticales que sean consideradas como líneas de esfuerzo cortante igual a cero y que no contribuya el perímetro mojado de la subsección, y 2) La contribución de la no uniformidad de la distribución de velocidades dentro de cada subsección es despreciable en comparación con la variación en la velocidad promedio entre las subsecciones. En efecto, ambas suposiciones son falsas. Por ejemplo, Myers (1978) y Rajaratnam y Ahmadi (1979) han presentado datos de laboratorio demostrando transferencia significativa de cantidad de movimiento entre subsecciones de canales, y Blalock (1980) ha mostrado la importancia tanto teórica como experimental de la no uniformidad de la velocidad dentro de una subsección. Las implicaciones de estos resultados en canales de sección compuesta son cruciales tanto en el cálculo de la energía específica como en los perfiles de flujo gradualmente variado.

El comportamiento de las curvas E-y y el número de Froude en un canal de sección compuesta puede ser examinado más fácilmente si consideramos que una sección transversal idealizada (Fig. 2.12*a*) que conduce un gasto de 5000 ft^3/s (140 m^3/s). Este canal tiene las mismas dimensiones que las utilizadas por Blalock (1980) en su trabajo original sobre este tópico y similares a las usadas por Petryk y Grant (1975). Si la curva E-y para esta situación es graficada, la curva resultante tiene dos puntos en los que la energía específica tiene un valor mínimo local (Fig. 2.12*b*). El punto 1 es un valor mínimo para el flujo que ocurre únicamente en el canal principal, y el punto 2 es un valor mínimo para el flujo que ocurre en la sección compuesta del canal. El valor del número de Froude a estos mínimos deberán ser 1; sin embargo, una gráfica del tirante de flujo contra el número de Froude definido por la ecuación (2.2.3) o este valor modificado por α [Ec. (2.2.5)] dará valores erróneos del tirante del flujo correspondiente a los mínimos (Fig. 2.12*c*).

Blalock (1980) y Blalock y Sturm (1981) desarrollaron un número de Froude para sección compuesta $\mathbf{F}_B$, que localiza correctamente los puntos de energía específica mínima. Si el factor de corrección de energía cinética se asume que sea una función del tirante, entonces diferenciando la ecuación (2.1.3) con respecto al tirante del flujo, se obtiene

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} + \frac{Q^2}{2gA^2}\frac{d\alpha}{dy}$$

e igualando esta ecuación a cero,

$$\frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} - \frac{Q^2}{2gA^2}\frac{d\alpha}{dy} = 1 \qquad (2.4.9)$$

Entonces, el número de Froude para la sección compuesta es

$$\mathbf{F}_B = \left(\frac{\alpha Q^2 T}{g A^3} - \frac{Q^2}{2gA^2} \frac{d\alpha}{dy} \right)^{1/2} \tag{2.4.10}$$

y $\mathbf{F}_B$ tiene un valor de 1 en los tirantes del flujo en que ocurra la energía específica mínima (Fig. 2.12c). En la ecuación (2.4.10) el único parámetro que no está determinado en forma rutinaria es $d\alpha/dy$. Blalock (1980) y Blalock y Sturm (1981) demostraron que

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{A^2 \sigma_1}{K^3} + \sigma_2 \left(\frac{2AT}{K^3} - \frac{A^2 \sigma_3}{K^4} \right) \tag{2.4.11}$$

donde

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{K_i}{A_i} \right)^3 \left(3T_i - 2R_i \frac{dP_i}{dy} \right) \right]$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{K_i^3}{A_i^2} \right)$$

y

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{K_i}{A_i} \right) \left(5T_i - 2R_i \frac{dP_i}{dy} \right) \right]$$

En estas ecuaciones, T_i = ancho superficial de la i-ésima subsección, R_i = radio hidráulico de la i-ésima subsección, dP_i/dy = cambio del perímetro mojado de la i-ésima subsección con respecto al tirante del flujo, y N = número de subsecciones. Substituyendo la ecuación (2.4.11) en la ecuación (2.4.10) se obtendrá

$$\mathbf{F}_B = \left[\frac{Q^2}{2gK^3} \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right) \right]^{1/2} \tag{2.4.12}$$

En una forma análoga, Konemann (1982) desarrolló la siguiente ecuación para el número de Froude en un canal de sección compuesta:

$$\mathbf{F}_K = \left[\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{3B\, dM - M\, dB}{M^4} \right) \right]^{1/2} \tag{2.4.13}$$

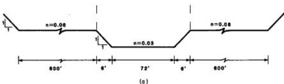
donde

$$B = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{n_i} R_i^{2/3} \right)^3 A_i \right]$$

$$dB = 3 \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{n_i} R_i^{2/3} \right)^3 T_i \right]$$

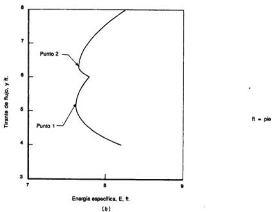
$$M = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{n_i} R_i^{2/3} \right) A_i \right]$$

$$dM = \frac{5}{3} \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{n_i} R_i^{2/3} \right) T_i \right]$$



n=0.08
n=0.03
n=0.08
1
1
600'
6'
72'
6'
600'

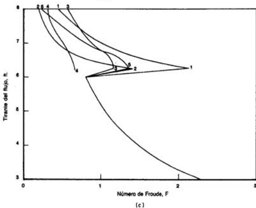
(a)



Punto 2
Punto 1
Tirante de flujo, y ft.
Energía específica, E, ft.

(b)

ft = pie



Tirante del flujo, ft.
Número de Froude, F

(c)

y n_i = coeficiente de resistencia o rugosidad de Manning, asociado con la i-ésima subsección. Las ecuaciones (2.4.12) y (2.4.13) darán resultados casi siempre idénticos; por lo tanto la ecuación (2.4.13) es más simple de trabajar desde un punto de vista computacional.

Un cuarto método para calcular el número de Froude para una sección compuesta fue dado por Shearman (1976). Si la distribución de gasto entre las subsecciones se asume que sea proporcional a la conducción, entonces el índice del número de Froude está dado por

$$\mathbf{F}_I = \frac{K_M}{KA_M} \frac{Q}{\sqrt{g(A_M/T_M)}} \tag{2.4.14}$$

donde el subíndice M se refiere a variables cuyos valores son calculados en la subsección con la mayor conducción. Los resultados de este tipo de análisis son también resumidos en la figura 2.12b.

En general, los métodos de Blalock (1980), Blalock y Sturm (1981), y Konemann (1982) producen, la mejor representación de la variación del número de Froude con respecto al tirante de un canal de sección compuesta.

Curva 1 $\mathbf{F} = \left[\frac{\alpha\, Q^2\, T}{g\, A^3}\right]^{1/2}$

Curva 2 $\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{Q}^2\, \mathbf{T}}{\mathbf{g}\, \mathbf{A}^3}\right)^{1/2}$

Curva 3 $\mathbf{F} = \left[\frac{Q^2}{2g\, K^3}\left(\frac{\sigma_2\, \sigma_3}{K} - \sigma_1\right)\right]^{1/2}$

Curva 4 $\mathbf{F} = \frac{K_M}{K\, A_M} \frac{Q}{(g\, A_M/T_M)^{1/2}}$

Curva 5 $\mathbf{F} = \left[\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{3\, B\, dM - M\, dB}{N^4}\right)\right]^{1/2}$

FIGURA 2.12 (a) Cálculo de la energía específica en el canal de sección compuesta. (b) La energía específica como una sección del tirante. (c) Número de Froude como una función del tirante.

BIBLIOGRAFÍA

Babcock, H. A., "Tabular Solution of Open Channel Flow Equations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 85, no. HY3, March 1959, pp. 17–23.

Blalock, M. E., III, "Minimum Specific Energy in Open Channels of Compound Section," thesis presented to the Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering, June 1980.

Blalock, M. E., and Sturm, T. W., "Minimum Specific Energy in Compound Open Channel," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 107, no. HY6, June 1981, pp. 699–717.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, The Macmillan Company, New York, 1966.

King, H. W., and Brater, E. F., *Handbook of Hydraulics*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963, pp. 5.1–5.51.

Konemann, N., Discussion of "Minimum Specific Energy in Compound Open Channel," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 108, no. HY3, March 1982, pp. 462–464.

Myers, W. R. C., "Momentum Transfer in a Compound Channel," *International Association of Hydraulic Research, Journal of Hydraulic Research*, vol. 16, no. 2, 1978, pp. 139–150.

Petryk, S., and Grant, E. U., "Critical Flow in Rivers with Flood Plains," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 101, no. HY7, July 1975, pp. 933–946.

Rajaratnam, N., and Ahmadi, R. M., "Interaction between Main Channel and Flood-Plain Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 105, no. HY5, May 1979, pp. 573–588.

Shearman, J. O., "Computer Applications of Step-Backwater and Floodway Analyses," *Open-File Report 76-499*, U.S. Geological Survey, Washington, D.C., 1976.

Silvester, R., "Specific-Energy and Force Equations in Open-Channel Flow," *Water Power*, March 1961.

Straub, W. O., Personal Communication, Civil Engineering Associate, Department of Water and Power, City of Los Angeles, Jan. 13, 1982.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

TRES

Principio de cantidad de movimiento

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo se considera la aplicación de la ley de conservación de la cantidad de movimiento en el flujo de canales abiertos. La sección 3.1 define la cantidad de movimiento específico. En la sección 3.2 se discuten la ocurrencia y característica de los saltos hidráulicos en canales rectangulares y no rectangulares; entre las características consideradas se encuentran: las pérdidas de energía ocasionadas por un salto hidráulico y la longitud del salto hidráulico. Los tipos de saltos que se analizan incluyen saltos libres, saltos sumergidos y saltos que ocurren en canales que tienen una pendiente importante. En la sección 3.3 se estudia la ocurencia y características de saltos hidráulicos internos.

3.1 DEFINICIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO ESPECÍFICO

Cuando se examina la aplicación de la segunda ley de movimiento de Newton en los problemas básicos de flujo permanente en canales abiertos, es conveniente comenzar con el caso de un problema general, como se muestra esquemáticamente en la figura 3.1. Dentro del volumen de control definido en esta figura, hay una pérdida desconocida de energía y/o una fuerza actuante sobre el flujo entre las secciones 1 y 2; el resultado es un cambio en la cantidad de movimiento lineal del flujo. En muchos casos, este cambio en la cantidad de movimiento se asocia con un cambio en el tirante del flujo. La aplicación de la segunda ley de Newton -en una forma unidimensional- para este volumen de control es

$$F_1' + F_3' - F_2' - \Sigma f_f' - P'_f = \frac{\gamma}{g} Q(\beta_2 \overline{u}_2' - \beta_1 \overline{u}_1') \tag{3.1.1}$$

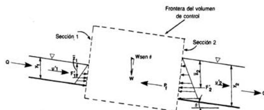


FIGURA 3.1 Definición esquemática para la cantidad de movimiento específico o momentum.

donde F'_1 y F'_2 = componentes horizontales de la presión que actúan en las secciones 1 y 2, respectivamente
F'_3 = componente horizontal de W sen θ
W = peso del fluido entre las secciones 1 y 2
γ = peso específico del fluido
θ = ángulo de la pendiente del canal
$\Sigma f'_f$ = sumatoria de las componentes horizontales de las velocidades promedio del flujo en las secciones 1 y 2, respectivamente
P'_f = componente horizontal de la fuerza desconocida que actúa entre las secciones 1 y 2
β_1 y β_2 = coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento

Si se supone que, primero, θ es pequeña y por tanto sen $\theta = 0$ y cos $\theta = 1$; segundo, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, y tercero, $\Sigma f'_f = 0$, la ecuación (3.1.1) será

$$\gamma \bar{z}_1 A_1 - \gamma \bar{z}_2 A_2 - P_f = \frac{\gamma}{g} Q(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \quad (3.1.2)$$

donde $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$ = distancias a los centroides de las respectivas áreas hidráulicas A_1 y A_2 desde la superficie libre

$$F_1 = \gamma \bar{z}_1 A_1$$

$$F_2 = \gamma \bar{z}_2 A_2$$

Al sustituir $\bar{u}_1 = Q/A_1$ y $\bar{u}_2 = Q/A_2$ en la ecuación (3.1.2) y, después reagrupar, se obtiene

$$\frac{P_f}{\gamma} = \left(\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1\right) - \left(\frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2\right) \quad (3.1.3)$$

o

$$\frac{P_f}{\gamma} = M_1 - M_2 \quad (3.1.4)$$

donde

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{z}A \quad (3.1.5)$$

y M se conoce como la función "momentum"* o fuerza específica

Cuando se grafica el tirante del flujo y contra M se produce una curva de momentum que tiene dos ramas (Fig. 3.2). El tramo de abajo AC se aproxima asintóticamente al eje horizontal cuando el tramo superior BC se extiende indefinidamente hacia arriba y a la derecha. Así, en analogía con el concepto de energía específica y para un valor dado de M, la curva M-y determina dos posibles tirantes del flujo. Estos tirantes, que se muestran en la figura 3.2, se denominan los tirantes conjugados o alternos de un salto hidráulico.

* *N. del R. T.*: el término "momentum" se utiliza en español para simplificar el término "cantidad de movimiento específico".

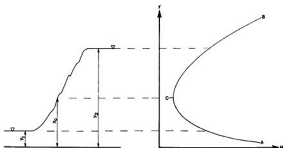


FIGURA 3.2 Curva de momentum y tirantes conjugados y_1 y y_2 de un salto hidráulico.

El valor mínimo de la función momentum puede calcularse si se supone que existe un flujo paralelo y una distribución uniforme de velocidad, al tomar la primera derivada de M con respecto a y y al igualar la expresión a cero o

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dy} + \frac{d(\bar{z}A)}{dy} = 0 \qquad (3.1.6)$$

y

$$-\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dy} + A = 0 \qquad (3.1.7)$$

donde

$$d(\bar{z}A) = \left[A(\bar{z} + dy) + \frac{T(dy)^2}{2}\right] - \bar{z}A \simeq Ady$$

y cuando se asume que $(dy)^2 \simeq 0$. Entonces, si sustituye $dA/dy = T$, $\bar{u} = Q/A$, y $D = A/T$ en la ecuación (3.1.7),

$$\frac{\bar{u}^2}{2g} = \frac{D}{2} \qquad (3.1.8)$$

si se tiene el mismo criterio desarrollado para el valor mínimo de la energía específica. Por tanto, para un gasto específico, el momentum mínimo ocurre con la energía específica mínima y corresponde también al tirante crítico.

3.2. SALTO HIDRÁULICO

Los saltos hidráulicos ocurren cuando hay un conflicto entre los controles que se encuentran aguas arriba y aguas abajo, los cuales influyen en la misma extensión del canal. Por ejemplo, si el control de aguas arriba causa un flujo supercrítico cuando el control aguas abajo dicta un flujo subcrítico, entonces

hay un conflicto que puede resolverse únicamente si existe algún medio por el cual el flujo pase de un régimen a otro. La evidencia experimental sugiere que el cambio del flujo de un régimen supercrítico a uno subcrítico puede ocurrir muy abruptamente mediante un fenómeno conocido como salto hidráulico. El salto hidráulico puede tener lugar ya sea, sobre la superficie libre de un flujo homogéneo o en una interfase de densidad de un flujo estratificado. En cualquiera de los casos, el salto hidráulico va acompañado por una turbulencia importante y una disipación de energía. En el campo del flujo en canales abiertos, el salto hidráulico suele tener muchas aplicaciones, entre las que se incluyen:

1. La disipación de energía en flujos sobre diques, vertedores y otras estructuras hidráulicas.
2. El mantenimiento de altos niveles de agua en canales que se utilizan para propósitos de distribución de agua.
3. Incremento del gasto descargado por una compuerta deslizante al rechazar el retroceso del agua contra la compuerta, esto aumenta la carga efectiva y con ella la descarga.
4. La reducción de la elevada presión bajo las estructuras mediante la elevación del tirante del agua sobre la guarnición de defensa de la estructura.
5. La mezcla de sustancias químicas usadas para la purificación o el tratamiento de agua.
6. La aerificación de flujos y el desclorinado en el tratamiento de agua.
7. La remoción de bolsas de aire con flujo de canales abiertos en canales circulares.
8. La identificación de condiciones especiales de flujo, como la existencia del flujo supercrítico o la presencia de una sección de control para la medición de la razón efectividad-costo del flujo.

Tirantes Conjugados o Alternos

El cálculo del salto hidráulico siempre se inicia con la ecuación (3.1.3). Si el salto ocurre en un canal con un fondo horizontal y $P_f = 0$, esto es, una estructura hidráulica y no ayuda al salto, entonces la ecuación (3.1.4) requiere que

$$M_1 = M_2 \tag{3.2.1}$$

o

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2 \tag{3.2.2}$$

Secciones rectangulares En el caso de un canal rectangular con un ancho b, si se realizan sustituciones: $Q = \bar{u}_1 A_1 = \bar{u}_2 A_2$, $A_1 = by_1$, $A_2 = by_2$, $\bar{z}_1 = \frac{1}{2}y_1$, y $\bar{z}_2 = \frac{1}{2}y_2$ en la ecuación (3.2.2) se obtendrá

$$\frac{q^2}{g}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) = \frac{1}{2}\left(y_2^2 - y_1^2\right) \tag{3.2.3}$$

donde $q = Q/b$ es el gasto por unidad de ancho. La ecuación (3.2.3) tiene las siguientes soluciones

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1) \qquad (3.2.4)$$

y

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2} - 1) \qquad (3.2.5)$$

Las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) contienen, cada una, tres variables independientes y dos de éstas deben conocerse antes de que se pueda estimar el valor de la tercera. Se debe remarcar que el tirante aguas abajo y_2 no es el resultado de las condiciones aguas arriba, sino que es el resultado del control que se tiene aguas abajo; por ejemplo, si el control aguas abajo produce el tirante y_2, entonces se formará un salto.

El uso de las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) para solucionar problemas de salto hidráulico en canales rectangulares es bastante obvio; sin embargo, en el caso de la ecuación (3.2.5) pueden surgir dificultades importantes de cálculo. En esta ecuación, $\mathbf{F}_2^2$ es a menudo pequeño, el término $\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2}$ se aproxima a 1 y, por tanto, el término

$$(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2} - 1)$$

se aproxima a cero. La dificultad se presenta cuando se trata de conservar la precisión en el cálculo, al mismo tiempo que se intenta obtener una diferencia pequeña entre dos números relativamente grandes. Esta dificultad puede evitarse si se expresa el término $\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2}$ como el desarrollo de una serie binomial o

$$\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2} = 1 + 4\mathbf{F}_2^2 - 8\mathbf{F}_2^4 + 32\mathbf{F}_2^6 + \cdots \qquad (3.2.6)$$

Así, al sustituir la ecuación (3.2.6) en la (3.2.5),

$$\frac{y_1}{y_2} = 2\mathbf{F}_2^2 - 4\mathbf{F}_2^4 + 16\mathbf{F}_2^6 + \cdots \qquad (3.2.7)$$

La ecuación 3.2.7 puede utilizarse cuando $\mathbf{F}_2^2$ es muy pequeño; por ejemplo, cuando $\mathbf{F}_2^2 \leq 0.05$.

Secciones no rectangulares En el análisis de saltos hidráulicos en canales prismáticos no rectangulares no hay ecuaciones análogas a las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5). En tales casos, la ecuación (3.2.2) puede resolverse por tanteos, pero también se pueden emplear aproximaciones semiempíricas y otras técnicas analíticas. En este momento es apropiado comentar las varias soluciones semiempíricas y analíticas que la ecuación (3.2.2) proporciona para secciones circulares y otras secciones usuales en canales.

Como se observó en el capítulo 2 -en el caso de canales circulares- una gráfica logarítmica (log-log) de y_c/d contra $(Q\sqrt{\alpha}/\sqrt{g})^{2.5}$ dará una línea recta en el in-

tervalo $0.02 < y_c/d \leq 0.85$ (Fig. 2.4). Mediante un análisis de regresión de esta recta se obtendrá la ecuación

$$y_c = \frac{1.01}{d_0^{0.264}}\left(\frac{Q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}}\right)^{0.506} \tag{3.2.8}$$

donde d_0 = diámetro de la tubería. Se puede notar que la relación y_c/d sólo raras veces excede, en la práctica, a 0.85, cuando es casi imposible mantener el flujo crítico cercano al tope de un canal circular. Así, la ecuación (3.2.8) se aplica a la región de interés general.

Straub (1978) notó que en conductos circulares, el número de Froude $\mathbf{F}_1$ aguas arriba, puede aproximarse mediante

$$\mathbf{F}_1 = \left(\frac{y_c}{y_1}\right)^{1.93} \tag{3.2.9}$$

donde y_1 = tirante del flujo aguas arriba y y_c se estima por la ecuación (3.2.8). Straub (1978) también notó que para $\mathbf{F} < 1.7$ el tirante conjugado y_2 puede estimarse por

$$y_2 = \frac{y_c^2}{y_1} \tag{3.2.10}$$

y para $\mathbf{F} > 1.7$

$$y_2 = \frac{y_c^{1.8}}{y_1^{0.73}} \tag{3.2.11}$$

Estas ecuaciones proveen una base práctica para estimar parámetros de salto hidráulico en un canal de sección circular.

EJEMPLO 3.1

Un gasto de 100 ft³/s (2.8 m³/s) fluye en un canal circular de 6.0 ft (1.8 m) de diámetro. Si el tirante del flujo aguas arriba es de 2.0 ft (0.61 m), determínese el tirante de flujo aguas abajo que provoque un salto hidráulico (Fig. 3.3).

Solución por Tanteos

En la estación aguas arriba (estación 1)

$$A_1 = \tfrac{1}{8}(\theta - \operatorname{sen}\theta)d_0^2 = \tfrac{1}{8}[2.46 - \operatorname{sen}(2.46)](6)^2 \text{ (Tabla 1.1)}$$

$$= 8.25 \text{ ft}^2 \text{ (0.77 m}^2\text{)}$$

$$D_1 = \frac{d_0}{8}\frac{(\theta - \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta/2} = \frac{6}{8}\left(\frac{2.46 - \operatorname{sen}(2.46)}{\operatorname{sen}(1.23)}\right) \text{ (Tabla 1.1)}$$

$$= 1.46 \text{ ft (0.44 m)}$$

$$\overline{u}_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{100}{8.25} = 12.1 \text{ ft/s (3.7 m/s)}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{g\,D_1}} = \frac{12.1}{\sqrt{32.2\,(1.46)}} = 1.76$$

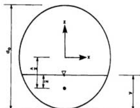


FIGURA 3.3 Conducto circular fluyendo parcialmente lleno.

Para un canal abierto circular parcialmente lleno, la distancia desde la superficie del agua al centroide del área hidráulica debe desarrollarse a partir de principios básicos. Con referencia a la figura 3.3, el área hidráulica está dada por

$$A = 2\int_{r}^{z}\sqrt{r^2 - z^2}\,dz = \left[z\sqrt{r^2 - z^2} + r^2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)\right]_{-r}^{z}$$

o

$$A = \frac{\pi r^2}{2} + z\sqrt{r^2 - z^2} + r^2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

donde r = radio de la sección circular y $r^2 = x^2 + z^2$. La distancia desde el origen del sistema de coordenadas $z - x$ al centroide (la distancia z en la figura 3.3) es por definición

$$\hat{z}A = \int_{-r}^{z} z(2\sqrt{r^2 - z^2})\,dz = -\tfrac{2}{3}(r^2 - z^2)^{3/2}\Big|_{-r}^{z}$$

y

$$\hat{z} = -\frac{2(r^2 - z^2)^{3/2}}{3A}$$

La distancia de la superficie del agua al centroide del área hidráulica es

$$\bar{z} = y - (r + \hat{z})$$

Entonces, para este ejemplo

$$\hat{z}_1 = \frac{-\tfrac{2}{3}[(r^2 - z_1^2)^3]^{1/2}}{A_1} = \frac{-\tfrac{2}{3}\{[3^2 - (-1)^2]^3\}^{1/2}}{8.25} = -1.83 \text{ ft } (0.56 \text{ m})$$

$$\bar{z} = y_1 - (r + \hat{z}_1) = 2 - (3 - 1.83) = 0.83 \text{ ft } (0.25 \text{ m}) \text{ (Fig. 3.3)}$$

$$M_1 = \frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}A_1 = \frac{(100)^2}{32.2(8.25)} + 0.83(8.25) = 44.5 \text{ ft}^3 \text{ } (1.26 \text{ m}^3)$$

En la estación aguas abajo (estación 2)

$$M_2 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2A_2$$

La condición que debe satisfacerse, si un salto hidráulico ocurre entre las estaciones 1 y 2, es

$$M_1 = M_2$$

El valor $\bar{y}_2$, que satisface esta condición, debe obtenerse por tanteos.

Tanteo y_2, ft (m)	$z_2 = y_2 - r$, ft (m)	A_2, ft² (m²)	$\bar{z}_2$, ft (m)	$\bar{y}_2 = y_2 - (r + z_2)$ ft (m)	M_2, ft³ (m³)
3.40 (1.04)	0.40 (0.12)	16.5 (1.53)	−1.06 (−0.32)	1.46 (0.445)	42.9 (1.21)
3.58 (1.09)	0.58 (0.18)	17.6 (1.64)	−0.97 (−0.30)	1.55 (0.472)	44.9 (1.27)
3.65 (1.11)	0.65 (0.20)	18.0 (1.67)	−0.93 (−0.28)	1.58 (0.482)	45.7 (1.29)

Por tanto, la condición para un salto hidráulico es que el tirante aguas abajo debe ser 3.58 ft (1.1 m).

Solución por el Método de Straub

El tirante crítico aguas arriba del flujo estimado para $\alpha = 1$ es

$$y_c = \frac{1.01}{d_0^{0.264}}\left(\frac{Q}{\sqrt{g}}\right)^{0.506} = \frac{1.01}{(6)^{0.264}}\left(\frac{100}{\sqrt{32.2}}\right)^{0.506} = 2.69 \text{ ft } (0.820 \text{ m})$$

Cuando $y_c/d_0 = 0.45$, la aproximación de Straub puede emplearse para estimar $\mathbf{F}_1$ y y_2 o

$$\mathbf{F}_1 = \left(\frac{y_c}{y}\right)^{1.93} = \left(\frac{2.69}{2}\right)^{1.93} = 1.77$$

Entonces para $\mathbf{F}_1 > 1.7$

$$y_2 = \frac{(y_c)^{1.8}}{y^{0.73}} = \frac{(2.69)^{1.8}}{(2)^{0.73}} = 3.58 \text{ ft } (1.09 \text{ m})$$

Para otros canales de sección prismática, como los triangulares, parabólicos y trapeciales, se requiere generalmente una solución gráfica o por tanteos de la ecuación (3.2.2). Silvester (1964, 1965) notó que para cualquier canal prismático, la distancia a los centroides de las áreas hidráulicas z_i puede expresarse como

$$\bar{z}_i = k_i' y_i \qquad (3.2.12)$$

en donde el subíndice i indica la sección, y es el tirante mayor del flujo en la sección especificada y k' = un coeficiente. La ecuación de un salto hidráulico en un canal horizontal es

$$A_1k_1'y_1 - A_2k_2'y_2 = \frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) \tag{3.2.13}$$

Si se reagrupa la ecuación (3.2.13), dará

$$k_2'\frac{A_2}{A_1}\frac{y_2}{y_1} - k_1' = \mathbf{F}_1^2\frac{A_1}{y_1T_1}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \tag{3.2.14}$$

donde el parámetro $\mathbf{F}_1^2$ la definió Silvester (1964) como $\mathbf{F}_1^2 = Q^2/gA_1^2y_1$ y, posteriormente (Silvester, 1965) encontró que $\mathbf{F}_1^2 = Q^2/gA_1^2D_1$ es la definición estándar del número de Froude para canales no rectangulares.

Para canales rectangulares, $k_1' = k_2' = ½$, $A_1/A_2 = y_1/y_2$, y $A_1/T_1 = D_1 = y_1$. Con estas definiciones, la ecuación (3.2.14) será

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - 1 = 2\mathbf{F}_1^2\left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) \tag{3.2.15}$$

Aunque esta ecuación puede reducirse a la ecuación (3.2.4) -con el fin de obtener soluciones gráficas generales de los problemas de tirante conjugado- la ecuación dada arriba es satisfactoria. Para poder realizar comparaciones, la solución de esta ecuación se grafica, junto con las otras soluciones en la figura 3.4.

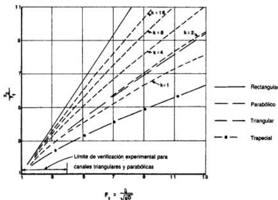


FIGURA 3.4 Curvas analíticas para y_2/y_1, contra $\mathbf{F}_1$.

Para canales triangulares, $k_1' = k_2' = 1/3$, $A_1/A_2 = y_1^2/y_2^2$, y $A_1/T_1 = D_1 = y_1/2$. Con estas definiciones la ecuación (3.2.14) será

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 - 1 = 1.5\mathbf{F}_1^2\left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right] \tag{3.2.16}$$

Para canales parabólicos cuyos parámetros pueden definirse por $y = aT^2/2$, en donde a es una constante, $k_1' = k_2' = 2/5$, $A_1/A_2 = (y_1/y_2)^{1.5}$, y $A_1/T_1 = D_1 = 2y_1/3$. Con estas definiciones, la ecuación (3.2.14) será

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{2.5} - 1 = 1.67\mathbf{F}_1^2\left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{1.5}\right] \tag{3.2.17}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 3.4

Para canales trapeciales, la ecuación (3.2.14) debe resolverse directamente. Silvester (1964) definió un factor de forma

$$k = \frac{b}{zy_1} \tag{3.2.18}$$

donde b = ancho del fondo del trapecio y z = talud del trapecio. Con el uso de este factor de forma, la ecuación (3.2.14) puede resolverse para este tipo de canal, de la cual resulta una familia de curvas de solución (Fig. 3.4).

Silvester (1964, 1965) verificó los resultados teóricos graficados en la figura 3.4 con datos de laboratorio tomados del trabajo de Argyropoulos (1957, 1961, Hsing (1937), Sandover y Holmes (1962) y Press (1961). En los resultados de laboratorio para canales triangulares, el valor de $\mathbf{F}_1$ no excedió a 4, asimismo se notó dispersión de los datos. Para este caso, todos los datos experimentales se agruparon en un canal simple que incluía un ángulo de 47.3 grados, en consecuencia fue más angosto y profundo. Para canales parabólicos, la coincidencia entre los resultados experimentales y de laboratorio resultó generalmente, excelente. También en este caso, el valor de $\mathbf{F}$ nunca excedió a 4. Para los canales trapeciales hubo un favorable grado de dispersión de los datos; aunque Silvester (1964) atribuyó la desviación entre los resultados de laboratorio y los teóricos a varios problemas y limitaciones que se presentaron en la experimentación. En general, las curvas graficadas en la figura 3.4 proveen un adecuado método para estimar el valor de y_2/y_1 si se conoce $\mathbf{F}_1^2$.

EJEMPLO 3.2.

Un gasto de 100 m³/s (3530 ft³/s) se presenta en un canal trapecial con taludes de 2:1 y un ancho en la base de 5 m (16 ft). Si el tirante

del flujo aguas arriba es de 1.0 m (3.3 ft), determínese el tirante del flujo aguas abajo que provoque un salto hidráulico.

Solución

En la estación aguas arriba

$$A_1 = (b + zy_1)y_1 = [5 + 2(1)]1 = 7.0 \text{ m}^2 \ (75 \text{ ft}^2)$$

$$T_1 = b + 2zy_1 = 5 + 2(2)(1) = 9.0 \text{ m} \ (30 \text{ ft})$$

$$D_1 = \frac{A_1}{T_1} = \frac{7.0}{9.0} = 0.78 \text{ m} \ (2.6 \text{ ft})$$

$$\overline{u}_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{100}{7} = 14.3 \text{ m/s} \ (47 \text{ ft/s})$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{gD_1}} = \frac{14.3}{\sqrt{9.8(0.78)}} = 5.2$$

$$k = \frac{b}{zy_1} = \frac{5}{2(1)} = 2.5$$

Entonces, de la figura 3.4 para $\mathbf{F}_1 = 5.2$ y $k = 2.5$

$$\frac{y_2}{y_1} = 4.7$$

$$y_2 = 4.7 \text{ m} \ (15 \text{ ft})$$

Por tanto, la condición para un salto hidráulico es que el tirante aguas abajo, debe ser 4.7 m (15 ft).

Salto sumergido

En la sección anterior, se analizan las metodologías para determinar el tirante aguas abajo que debe prevalecer si se forma un salto hidráulico, cuando se conoce una condición que se especificó en términos supercríticos aguas arriba. Si el tirante aguas abajo es menor que el tirante conjugado y_2, entonces no se formará el salto, por lo que se mantendrá el flujo supercrítico. Si el tirante aguas abajo es mayor que y_2, se formará un salto sumergido (Fig. 3.5). Los saltos sumergidos suelen formarse aguas abajo de compuertas o esclusas en sistemas de irrigación, así que la incógnita crucial en dichas situaciones es el tirante sumergido y_3.

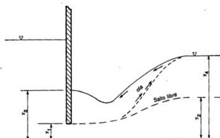


FIGURA 3.5 Definición esquemática para salto sumergido.

Mediante los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de masa Govinda Rao (1963) demostró que en canales rectangulares horizontales

$$\frac{y_3}{y_1} = \left[(1 + S)^2\phi^2 - 2\mathbf{F}_1^2 + \frac{2\mathbf{F}_1^2}{(1 + S)\phi} \right]^{1/2} \tag{3.2.19}$$

donde

$$S = \frac{y_4 - y_2}{y_2} \tag{3.2.20}$$

$$\phi = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1) \tag{3.2.21}$$

y y_2 = tirante conjugado subcrítico del salto libre correspondiente a y_1 y $\mathbf{F}_1$. Govinda Rao verificó la ecuación (3.2.19) con datos obtenidos en numerosos experimentos de laboratorio. Para esta misma situación, Chow (1959) dio la siguiente ecuación:

$$\frac{y_3}{y_4} = \left[1 + 2\mathbf{F}_4^2\left(1 - \frac{y_4}{y_1}\right) \right]^{1/2} \tag{3.2.22}$$

La ecuación (3.2.22) proporciona estimaciones de y_3 que son comparables con las obtenidas a partir de la ecuación (3.2.19)

Pérdida de energía

En muchas aplicaciones la función principal del salto hidráulico es la disipación de energía. En un canal horizontal, el cambio de la energía cercana al salto es

$$\Delta E = E_1 - E_2 \tag{3.2.23}$$

donde ΔE = cambio en la energía de la sección 1 a la 2
E_1 = energía específica en la sección 1
E_2 = energía específica en la sección 2

La pérdida de energía se expresa comúnmente como una pérdida relativa $\Delta E/E_1$ o como una eficiencia E_2/E_1.

Secciones Rectangulares. En el caso de un canal rectangular horizontal, se puede demostrar que

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \tag{3.2.24}$$

que

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{2 - 2(y_2/y_1) + \mathbf{F}_1^2[1 - (y_1/y_2)^2]}{2 + \mathbf{F}_1^2} \tag{3.2.25}$$

y que

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(8\mathbf{F}_1^2 + 1)^{3/2} - 4\mathbf{F}_1^2 + 1}{8\mathbf{F}_1^2(2 + \mathbf{F}_1^2)} \tag{3.2.26}$$

Secciones no Rectangulares. Para otros canales de sección prismática, cualquiera de las ecuaciones generales de energía específica puede resolverse analizando caso por caso, o bien obtenerse una solución gráfica general de esta ecuación. En términos de pérdida de energía relativa, la ecuación general de energía específica es

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{y_1 + (\bar{u}_1^2/2g) - y_2 - (\bar{u}_2^2/2g)}{y_1 + (\bar{u}_1^2/2g)}$$

$$= \frac{y_1 - y_2 + (Q^2/2g)[(1/A_1^2) - (1/A_2^2)]}{y_1 + (Q^2/2gA_1^2)} \tag{3.2.27}$$

Silvester (1964, 1965) reagrupó la ecuación 3.2.27 para obtener

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{2y_1/D_1\,[1 - (y_2/y_1)] + \mathbf{F}_1^2[1 - (A_1/A_2)^2]}{(2y_1/D_1) + \mathbf{F}_1^2} \tag{3.2.28}$$

Los valores de y_2/y_1 para cualquier $\mathbf{F}_1$ especificado, pueden obtenerse de la figura 3.4, los valores del parámetro $[1 - (A_1/A_2)^2]$ de la tabla 3.1, y los valores del tirante hidráulico D, de la tabla 1.1. Con estos valores se puede encontrar una solución gráfica generalizada de la ecuación (3.2.28) véase la figura 3.6. En ésta se grafica la pérdida de energía relativa para un salto hidráulico en un canal rectangular, con el objeto de realizar comparaciones. No obstante que se puede obtener una solución gráfica general para un canal circular de la ecuación (3.2.28), en muchas ocasiones, es más simple resolver para la pérdida de energía, al resolver caso por caso.

Con respecto a la figura 3.6, puede notarse que todas las demás formas de canal darán una mayor pérdida de energía relativa que la que se obtiene en un canal rectangular, para un número específico de Froude. Este resultado

TABLA 3.1 **Formulaciones del término $1-(A_1/A_2)^2$ para usarse en la ecuación (3.2.28)**

Sección prismática del canal	Tirante-formulación dependiente de $1-\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$
Triangular	$1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^4$
Parabólica	$1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3$
Trapecial*	$1-\left(\frac{k+1}{k+\frac{y_2}{y_1}}\right)\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2$

$^*k = \dfrac{b}{zy_1}$

no se espera obtener cuando los canales con taludes proporcionan un grado de circulación secundaria y, por tanto, se incrementa la disipación de energía. Silvester (1965) notó que para un gasto dado, con velocidades aguas arriba y tirantes iguales, el canal triangular suministra la máxima disipación de energía

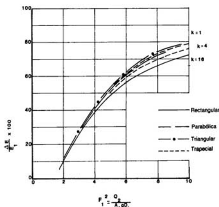


FIGURA 3.6 Pérdida de energía relativa en un salto hidráulico para varias secciones transversales.

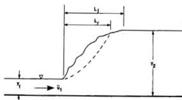


FIGURA 3.7 Definición esquemática del salto y longitud de la ola.

Longitud del Salto Hidráulico

Aunque la longitud de un salto hidráulico es un parámetro crucial en el diseño, en general ésta no puede establecerse de consideraciones teóricas; los resultados de algunas investigaciones experimentales (véase por ejemplo, Bakhmeteff y Matzke, 1936, Bradley y Peterka, 1957a, Peterka, 1963 y Rajaratnam, 1965) han arrojado resultados en cierto sentido contradictorios. En esta sección, la longitud del salto hidráulico L_j se define como la distancia que hay desde la cara frontal del salto hasta un punto inmediato sobre la superficie del flujo aguas abajo de la ola asociada con el salto (Fig. 3.7). En la estimación de esta longitud, deben considerarse los siguientes casos especiales.

Secciones Rectangulares En el caso de un clásico salto hidráulico que ocurre en un canal rectangular horizontal, la distancia L_j suele estimarse a partir de la curva de Bradley y Peterka (1957a) que es una gráfica de $\mathbf{F}_1$ contra L_j/y_2 (Fig. 3.8). Esta curva tiene una sección plana cuando toma los valores de los números de Froude y además proporciona el mejor funcionamiento, asimismo su validez está avalada por los datos de Rajaratnam (1965). Se puede notar que no existen marcadas diferencias entre esta curva y la derivada de los datos de Bakhmeteff y Matzke (1936). Tanto Bradkey y Peterka (1957a) como Chow (1959) atribuyen esta diferencia a los efectos de la escala involucrada en los datos de Bakhmeteff y Matzke (1936); i.e., el modelo utilizado por estos investigadores no reprodujo con exactitud el comportamiento del prototipo.

Los datos para la longitud de la ola L_r dan como resultado tres curvas que son marcadamente diferentes una de otra (Fig. 3.8). A partir de esta figura se puede concluir que L_r es siempre menor que L_j y la curva derivada a partir de los datos de Rajaratnam (1965) se ubica entre las curvas definidas por los datos de Rouse et. al (1959) y por los de Safranez (1934).

Silvester (1964) ha demostrado que para canales rectangulares horizontales la proporción L_j/y_1 es una función del número de Froude supercrítico aguas arriba.

$$\frac{L_j}{y_1} = 9.75(\mathbf{F}_1 - 1)^{1.01} \tag{3.2.29}$$

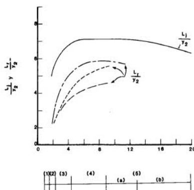


FIGURA 3.8 Longitud del salto hidráulico como función del tirante conjugado y del número de Froude aguas arriba. Leyenda: 1, salto ondular; 2, salto débil (sólo superficie turbulenta); 3, salto oscilante (ondulado); 4, salto permanente (mejor rendimiento) 5, salto fuerte —*a*) rendimiento aceptable, *b*) depósito de solera extensiva y condiciones de superficie rugosa. L_j = longitud del salto; L_r = longitud de la ola *(Bradley y Peterka, 1957a; Rouse et al., 1959; Rajaratnam, 1967; Safranez, 1934.)*

Aunque esta relación funcional se observó en el trabajo original de Bradley y Peterka (1957a), aparentemente no se utilizó ampliamente, ya que era más conveniente la figura 3.8.

Secciones no Rectangulares Silvester (1964) ha propuesto la hipótesis de que existe una relación funcional entre la relación L_j/y_i para canales prismáticos de cualquier forma o

$$\frac{L_j}{y_1} = \sigma(\mathbf{F}_1 - 1)^{\Gamma} \qquad (3.2.30)$$

donde σ y Γ son factores de forma. Aunque las relaciones presentadas en el siguiente material no se han verificado mediante pruebas de laboratorio y de campo extensivas, proveen un método aproximado para estimar L_j para varias formas de canales.

Para canales triangulares, la relación desarrollada por Silvester (1964) es

$$\frac{L_j}{y_1} = 4.26(\mathbf{F}_1 - 1)^{0.695} \qquad (3.2.31)$$

Esta ecuación está basada en datos de un canal simple que incluye un ángulo de 47.3° (Argyropoulos, 1957); probablemente no sea válida en canales triangulares cuyos taludes sean fuertes o suaves.

Para canales parabólicos, el análisis de Silvester de los datos de Argyropoulos (1957) dio

$$\frac{L_j}{y_1} = 11.7(\mathbf{F}_1 - 1)^{0.832} \tag{3.2.32}$$

Esta ecuación proporciona un deficiente ajuste de los datos disponibles cuando $\mathbf{F}_1$ excede de 3.

Para el caso de secciones trapeciales, Silvester, e.g., Hsing (1937), Sandover y Holmes (1962), y Press (1961), proporcionaron conjuntos de datos distintos. En una sección anterior de este capítulo, se demostró que para canales trapeciales la relación y_2/y_1 depende no únicamente de $\mathbf{F}_1$, sino también del factor de forma k. Así, puede esperarse que para cada valor de k exista un conjunto único de valores ϕ y Γ. En el caso de los datos de Press (1961), esto fue verdadero y los resultados para este conjunto de datos se resumen en la tabla 3.2. En el caso de los datos de Hsing (1937), los valores de ϕ no tienen un efecto aparente, asimismo todo parece sugerir que el valor de z afecta a estos datos. Los datos de Hsing muestran variaciones en el valor de $\mathbf{F}_1$ para valores constantes de L_j, lo cual fue, probablemente, el resultado de dificultades experimentales al medir la distancia L_j bajo condiciones controladas. Sandover y Holmes (1962) no encontraron correlación entre los datos L_j y $\mathbf{F}_1$. Así, los valores de ϕ y Γ utilizados para estimar L_j en el caso de canales trapeciales se basan, por completo, en los datos de Press (1961).

Una notoria característica de los saltos hidráulicos, que tanto Hsing (1937) como Press (1961) observaron fue que el flujo opuesto de la ola ocasiona un incremento del tirante en los lados del canal y un correspondiente decremento en el tirante del flujo a lo largo del eje del salto. Esta variación transversal en el tirante del flujo pudiera ocasionar problemas en la adecuada determinación de la longitud del salto.

TABLA 3.2 Definición de parámetros σ y Γ de longitud del salto hidráulico para canales trapeciales (según Press, 1961)

Talud z	Factor de forma k*	σ, ft	Γ
2	16	17.6	0.905
1	8	23.0	0.885
0.5	4	35.0	0.836

*$k = \dfrac{b}{zy}$

Los resultados obtenidos por Kindsvater (1936) para canales circulares son limitados y no bastan para colegir conclusiones útiles.

Longitud de Salto Sumergido En el caso de un salto hidráulico sumergido (Fig. 3.5), la distancia L_j se estima mediante la ecuación empírica

$$\frac{L_j}{y_2} = 4.9\, S + 6.1 \tag{3.2.33}$$

donde S = factor de sumersión definido por la ecuación (3.2.20) (Govinda Rao, 1963). La ecuación (3.2.33) demuestra que la longitud de un salto sumergido excede la longitud del correspondiente salto libre por un término de 4.9 S y, por tanto, L_j es directamente proporcional a S. Stepanov (1959) encontró que la longitud de la ola en el caso de un salto sumergido puede calcularse por

$$\frac{L_r}{y_c} = \frac{3.31}{[(y_4 - y_3/y_3\mathbf{F}_1)]^{0.885}} \tag{3.2.34}$$

Se ha mostrado que esta ecuación es válida para $S \leq 2$ y $1 \leq \mathbf{F}_1 \leq 8$ (Rajaratnam, 1967).

Saltos Hidráulicos en Canales con Pendiente

Como se notó en la sección anterior, los saltos hidráulicos pueden ocurrir en canales con una pendiente en la que las fuerzas gravitacionales actuantes sobre el flujo deben considerarse. Aunque la ecuación (3.1.1) es teóricamente aplicable a tales problemas, en la práctica el número de soluciones disponibles es limitado. Las principales dificultades para obtener una solución útil para este problema son: 1) El término W sen θ se suele cuantificar de una manera deficiente porque la longitud y la forma del salto no están bien definidos, 2) el peso específico del fluido en el volumen de control puede cambiar mucho, como consecuencia de la entrada de aire, y 3) los términos de presión pueden cuantificarse adecuadamente.

Según Rajaratnam (1967), los más antiguos experimentos que Bidone realizó para el salto hidráulico, se llevaron a cabo en lo que ahora se denomina un canal con pendiente. Bazin en 1865 y Beebe y Riegel en 1917 también se ocuparon de este problema. En 1934, Yarnell inició un amplio estudio del salto hidráulico en canales con pendiente, que no pudo terminar porque falleció en 1937. Kindsvater (1944), fue el primer investigador que desarrolló una solución racional del problema, utilizando los datos no publicados de Yarnell, Bradley y Peterka (1957a) y Argyropoulos (1962). También han realizado vastos estudios.

En el análisis de las ecuaciones y de las relaciones para los saltos hidráulicos en canales con pendiente, es conveniente considerar varios casos (Fig. 3.9). Se puede notar que, para efectos del análisis que sigue *el final del salto está por definición al final de la superficie de la ola.* Se hace la advertencia de que

esta definición difiere de la utilizada en las secciones previas de este capítulo. Así, en lo que concierne a los casos definidos en la figura 3.9, sea y_t = tirante en el extremo del canal, L_r = longitud del salto medido horizontalmente, y_1 = el tirante supercrítico del flujo sobre la pendiente, que se asume sea constante, y_2 = tirante conjugado subcrítico correspondiente a y_1, y y_2^* = tirante subcrítico dado por la ecuación (3.2.4) (véase Fig. 3.10). Si el salto inicia en el fin de la sección de pendiente, entonces $y_2^* = y_t$ y ocurrirá un salto tipo A, el cual está gobernado por la ecuación (3.2.4). Si el final del salto coincide con la intersección de la pendiente y el lecho horizontal, ocurrirá un salto tipo C. Si y_t es menor que el tirante requerido para un salto de tipo C pero mayor que y_2^* la base del salto estará sobre la pendiente y el final sobre el fondo horizontal. Esta situación se denomina salto de tipo B. Si y_t es mayor que el requerido para un salto tipo C, entonces ocurrirá un salto tipo D completamente sobre la sección de la pendiente. El salto tipo E ocurre sobre el fondo de pendiente que aún se mantiene, y el salto F —que es de una clase poco frecuente— ocurre únicamente en cuencas que se encuentran, a menudo, abajo de estructuras. De los seis tipos de saltos definidos en la figura 3.9, los tipos de la A a la D son los más comunes y se estudiarán primero.

Para el salto tipo C, Kindsvater (1944) desarrolló la siguiente ecuación para el tirante conjugado:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2\cos\theta}\left[\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2\left(\frac{\cos^3\theta}{1 - 2N\tan\theta}\right)} - 1\right] \qquad (3.2.35)$$

donde N = un factor empírico relacionado con la longitud del salto y θ = el ángulo de la pendiente longitudinal del canal. Si se definen los siguientes parámetros

$$\Gamma_1^2 = \frac{\cos^3\theta}{1 - 2N\tan\theta} \qquad (3.2.36)$$

y

$$G_1^2 = \Gamma_1^2\,\mathbf{F}_1^2 \qquad (3.2.37)$$

La ecuación (3.2.37) puede expresarse como

$$\frac{y_2}{y_1'} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8G_1^2} - 1\right) \qquad (3.2.38)$$

donde $y_1' = y_1/\cos\theta$. Bradley y Peterka (1957a) y Peterka (1963) descubrieron que N es, fundamentalmente, una función de θ, además, Rajaratnam (1967) estableció la siguiente interrelación

$$\Gamma_1 = 10^{0.027\theta} \qquad (3.2.39)$$

donde θ se da en grados. En adición al salto tipo C, Bradley y Peterka (1957a) y Peterka (1963) también encontraron que las ecuaciones (3.2.37) a la (3.2.39) pueden aplicarse al salto tipo D.

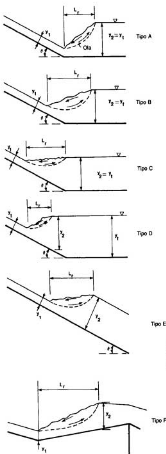


FIGURA 3.9 Definición de tipos de saltos hidráulicos que ocurren en canales inclinados.

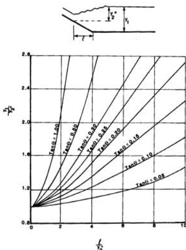


FIGURA 3.10 Solución para B saltos (*Peterka, 1963, y Rajaratnam, 1967.*)

Aunque no se ha establecido una solución analítica para el salto tipo B, Bradley y Peterka (1957a) y Peterka (1963) han desarrollado una solución gráfica para este tipo de salto, que está basada en experimentos de laboratorio. Estos datos se resumen en la figura 3.10. En ésta, los datos originales se han complementado con dos curvas adicionales: $\tan \theta = 0.50$ y 1.0. Las curvas se han tomado de Rajaratnam (1967).

El paso inicial en la solución de problemas de saltos en donde la pendiente del canal debe tomarse en cuenta, es clasificar el salto que ocurre según el tipo dado a la pendiente, el tirante inicial del flujo supercrítico, y la condición del canal. Si se supone que el tirante de la corriente supercrítica es constante sobre el fondo de la pendiente —(suposición que se asemeja mucho a las condiciones que se ha descubierto existen en la base de presas o diques altos y abajo de esclusas que actúan bajo una gran presión) se puede desarrollar un procedimiento de clasificación de saltos—, relativamente simple, como se muestra en la figura 3.11.

Bradley y Peterka (1957a) y Peterka (1963) también presentaron una serie de resultados acerca de la longitud del salto tipo D; éstos se resumen en la figura 3.12. Esta gráfica puede también utilizarse para estimar las longitudes de los saltos tipo B y C.

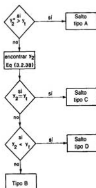


FIGURA 3.11 Determinación del tipo de salto hidráulico en canales inclinados.

La pérdida de energía para el salto tipo A puede estimarse a partir de las ecuaciones derivadas para un canal horizontal; e.g., la ecuación (3.2.24). Para saltos tipo C y D se puede derivar una expresión analítica. En la figura 3.9, si el nivel del fondo al término del salto se toma como el plano de referencia, entonces la energía aguas arriba es

$$E_1 = L_r \tan\theta + \frac{y_1}{\cos\theta} + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} \qquad (3.2.40)$$

donde L_r = longitud del salto y $\overline{u}_1$ = velocidad supercrítica aguas arriba. La energía al final del salto es

$$E_2 = y_2 + \frac{\overline{u}_2^2}{2g} \qquad (3.2.41)$$

donde $\overline{u}_2$ = velocidad subcrítica en la sección aguas abajo. Entonces la pérdida de energía relativa está dada por

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{[1 - (y_2/y_1)] + \mathbf{F}_1^2/2\{1 - [1/(y_2/y_1)]^2\} + (L_r y_t/y_t y_1)\tan\theta}{1 + (\mathbf{F}_1^2/2) + (L_r y_t/y_t y_1)\tan\theta} \qquad (3.2.42)$$

donde se supone que $y_1 \simeq y_1/\cos\theta$. En general, la ecuación (3.2.42) no podrá utilizarse en situaciones en donde $\mathbf{F}_1$ es menor que 4, ya que en esos valores la información acerca de la relación L_r/y_2 es escasa; además, en esos valores $\Delta E/E_1$ es sensible a esta relación.

El cálculo de la pérdida de energía para el salto tipo B es mucho más complejo, por lo que mejor se ilustra con un ejemplo.

EJEMPLO 3.3.

Dado un canal rectangular de 4.0 ft (1.2m) de ancho y una inclinación con un ángulo de 3° respecto a la horizontal, determínese el tipo de salto si Q = 5.0 ft³/s (0.14 m³/s), y_1 = 0.060 ft (0.018 m), y y_t = 1.4. ft (0.43 m).

Solución

En la sección 1

$$A_1 = by_1 = 4(0.06) = 0.24 \text{ ft}^2 \ (0.022 \text{ m}^2)$$

$$\overline{u}_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{5}{0.24} = 20.8 \text{ ft/s } (6.3 \text{ m/s})$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{20.8}{\sqrt{32.2(0.06)}} = 15$$

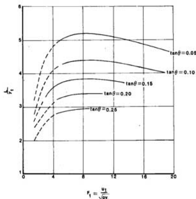


FIGURA 3.12 Longitud del salto hidráulico en canales inclinados para tipos de salto B, C, y D. *(Peterka, 1963.)*

El tirante conjugado en un canal horizontal y_2^* puede calcularse a partir de la ecuación (3.2.4).

$$y_2^* = \frac{y_1}{2}(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1) = \frac{0.06}{2}[\sqrt{1 + 8(15)^2} - 1] = 1.2 \text{ ft } (0.37 \text{ m})$$

El salto puede entonces clasificarse por el siguiente esquema definido en la figura 3.11. cuando $y_t > y_2^*$, el tirante y_2 debe calcularse mediante las ecuaciones (3.2.37) a la (3.2.39).

$$\Gamma_1 = 10^{0.027\theta} = 10^{0.027(3)} = 1.2$$

$$G_1^2 = \Gamma_1^2\mathbf{F}_1^2 = (1.2)^2(15)^2 = 324$$

$$y_2 = \frac{y_1}{2\cos\theta}(\sqrt{1 + 8G_1^2} - 1) = \frac{0.06}{2\cos 3}[\sqrt{1 + 8(324)} - 1]$$

$$= 1.5 \text{ ft } (0.46 \text{ m})$$

cuando $y_2 > y_t$, el salto se clasifica como de tipo B. De la figura 3.10, la distancia puede obtenerse por $\tan\theta = 0.05$ y

$$\frac{y_t}{y_2^*} = \frac{1.4}{1.2} = 1.2$$

$$\frac{\ell}{y_2^*} = 6.5$$

y

$$\ell = 1.2(6.5) = 7.8 \text{ ft } (2.4 \text{ m})$$

de la figura 3.12, la longitud del salto se estima

$$\frac{L_r}{y_t} = 4.9$$

y $$L_r = 4.9\ (1.4) = 6.9 \text{ ft } (2.1 \text{ m})$$

Sobre la base de estos cálculos, se puede construir la figura 3.13. La pérdida de energía puede entonces estimarse si se supone que el fondo horizontal es el plano de referencia y si se calculan las energías totales en las secciones 1 y 2 o

$$E_1 = \ell \tan\theta + \frac{y_1}{\cos\theta} + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} = 7.8 \tan(3) + \frac{0.06}{\cos(3)} + \frac{(20.8)^2}{2(32.2)}$$

$$= 7.2 \text{ ft } (2.2 \text{ m})$$

Entonces en la sección 2

$$\overline{u}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{5}{1.4(4)} = 0.89 \text{ ft/s } (0.27 \text{ m/s})$$

$$E_2 = y_2 + \frac{\overline{u}_2^2}{2g} = 1.4 + \frac{(0.89)^2}{2(32.2)} = 1.4 \text{ ft } (0.43 \text{ m})$$

y $$\Delta E = E_1 - E_2 = 7.2 - 1.4 = 5.8 \text{ ft } (1.8 \text{ m})$$

o $$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{5.8}{7.2} = 0.81$$

Estos cálculos indican que las pérdidas de energía en este salto son cuantiosas por tanto, estos resultados deberán utilizarse con precaución cuando estén sujetos a una serie de suposiciones.

EJEMPLO 3.4.

Dado un canal rectangular con un ancho de 6.1 m (20 ft) y un ángulo de inclinación de 3° respecto a la horizontal, determínese el tipo de salto si $Q = 9.0$ m³/s (320 ft³/s), $y_t = 2.6$ m (8.5 ft), y $y_1 = 0.09$ m (0.30 ft).

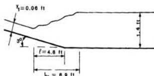


FIGURA 3.13 Resultados del tipo B de análisis de salto hidráulico.

Solución

En la sección 1

$$A_1 = by_1 = 6.1(0.09) = 0.55 \text{ m}^2 \text{ (5.9 ft}^2)$$

$$\overline{u}_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{9.0}{0.55} = 16 \text{ m/s (52 ft/s)}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{16}{\sqrt{9.8(0.09)}} = 17$$

El tirante y_2^* puede calcularse de la ecuación (3.2.4).

$$y_2^* = \frac{y_1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} - 1\right) = \frac{0.09}{2}\left[\sqrt{1 + 8(17)^2} - 1\right] = 2.1 \text{ m (6.9 ft)}$$

El salto puede clasificarse mediante el esquema definido en la figura 3.11. Cuando $y_t > y_2^*$, el tirante de y_2 debe obtenerse de las ecuaciones (3.2.37) y (3.2.39).

$$\Gamma = 10^{0.027\theta} = 10^{0.027(3)} = 1.2$$

$$G_1^2 = \Gamma_1 \mathbf{F}_1^2 = (1.2)^2(17)^2 = 416$$

$$y_2 = \frac{y_1}{2\cos\theta}\left(\sqrt{1 + 8G_1^2} - 1\right) = \frac{0.09}{2\cos(3°)}\left[\sqrt{1 + 8(445)} - 1\right]$$

$$= 2.6 \text{ m (8.5 ft)}$$

Entonces, cuando $y_2 \sim y_t$, el salto se clasifica como de tipo C. De la figura 3.12, la distancia L_r puede obtenerse por $\tan\theta = 0.05$ y $\mathbf{F}_1 = 17$

$$\frac{L_r}{y_t} = 4.8$$

y $$L_r = 4.8\,(2.6) = 12 \text{ m (39 ft)}.$$

La pérdida de energía relativa se calcula mediante la ecuación (3.2.42)

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{[1 - (y_2/y_1)] + \mathbf{F}_1^2/2\left[1 - \dfrac{1}{(y_2/y_1)^2}\right] + \tan\theta\,(L_r y_t/y_t y_1)}{1 + (\mathbf{F}_1^2/2) + (L_r y_t/y_t y_1)\tan\theta}$$

con $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{2.6}{0.09} = 29$$

y $$\frac{L}{y_t} = 4.8$$

$$\frac{y_t}{y_1} = 29$$

entonces

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{(1 - 29) + (17^2/2)(1 - 1/29^2) + \tan(3°)[4.8(29)]}{1 + 17^2/2 + 4.8(29)\tan(3°)}$$

$$= 0.76$$

El análisis del salto designado como de tipo E (Fig. 3.9) comienza con la ecuación (3.1.1). Para un canal rectangular, se supone que (primero) $P_f = 0$, (segundo) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, (tercero) $\Sigma f'_f = 0$, y (cuarto) el peso del agua entre las secciones 1 y 2 está dado por

$$W = \frac{A_1 + A_2}{2} \frac{L_r}{\cos\theta} \gamma k'$$

donde el valor de $L_r/\cos\theta$ puede aproximarse por

$$\frac{L_r}{\cos\theta} = L' = X(y_2 - y_1) \tag{3.2.43}$$

X = un factor de pendiente y k' = un factor de correción que resulta de la suposición de que el perfil del salto es lineal. La ecuación (3.1.1) se puede entonces resolver para encontrar

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8M^2} - 1) \tag{3.2.44}$$

donde
$$M = \frac{\mathbf{F}_1}{\sqrt{1 - [k'L' \operatorname{sen}\theta/(y_2 - y_1)]}}$$

Kennison (1944), Chow (1959), y Argyropoulos (1962) han obtenido, de manera independiente, la ecuación (3.2.44). Sin embargo, para simplificar el valor de k' puede suponerse que ésta sea unitaria; la variación de M con respecto a X no puede ser ignorada, excepto para pequeños valores de θ (Rajaratnam, 1967). Kennison (1944) sugirió que X puede tomar un valor de 3. Argyropoulos (1962) y Chow (1959) notaron que X era una función de $\mathbf{F}_1$, pero ninguno de estos investigadores sugiere un valor apropiado.

Como se ha dicho previamente, el salto tipo F es muy raro, además, hay pocos datos disponibles para este tipo de salto. Rajaratnam (1967) notó que, en la práctica, es casi imposible que se presente este salto completamente sobre la pendiente inversa. Si este tipo de salto se emplea en un diseño, sus características podrán determinarse a partir de los modelos de prueba.

3.3 SALTOS HIDRÁULICOS EN INTERFASES DE DENSIDAD

Se ha demostrado en experimentos de laboratorio (véase por ejemplo, Yih y Guha, 1955, Hayakawa, 1970, Stefan y Hayakawa, 1972, y Stefan y otros, 1971) que los saltos hidráulicos pueden también ocurrir en interfases de densi-

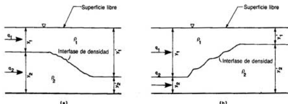


FIGURA 3.14 Definición interna del salto hidráulico.

dad dentro de flujos estratificados. Sin embargo este fenómeno —denominado salto hidráulico interno— no suele ocurrir en la naturaleza, excepto en la atmósfera (Turner, 1973) y en mareas de estuarios (Gardner y otros, 1980); esta carencia de observaciones *in situ* quizá ocurra porque es un fenómeno interno que no necesariamente produce un efecto notorio en la interfase aire-agua.

Los tipos de saltos hidráulicos internos que pueden presentarse se definen esquemáticamente en la figura 3.14. En el primer caso (Fig. 3.14 a), la capa 1 pasa de un régimen interno supercrítico a un régimen subcrítico por medio de un salto hidráulico interno. En el segundo caso (Fig. 3.14 b), la capa 2 pasa de un régimen interno supercrítico a un régimen interno subcrítico por medio de un salto hidráulico interno. En el análisis que sigue sobre los saltos hidráulicos internos, se requieren las siguientes suposiciones: 1) El canal en que ocurre el salto es rectangular y tiene un ancho b, 2) el fondo del canal es horizontal, 3) el esfuerzo cortante interfasial entre las dos capas se ignora, 4) no hay mezcla entre las capas, 5) todas las distribuciones de presión son hidrostáticas, y 6) $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Aunque las suposiciones 3) a 5) son cruciales para el análisis que sigue, los resultados de los análisis son correctos únicamente en lo que concierne al aspecto cualitativo de estas suposiciones.

En la figura 3.15, los volúmenes de control de ancho unitario se definen para las capas 1 y 2. Si se considera únicamente la capa 2, la fuerza hidrostática aguas arriba es

$$F_1 = \left[\frac{\gamma_1 y_1 + (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)}{2}\right] y_2 = \gamma_1 y_1 y_2 + \tfrac{1}{2}\gamma_2 y_2^2 \qquad (3.3.1)$$

y la correspondiente fuerza hidrostática aguas abajo es

$$F_2 = \gamma_1 y_1' y_2' - \tfrac{1}{2}\gamma_2 (y_2')^2 \qquad (3.3.2)$$

donde γ_1 y γ_2 = pesos específicos de los fluidos en las capas 1 y 2, respectivamente. La fuerza ejercida por la capa 1 sobre el volumen de control de la capa 2 está dada por

$$F_2 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_1')(y_2 - y_2')\gamma_1 \qquad (3.3.3)$$

donde $\gamma_1[(y_1 + y_1')/2)]$ = presión media ejercida por la capa 1 sobre la superficie de pendiente que separa las capas 1 y 2, y $y_2 - y_2'$ = proyección de la uni-

dad de área vertical del salto. La aplicación de la forma unidimensional de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento al volumen de control de la capa 2 dará

$$F_1 - F_2 - F_3 = \rho_2 q_2(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \tag{3.3.4}$$

donde q_2 = gasto por unidad de ancho en la capa 2

$\bar{u}_2 = q_2/y_2'$

$\bar{u}_1 = q_2/y_2$

Si se reagrupa la ecuación (3.3.4) y si se define $a_2 = q_2^2/g$ y $r = p_1/p_2$,

$$2a_2(y_2 - y_1') = y_2 y_2'(y_2 + y_2')[r(y_1 - y_1') + (y_2 - y_2')] \tag{3.3.5}$$

De manera análoga, la aplicación de la forma unidimensional de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento al volumen de control de la capa 1 da

$$2a_1(y_1 - y_1') = y_2 y_2'(y_1 + y_1')[r(y_1 - y_1') + (y_2 - y_2')] \tag{3.3.6}$$

Si y_1, y_2, ρ_1, y ρ_2 se especifican, entonces las ecuaciones (3.3.5) y (3.3.6) pueden resolverse simultáneamente para determinar y_1' y y_2'; existen más de nueve soluciones para este conjunto de ecuaciones. Una solución válida es $y_1' = y_1$ y $y_2' = y_2$; de las otras 8 soluciones posibles para el estado especificado, únicamente deben considerarse las que son reales y positivas. Yih y Guha (1955) demostraron que, por lo menos, hay tres estados conjugados que tienen una interpretación física real y, bajo ciertas condiciones, únicamente existe un estado conjugado. Las condiciones para que sean únicas en su género son que

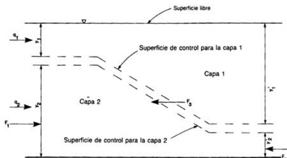


FIGURA 3.15 Volumen de control y definición de variables para un salto hidráulico interno.

$\mathbf{F}_1^2 = a_1/y_1^3$ o $\mathbf{F}_2^2 = a_2/y_2^3$ deban ser grandes. Las tres únicas soluciones dadas por Yih y Guha (1955) son:

1. Si las velocidades aguas abajo son iguales para ambas capas, entonces

$$(1 + r\lambda)\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^3 + r\left(\lambda - \frac{y_1}{y_2}\right)\left(\frac{y_2'}{y_2}\right) - \left(1 + r\frac{y_1}{y_2} + 2\mathbf{F}_2^2\right)\left(\frac{y_2'}{y_2}\right) + 2\mathbf{F}_2^2 = 0 \quad (3.3.7)$$

donde $\frac{q_1}{q_2} = \frac{y_1'}{y_2'} = \lambda$. La ecuación (3.3.7) tiene dos raíces positivas: $y_2' = y_2$, y otra que corresponde al estado conjugado.

2. Si $a_1 = 0_1$, la capa 1 está en reposo; así las ecuaciones (3.3.5) y (3.3.6) pueden resolverse simultáneamente para obtener

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_2^2} - 1\right) \quad (3.3.8)$$

donde $\mathbf{F}_2'^2 = \mathbf{F}_2^2(1 - r)^{-1}$

Puede notarse la similitud entre la ecuación (3.3.8) y las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5).

3. Si $a_2 = 0$, esto es, la capa 2 está en reposo, entonces la solución de las ecuaciones simultáneas (3.3.5) y (3.3.6) dará

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1'^2} - 1\right) \quad (3.3.9)$$

donde $\mathbf{F}_2'^2 = \mathbf{F}_1^2(1 - r)^{-1}$

Con respecto a estas soluciones, en el caso de que $a_1 = 0$ y $a_2 \neq 0$, la ecuación (3.3.6) se reduce a

$$y_1 + y_2 = y_1' + y_2'$$

Este resultado implica que la superficie libre está nivelada y no hay evidencia de salto interno en la superficie libre. Si $a_2 = 0$ y $a_1 \neq 0$, entonces, de la ecuación (3.3.6), se obtiene:

$$r(y_1' - y_1) = y_2 - y_2'$$

y la superficie libre no permanece a nivel.

En el material procedente se supuso explícitamente que los fluidos compuestos por las capas 1 y 2 no se mezclan. Stefan y Hayakawa (1972) y Stefan et al. (1971) han considerado, tanto teóricamente como experimentalmente, el caso en que ocurre una mezcla. La figura 3.16 define la situación considerada por estos autores. La situación definida en la figura 3.16 es análoga al agua de enfriamiento de una planta de generación térmica que entra a un depósito.

Con referencia a la figura 3.16 y si se considera únicamente las componentes horizontales de los flujos y fuerza, la ecuación unidimensional de cantidad de movimiento es

$$\frac{\beta_1\rho_1 Q_1^2}{(y_1 - w)} - \frac{\beta_0\rho_0 Q_0^2}{y_0} + \frac{\beta_2\rho_2 Q_2^2}{y_2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho_0 g y_0^2 - \tfrac{1}{2}\rho_1 g(y_1 - w)^2 - (y_1 - w)\rho_1 y_2 - \tfrac{1}{2}g\rho_2 y_2^2 + P_s + F_s \quad (3.3.10)$$

donde el subíndice 0 se refiere a los valores de la variable aguas arriba del salto, el subíndice 1 se refiere a los valores de la variable al final del salto en la capa 1, el subíndice 2 se refiere a los valores de la variable al final del salto en la parte baja de la capa, o capa 2, P_s y F_s son las componentes horizontales de la fuerza resultante de las fuerzas normal y tangencial, respectivamente, Q = gasto o flujo volumétrico, y todas las otras variables se han definido previamente o se definen en la figura 3.16. Para la situación descrita, la ecuación de conservación de masa es

$$\rho_0 q_0 = \rho_1 q_1 - \rho_2 q_2 \quad (3.3.11)$$

y la ecuación de conservación de volumen es

$$q_0 + q_2 = q_1 \quad (3.3.12)$$

A partir de las ecuaciones (3.3.11) y (3.3.12) se puede derivar una ecuación de continuidad para el exceso de densidad

$$\Delta\rho_0 q_0 = \Delta\rho_1 q_1 \quad (3.3.13)$$

donde $\Delta\rho_0 = \rho_2 - \rho_0$ y $\Delta\rho_1 = \rho_2 - \rho$. Entonces, si el análisis se restringe a un caso donde $\theta = 90°$, el esfuerzo tangencial en el fondo del canal es despre-

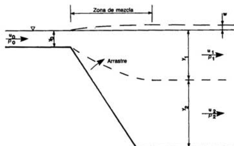


FIGURA 3.16 Definición esquemática para el mezclado interno del salto hidráulico.

ciable, y puede suponerse una distribución de presiones hidrostáticas a lo largo de la pendiente vertical, por tanto la ecuación (3.3.10) será

$$\frac{\beta_1\rho_1 Q_1^2}{y_1 - w} - \frac{\beta_0\rho_0 Q_0^2}{y_0} + \frac{\beta_2\rho_2 Q_2^2}{y_2} = g\rho_0 y_0\left(y_1 + y_2 - \frac{y_0}{2}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}g\rho_2(y_1 + 2y_2 - y_0)(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{2}g\rho_1(y_1 - w)(y_1 + 2y_2 - w) \qquad (3.3.14)$$

Las ecuaciones (3.3.12) a (3.3.14) contienen cuatro variables desconocida, q_1, q_2, ρ_1, y w, por lo que se requiere una ecuación adicional. Stefan y Hayakawa (1972) supusieron que

$$gy_0\rho_0 + g(y_1 - y_0)\rho_2 = g(y_1 - w)\rho_1 \qquad (3.3.15)$$

que es equivalente a la suposición de que la presión hidrostática en la capa más baja es igual en cualquier plano horizontal. Esta suposición se satisface por completo si el salto hidráulico interno no se mezcla en la interfase de densidad o si y_2 es igual a infinito. En término de variables adimensionales, la ecuación (3.3.15) será

$$\frac{w}{y_0} = r\left(\frac{E - H_1}{E - r}\right) \qquad (3.3.16)$$

donde $E = Q_1/Q_0$, $H_1 = y_1/y_0$ y $r = \Delta\rho_0/\rho_2$. En términos de variables adimensionales, la ecuación (3.3.14) es

$$2\beta_2\mathbf{F}_0^2 = \frac{A}{B}$$

donde $A = H_2(H_1 - r)[(H_1 - r)^2 - (1 - r)(E - r)]$

$B = (E - r)\,[(\beta_0/\beta_2)(1 - r)\,H_2 - (E - 1)^2]\,\{H_1 - r - [\beta_1 H_2(E - r)^2]/[\beta_0(1 - r)H_2 - \beta_2(E - 1)^2]\}$

$H_2 = y_2/y_0$ y

$$\mathbf{F}_0 = \frac{Q_0}{[(\Delta\rho_0/\rho_2)gy_0^3]^{1/2}}$$

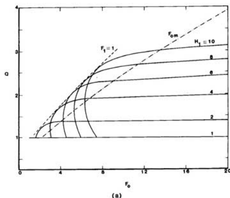
Para el caso donde $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ y

$$0 < r < 10^{-2}$$

Stefan y Hayakawa (1972) solucionaron la ecuación (3.3.17) (Fig. 3.17). En esta figura las líneas representan un tirante de flujo constante aguas abajo H_1 además se muestra en seguida un número de Froude densimétrico constante $\mathbf{F}_1$ aguas abajo.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{(\Delta\rho_1/\rho_2)g(y_1 - w)^3}}$$

El valor de $\mathbf{F}_1$ indica cuando el flujo aguas abajo es internamente subcrítico o supercrítico. $\mathbf{F}_1 = 1$ representa el límite de flujos internamente subcríticos; $\mathbf{F}_{0m}$ es el mínimo desfogue del número de Froude densimétrico para un



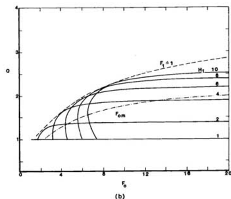


FIGURA 3.17 (*a*) Q como una función de $\mathbf{F}_0$ para $H_2 = \infty$. (*Stefan y Hayakawa, 1972.*) (*b*) Q como una función de $\mathbf{F}_0$ para $H_2 = 8$. *(Stefan y Hayakawa, 1972.)*

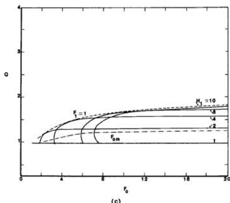


FIGURA 3.17 (*Continúa*) (*c*) Q como una función de $\mathbf{F}_0$ para $H_2 = 1$ *(Stefan y Hayakawa, 1972.)*

tirante H_1 adimensional aguas abajo. La figura 3.17 también demuestra que el espesor de las capas superior e inferior limita la cantidad de entrada total. Se puede notar que las mediciones de laboratorio han confirmado los resultados teóricos resumidos en la figura 3.17.

En este punto se pude notar que el estudio de saltos hidráulicos internos es un área en que la investigación básica está apenas comenzando. En tanto resulte claro que los conceptos fundamentales de la hidráulica de canales abiertos se pueden aplicar, es necesario llevar a cabo otras investigaciones en esta área, antes de que el problema se puede solucioanr en una forma comprensiva.

BIBLIOGRAFÍA

Argyropoulos, P. A., "Theoretical and Experimental Analysis of the Hydraulic Jump in a Parabolic Flume," *Proceedings of the 7th Conference, International Associaton for Hydraulic Research*, vol. 2, 1957, pp. D12.1–D12.20.

Argyropoulos, P. A., "The Hydraulic Jump and the Effect of Turbulence on Hydraulic Structures: Contribution of the Research of the Phenomena," *Proceedings of the 9th Conference, International Association for Hydraulic Research*, 1961, p. 173–183.

Argyropoulos, P. A., "A General Solution of the Hydraulic Jump in Sloping Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 88, no. HY4, July 1962, pp. 61–77.

Bakhmeteff, B. A., and Matzke, A. E., "The Hydraulic Jump in Terms of Dynamic Similarity," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 101, 1936, pp. 630–647.

Bradley, J. N., and Peterka, A. J., "The Hydraulic Design of Stilling Basins: Hydraulic Jumps on a Horizontal Apron (Basin I)," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY5, 1957a, pp. 1–24.

Bradley, J. N., and Peterka, A. J., "The Hydraulic Design of Stilling Basins: Stilling Basin with Sloping Apron (Basin V)," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY5, 1957b, p. 1–32.

Chow, V. T. *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Gardner, G. B., Nowell, A. R. M., and Smith, J. D., "Turbulent Processes in Estuaries," *Estuarine and Wetland Processes*, P. Hamilton and K. McDonald (Eds.), Plenum Press, New York, 1980, pp. 1–34.

Govinda Rao, N. S., and Rajaratnam, N., "The Submerged Hydraulic Jump," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 89, no. HY1, January 1963, pp. 139–162.

Hayakawa, N., "Internal Hydraulic Jump in Co-current Stratified Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Engineering Mechanics Division*, vol. 96, no. EM5, 1970, pp. 797–800.

Hsing, P. S., "The Hydraulic Jump in a Trapezoidal Channel," thesis presented to the State University of Iowa, Iowa City, 1937, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

Kennison, K. R., "Discussion of the Hydraulic Jump in Sloping Channels," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 109, 1944, pp. 1123–1125.

Kindsvater, C. E., "Hydraulic Jump in Enclosed Conduits," thesis presented to the State University of Iowa, Iowa City, 1936, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Kindsvater, C. E., "The Hydraulic Jump in Sloping Channels," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 109, 1944, pp. 1107–1154.

Peterka, A. J., "Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators," Engineering Monograph No. 25, U.S. Bureau of Reclamation, Denver, 1963.

Press, M. J., "The Hydraulic Jump," engineering honours thesis presented to the University of Western Australia, Nedlands, Australia, 1961.

Rajaratnan, N., "The Hydraulic Jump as a Wall Jet," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY5, September 1965, pp. 107–132.

Rajaratnam, N., "Hydraulic Jumps," *Advances in Hydroscience*, vol. 4, Academic Press, New York, 1967, pp. 197–280.

Rouse, H., Siao, T. T., and Nagaratnam, S., "Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 124, 1959, pp. 926–966.

Safranez, K., "Untersuchungen über den Wechselsprung," *Der Baningenieur*, vol. 10, no. 37, 1919, pp. 649–651. A brief summary is given in Donald P. Barnes, "Length of Hydraulic Jump Investigated at Berlin," *Civil Engineering*, vol. 4, no. 5, May 1934, pp. 262–263.

Sandover, J. A., and Holmes, P., "The Hydraulic Jump in Trapezoidal Channels," *Water Power*, vol. 14, 1962, p. 445.

Silvester, R. "Hydraulic Jump in All Shapes or Horizontal Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 90, no. HY1, January 1964, pp. 23–55.

Silvester, R., "Theory and Experiment on the Hydraulic Jump," *2nd Australiasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics*, 1965, pp. A25–A39.

Stefan, H., Hayakawa, N., and Schiebe, F. R., "Surface Discharge of Heated Water," 16130 FSU 12/71, U.S. Environmental Protection Agency, Washington, D.C., December 1971.

Stefan, H., and Hayakawa, N., "Mixing Induced by an Internal Hydraulic Jump," *Water Resources Bulletin*, American Water Resources Association, vol. 8, no. 3, June 1972, pp. 531–545.

Stepanov, P. M., "The Submerged Hydraulic Jump," *Gidrotekhn i Melioratsiya*, Moscow, vol. 10, 1958. English translation by Israel Programme for Scientific Translations, 1959.

Straub, W. O., "A Quick and Easy Way to Calculate Critical and Conjugate Depths in Circular Open Channels," *Civil Engineering*, December 1978, pp. 70–71.

Turner, J. S., *"Buoyancy Effects in Fluids,"* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

Yih, C. S., and Guha, C. R., "Hydraulic Jump in a Fluid System of Two Layers," *Tellus*, vol. 7, no. 3, 1955, pp. 358–366.

CUATRO

Desarrollo de los conceptos de flujo uniforme

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo se define el flujo uniforme, y se desarrollan las ecuaciones de Chezy y Manning para flujo uniforme. Se estudian los métodos teóricos y aplicados para estimar los coeficientes de resistencia utilizados en estas ecuaciones.

4.1 ESTABLECIMIENTO DEL FLUJO UNIFORME

No obstante que la definición de flujo uniforme y las suposiciones requeridas para desarrollar las ecuaciones fundamentales rara vez y se satisfacen en la práctica, el concepto de flujo uniforme es central para la comprensión y solución de muchos problemas en la hidráulica de canales abiertos. Por definición, el flujo uniforme ocurre cuando:

1. El tirante, el área hidráulica y la velocidad en cada sección transversal, son constantes.

2. La línea de gradiente de energía, la superficie del agua, y el fondo o plantilla del canal, son todos paralelos: esto es $S_f = S_w = S_o$ donde S_f = pendiente de la línea de energía, S_w = pendiente de la superficie del agua, y S_o = pendiente del fondo o plantilla del canal (Fig. 4.1).

En general el flujo uniforme ocurre únicamente en canales prismáticos muy largos y rectos, en donde puede obtenerse una velocidad terminal del flujo, i.e., la pérdida de energía ocasionada por flujo turbulento es exactamente balanceada por la reducción en energía potencial producida por el decremento uni-

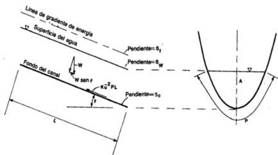


FIGURA 4.1 Definición esquemática de las variables para la derivación de la ecuación de Chezy.

forme en la elevación del fondo del canal. Además, aunque el flujo uniforme no permanente es teóricamente posible, rara vez ocurre en canales abiertos; por lo que únicamente el caso de flujo uniforme permanente será tratado aquí.

4.2 LAS ECUACIONES DE CHEZY Y MANNING

Para propósitos computacionales, la velocidad promedio de un flujo uniforme puede calcularse de manera aproximada por diversas ecuaciones semiempíricas, de flujo uniforme. Todas estas ecuaciones tienen la forma

$$\bar{u} = CR^xS^y \tag{4.2.1}$$

donde $\bar{u}$ = velocidad promedio
R = radio hidráulico
S = pendiente longitudinal del canal
C = coeficiente de resistencia
x, y = coeficientes

En este libro, se considerarán únicamente la ecuación de Chezy, desarrollada en 1769, y la ecuación de Manning desarrollada en 1889.

La ecuación de Chezy puede derivarse a partir de la definición de flujo uniforme con una suposición acerca de la forma del coeficiente de resistencia del flujo. Con referencia a la figura 4.1, la definición de flujo uniforme requiere que las fuerzas de resistencia del flujo sean exactamente iguales a las fuerzas causantes del movimiento. La fuerza causante del movimiento es

$$F_m = W \operatorname{sen} \theta = \gamma \, AL \operatorname{sen} \theta \tag{4.2.2}$$

donde W = peso del fluido dentro del volumen de control
γ = peso específico del fluido
A = área hidráulica
L = longitud del volumen de control
θ = ángulo de la pendiente longitudinal del canal

Si θ es pequeña, que es generalmente el caso, entonces sen $\theta \simeq S_0$. Se supone que la fuerza por unidad de área del perímetro del canal resistente al movimiento, F_R, es proporcional al cuadrado de la velocidad promedio, o

$$F_R \sim \bar{u}^2$$

Entonces, para un canal de longitud L con un perímetro mojado P, la fuerza de resistencia es

$$F_R = LPk\bar{u}^2 \tag{4.2.3}$$

donde k = constante de proporcionalidad. Igualando la fuerza causante del movimiento, ecuación (4.2.2.), con la fuerza de resistencia del movimiento,

ecuación (4.2.3), se obtiene

$$\gamma A L S_0 = L P k \bar{u}^2$$

o

$$\bar{u} = \left(\frac{\gamma}{k}\right)^{1/2} \sqrt{RS} \tag{4.2.4}$$

donde el subíndice asociado con S ha sido eliminado. Por conveniencia se define

$$C = \left(\frac{\gamma}{k}\right)^{1/2} \tag{4.2.5}$$

El coeficiente de resistencia C, definido por la ecuación (4.2.5) por lo común se conoce como la C de Chezy y en la práctica se determina por medición o estimación. El coeficiente de resistencia definido por la ecuación (4.2.5) no es adimensional, debido a que tiene dimensiones de aceleración i.e., longitud/tiempo² o LT^{-2}.

La ecuación de Manning es el resultado del proceso de un ajuste de curvas, y por tanto es completamente empírica en su naturaleza. En las aplicaciones de la ecuación de Manning, es esencial que el sistema de unidades que está siendo usado sea identificado y que se emplee el coeficiente apropiado. En el sistema de unidades del SI, la ecuación de Manning es

$$\bar{u} = \frac{1}{n} R^{2/3} \sqrt{S}$$

donde n = coeficiente de resistencia de Manning. Como en el caso del coeficiente de resistencia de Chezy, n no es adimensional, por que tiene dimensiones de $TL^{-1/3}$ o en el caso específico de la ecuación de arriba, s/m⅓. La ecuación de Manning en unidades SI puede ser convertida a unidades inglesas sin afectar el valor numérico de n

$$n \text{ en} \left[\frac{\text{s}}{\text{m}^{1/3}}\right] = 0.6730\, n \text{ en} \left[\frac{\text{s}}{\text{ft}^{1/3}}\right]$$

Por lo tanto, en unidades inglesas, la ecuación de Manning es

$$\bar{u} = \frac{1}{0.6730n} R^{2/3}\sqrt{S} = \frac{1.49}{n} R^{2/3}\sqrt{S}$$

Con objeto de generalizar, en este libro la ecuación de Manning se escribirá como

$$\bar{u} = \frac{\phi}{n} R^{2/3}\sqrt{S} \tag{4.2.6}$$

donde $\phi = 1.00$ si son utilizadas unidades SI y $\phi = 1.49$ si son utilizadas unidades inglesas.

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos moderna, las dimensiones de los coeficientes de resistencia C y n son una materia de mayor importancia: véase por ejemplo Simons y Senturk (1976). Sin embargo, las dimensiones de estos coeficientes no han sido un problema significativo para los antiguos ingenieros hidráulicos.

El lector deberá tener cuidado con las dimensiones de C y n las cuales deberá utilizar en forma apropiada.

En vista de que las ecuaciones de Chezy y Manning describen un mismo fenómeno, los coeficientes C y n deben estar relacionados. Al igualar la ecuación (4.2.4) con la ecuación (4.2.6) se obtiene

$$C\sqrt{RS} = \frac{\phi}{n} R^{2/3}\sqrt{S}$$
$$C = \frac{\phi}{n} R^{1/6} \tag{4.2.7}$$

En este libro siempre se utilizará la ecuación de Manning, aunque la ecuación de Chezy es igualmente apropiada, desde un punto de vista teórico. El lector debe tener cuidado y considerar que el análisis anterior se aplica únicamente a canales con fondo plano. En canales aluviales donde se presentan diversas formas de fondo, el análisis que se aplica es mucho más complejo: véase por ejemplo Simons y Senturk (1976) o Garde y Rajú (1978).

4.3 ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE RESISTENCIA

Conceptos teóricos básicos

La principal dificultad al utilizar la ecuación de Manning o de Chezy en la práctica, consiste en estimar adecuadamente un valor apropiado del coeficiente de resistencia. En general, se espera que n y C dependan del número de Raynolds del flujo, de la rugosidad de la frontera y de la forma de la sección transversal del canal. Esto es equivalente a hipotetizar que n y C se comportan de una manera análoga al factor de fricción f de Damcy-Weisbach utilizado para determinar la resistencia de flujos en tuberías: véase por ejemplo, Streeter y Wylie (1975), o

$$S = \frac{f}{4R}\frac{\overline{u}^2}{2g} \tag{4.3.1}$$

Entonces

$$n = \phi R^{1/6} \sqrt{\frac{f}{8g}} \tag{4.3.2}$$

y

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \tag{4.3.3}$$

Si el comportamiento de n y C es estudiado desde este punto de vista, entonces debe replantearse una serie de definiciones básicas acerca de los tipos de flujo turbulento. El flujo turbulento hidráulicamente suave, se refiere a un flujo en el cual los elementos del perímetro rugoso son completamente cubiertos por la subcapa viscosa. El flujo completamente rugoso, ocurre cuando los elementos del perímetro rugoso se proyectan a través de la subcapa laminar y dominan el comportamiento del flujo. En el último caso, la resistencia del flujo se debe por completo a la forma de arrastre, y el coeficiente de resistencia es independiente del número de Reynolds, donde $\mathbf{R} = 4Ru/\nu$ = número de Reynolds. Entre estos dos extremos existe una región de transición. En el análisis que sigue, k_s es un parámetro de longitud que caracteriza al perímetro rugoso y es definido como el diámetro de la granulometría para una superficie arenosa que tiene el mismo valor limitante de f. Los tres tipos de flujo turbulento: suave, transicional y completamente rugoso, son diferenciados uno de otro, por un número de Reynolds basado en la k_s y en la velocidad cortante, $u_* = \sqrt{\tau_0/_\rho} = \sqrt{gRS}$ o

$$\mathbf{R}_* = \frac{u_* k_s}{\nu} \tag{4.3.4}$$

La región de transición se define por los límites

$$4 \leq \mathbf{R}_* \leq 100 \tag{4.3.5}$$

con el límite inferior se define el término de la región suave y con el límite superior define el inicio de la región completamente rugosa. Como será mostrado en una sección subsecuente de este capítulo, el punto en que comienza el flujo completamente rugoso puede también definirse en términos de la n de Manning

$$n^6\sqrt{RS} = 1.9 \times 10^{-13} \tag{4.3.6}$$

Cuando las fronteras son hidráulicamente suaves y $\mathbf{R} < 100\ 000$, el factor de fricción la fórmula de Blasius desarrollada para flujo en tuberías o

$$f = \frac{0.316}{\mathbf{R}^{0.25}} \tag{4.3.7}$$

Cuando el número de Reynolds excede a 100 000, pero el flujo hidráulicamente suave es amortiguado, el factor de fricción está dado por

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log\left(\frac{\mathbf{R}\sqrt{f}}{2.51}\right) \tag{4.3.8}$$

Para flujo hidráulicamente rugoso, el factor de fricción puede estimarse mediante

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log\left(\frac{12R}{k_s}\right) \tag{4.3.9}$$

TABLA 4.1 Valores de k_s para diversos tipos de superficies de concreto y mampostería (Ackers, 1958, y Zegzhda, 1938, ambos de Anónimo, 1963b)

k_s	Descripción de la superficie
0.0005	Concreto clase 4 (construcción monolítica; lanzado frente a formas de acero lubricadas con superficies sin irregularidades)
0.001	Superficies de mortero muy liso, todas las juntas y suturas terminadas a mano niveladas con la superficie.
0.0016	Concreto lanzado en moldes de acero lubricados, con suturas y juntas cuidadosamente alisadas o punteadas.
0.002	Tubos de madera-duela, canales de madera cepilladas, y concreto clase 3 (lanzado contra formas de acero, o tubo premoldeado); superficies alisadas con llana; tubo de alcantarillado de superficie lisa.
0.005	Concreto clase 2 (construcción monolítica frente a formas rugosas o superficies de cemento inyectado terminado liso, la parte posterior a menudo terminada con concreto lanizado); enladrillado alisado.
0.008	Longitudes cortas de tubos de concreto de pequeño diámetro sin guarnición especial de juntas enpalmadas o a tope.
0.01	Concreto clase 1 (tuberías premoldeadas con mortero comprimido en las juntas); recto, canales de tierras uniforme.
0.014	Conductos de concreto rugosos
0.02	Mampostería de grava
0.01—0.03	Gunite sin tratar

donde los valores típicos de k_s para diversos materiales, se resumen en la tabla 4.1. En la región de transición entre flujos hidráulicamente suaves y rugosos, la f puede estimarse por una fórmula modificada de Colebrook o

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{k_s}{12R} + \frac{2.5}{\mathbf{R}\sqrt{f}}\right) \tag{4.3.10}$$

En la figura 4.2, el factor de fricción es gratificado como una función de $\mathbf{R}$ y el parámetro $2R/k_s$ que es análogo al parámetro de rugosidad relativa en flujo de tuberías

La American Society of Civil Engineers en su trabajo sobre *Factores de fricción en canales abiertos,* concluyó que para rugosidad de canales abiertos similares a los encontrados en tuberías, se puede adecuar un diagrama de resistencia similar al mostrado en la figura 4.2 con objeto de estimar f y n o C (autor anónimo, 1963a)

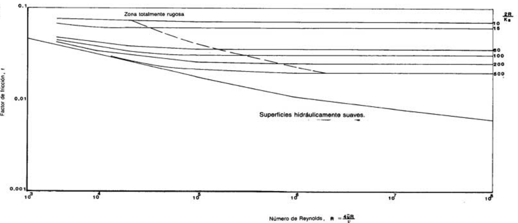


FIGURA 4.2 Diagrama de Moody modificado mostrando el comportamiento del factor de fricción en el flujo de canales abiertos.

Conceptos aplicados

Para el caso de números de Reynolds altos, y rugosidades del tipo encontradas por lo común en canales no lineales, el factor de fricción es independiente del número de Reynolds y cercanamente proporcional a $R^{-1/3}$ (Anónimo, 1963a). Si se supone que está dada por $R^{-1/3}$ y este valor es substituido en la ecuación (4.3.2), se concluye que para esta situación, la n de Manning es una constante. Entonces, la ecuación de Manning con un valor constante de n es aplicable únicamente a flujos turbulentos completamente rugosos como se definen en las ecuaciones (4.3.5) o (4.3.6). En la estimación de un valor apropiado de n para este caso, es necesario un conocimiento cualitativo de los factores de que depende n, ya que en bastantes situaciones aplicadas, el valor de n es una función de muchas variables.

Superficie rugosa La superficie rugosa del perímetro de un canal proporciona un punto crítico de referencia en la estimación de n. Cuando el material del perímetro es fino, el valor de n es bajo y relativamente no es afectado por cambios en el tirante del flujo: sin embargo, cuando el perímetro es compuesto de grava y/o piedras, el valor de n es mayor y puede variar significativamente con el tirante del flujo. Por ejemplo, grandes piedras que por lo general quedan en el fondo de algunos canales, producen un valor alto de n en estados bajos y valores relativamente bajos de n en estados altos.

Vegetación El valor estimado de n deberá tomar en cuenta el efecto de la vegetación en el retardo del flujo y el incremento de n. En general, la importancia relativa de la vegetación sobre n es una función del tirante del flujo y de la altura, densidad, distribución, y tipo de vegetación. Esta consideración es crucial en el diseño de pequeños canales de drenaje, ya que por lo común éstos no reciben mantenimiento regular. Chow (1959) notó que árboles de 6 a 8 in (0.15 a 0.20 m) de diámetro que crecen sobre los taludes no impiden tanto el flujo como los matorrales si las ramas por encima de los árboles se mantienen recortadas.

Irregularidad de canales Esta terminología se refiere a las variaciones en las secciones transversales de los canales, su forma y su perímetro mojado a lo largo de su eje longitudinal. En canales naturales, tales irregularidades son generalmente el resultado de depósitos o sedimento. En general, las variaciones graduales tienen un efecto insignificante sobre n, pero cambios abruptos pueden ocasionar un valor mucho mayor de n de lo que podría esperarse si se considerara únicamente la superficie rugosa del perímetro del canal.

Obstrucción La presencia de obstrucciones tales como troncos de árbol, deshechos de flujos, atascamientos, pueden tener un impacto significativo sobre el valor de n. El grado de los efectos de tales obstrucciones dependen del número y tamaño de ellas.

Alineamiento de canal Mientras que las curvas de gran radio sin cambios frecuentes en la dirección de curvatura ofrecen una resistencia relativamente pequeña, curvas severas de pequeño radio, incrementan significativamente el valor de n.

Sedimentación y erosión En general la sedimentación y erosión activa, dan variaciones al canal que ocasionan un incremento en el valor de n. Urquhart (1975) señaló que es importante considerar si estos dos procesos están activos y si es probable que permanezcan activos en el futuro.

Nivel del agua y descarga El valor de n para muchos canales tiende a disminuir con un incremento del nivel de agua y de la descarga. Este es el resultado de irregularidades que tienen un impacto crucial sobre el valor de n en niveles bajos cuando no están cubiertos. Sin embargo el valor de n puede incrementarse con un incremento del nivel del agua y la descarga si las orillas del canal son rugosas, pastosas o cubiertas de hierba, o si el nivel se incrementa lo suficiente como para cubrir el plano de la avenida. En inundaciones, el valor de n por lo general varía con la profundidad de la inundación. En tal caso es necesario calcular un valor compuesto de n-procedimiento que será discutido en el siguiente capítulo.

Dados estos comentarios de tipo cualitativo acerca de la variación de n de acuerdo en una serie de factores, ahora es posible estudiar diversos métodos de estimación del valor de n para una situación específica.

Método del servicio de conservación de suelos

El método del servicio de conservación de suelos (SCS) para estimar n, implica la selección de un valor básico de n para un canal uniforme, recto y regular en un material nativo y entonces modificar este valor por la adición de factores de corrección que se determinan mediante una consideración crítica de alguno de los factores enumerados anteriormente (Urquhart, 1975). En este proceso, es necesario que cada factor se considere y evalúe independientemente. El SCS sugiere que la turbulencia de un flujo puede utilizarse como una medida o indicador del grado de retardo; i.e., factores que inducen a un mayor grado de turbulencia podrán resultar también en un incremento de n.

Paso 1: *Selección de una n básica:* en este paso, se selecciona un valor básico para un canal recto, uniforme y suave en sus materiales nativos. El canal debe visualizarse sin vegetación, obstrucciones, cambios en su forma y cambios de alineamiento. Los valores básicos de n sugeridos por el SCS se muestran en la tabla 4.2.

Paso 2: *Modificación por vegetación:* el retraso debido a la vegetación es ocasionado principalmente por el flujo de agua alrededor de troncos, tallas, ramas y sólo en forma secundaria por la reducción del área

TABLA 4.2 Valores básicos de n sugeridos por el servicio de conservación de suelos (Anónimo, 1963b)

Característica del canal	n básico
Canales de tierra	0.02
Canales cortados en roca	0.025
Canales de grava fina	0.024
Canales de grava gruesa	0.028

hidráulica. Para determinar del efecto de la vegetación sobre el retraso, debe considerarse la altura de la vegetación en relación al tirante del flujo, la capacidad de la vegetación a la resistencia de flexión, y el grado en que el flujo es obstruido, la distribución transversal y longitudinal de los diversos tipos de vegetación, las densidades y alturas de la vegetación en los árboles que están siendo considerados, y la estación crítica. Los resultados de la SCS para diversos tipos de vegetación se muestran en la tabla 4.3.

Paso 3: *Modificación para irregularidad en canales:* para determinar la modificación requerida en canales irregulares, se deben considerar tanto los cambios en el área hidráulica como la forma de la sección transversal. Los efectos de cambios en el área hidráulica se deben examinar desde el punto de vista de comparar la magnitud del cambio con el área promedio. Cuando hay grandes cambios en el área, si son graduales y uniformes, resultarán en pequeños valores de modificación, cambios abruptos, darán grandes modificaciones a los valores. En el caso de cambios en la forma del canal, el grado en que el cambio causa el tirante mayor del flujo para cambiar de un lado a otro, es crítico. Cambios en la forma darán grandes valores de modificación en el lado del flujo principal, en distancias cortas que producirán corrientes aguas arriba. La SCS recomienda los valores de modificación para este efecto que se muestran en la tabla 4.4.

La segunda consideración en este paso es el grado de rugosidad o irregularidad de la superficie del perímetro del canal. La superficie existente deberá ser comparada con la superficie suave que se tendría bajo condiciones ideales, y deberá obtenerse con los materiales nativos y con el tirante de flujo especificado. Los resultados de la SCS para este efecto se muestran en la tabla 4.5.

Paso 4: *Modificación por obstrucción:* la selección de los valores de modificación para este factor, se basa en el número y características de las obstrucciones. Las obstrucciones consideradas por la SCS incluyen depósitos, raíces, troncos, ramas. El efecto relativo de la obstrucción que debe considerarse, está dado por lo siguiente: a) el grado en que las obstrucciones reducen el área hidráulica y varían su tirante,

TABLA 4.3 Factores modificantes por vegetación (Anónimo 1963b)

Condiciones de vegetación y flujo comparables con:	Grado del efecto en *n*	Rango de valores modificantes
Crecimientos densos de pastos flexibles o hierbas de los cuales, el pasto bermuda y el pasto azul son ejemplos, en donde el promedio de profundidad del flujo es de 2 a 3 veces la altura de la vegetación. Desvíos causados por pequeños árboles flexibles tales como sauces, algodón silvestre, cedros, en donde el promedio de profundiad del flujo es de 3 a 4 veces la altura de la vegetación.	Bajo	0.005—0.010
Pastos flexibles en donde el promedio de la profundidad del flujo es de 1 a 2 veces la altura de la vegetación. Pastos de tallo corto, hierbas o pequeños árboles con vegetación moderada, donde el promedio de profundidad del flujo es de 2 a 3 veces la altura de la vegetación. Crecimiento de matorrales, relativamente densos, parecidos a los sauces de entre 1 y 2 años, en temporadas de poca vegetación, a lo largo de los taludes del canal, con poca vegetación en el lecho del mismo, en donde el radio hidráulico es mayor que 2 pies (0, 6m)	Medio	0.010—0.025

Condiciones de vegetación y flujo comparables con:	Grado del efecto en *n*	Rango de valores modificantes
Temporadas de poca vegetación, sauces o árboles de algodón silvestre de entre 8 y 10 años, mezclados con algunas hierbas y matorrales de poco follaje, donde el radio hidráulico es mayor que 2 pies (0, 6m).	Alto	0.025—0.050
Temporada de crecimiento de matorrales de sauces de alrededor de 1 año, mezclados con algunas hierbas con mucho follaje, a lo largo de los taludes del canal, con poca vegetación en el lecho del mismo, en donde el radio hidráulico es mayor que 2 pies (0, 6m).		
Pastos flexibles en donde el promedio de la profundidad del flujo es menor que la mitad de la altura de la vegetación.		
Temporada de crecimiento de matorrales de sauces de alrededor de 1 año, mezclados con hierbas de mucho follajes a lo largo del lecho del canal; cualquier valor de radio hidráulico arriba de 10 a 15 pies (3-4, 6m).	Muy alto	0.050—0.100
Temporada de crecimiento de árboles mezclados con hierbas y matorrales, todos con follaje muy denso; cualquier valor de radio hidráulico arriba de 10 o 15 pies /3-4, 6m).		

TABLA 4.4 Factores modificantes por cambios en el tamaño y forma de la sección transversal (Anónimo, 1963b)

Carácter de variaciones en el tamaño y forma de las secciones transversales	Valor modificante
Cambios en el tamaño o forma que ocurren gradualmente	0.000
Secciones grandes y pequeñas alternándose ocasionalmente o cambios en la forma causando un desplazamiento ocasional del flujo principal de lado a lado.	0.005
Secciones grandes y pequeñas alternándose frecuentemente o cambios en la forma causando frecuentes desplazamientos del flujo principal de lado a lado.	0.010—0.015

b) la forma de las obstrucciones (recuérdese que objetos angulares producen mayor turbulencia que los objetos redondeados), y c) la posición y separación de las obstrucciones en las direcciones transversal y longitudinal. Las recomendaciones de la SCS para esta modificación se muestran en la tabla 4.6.

Paso 5: *Modificación por alineamiento de canal:* el valor de modificación para alineamiento de canales se encuentra mediante la adición de los valo-

TABLA 4.5 Factores modificantes por canales de superficie irregular (Anónimo, 1963b).

Grado de irregularidad	Superficies comparables con	Valor modificante
Liso	La mejor, de acuerdo con los materiales involucrados	0.000
Menor	Canales bien dragados; ligeramente erosionados taludes limpios de canales o drenaje de canales.	0.005
Moderada	Canales dragados desde una manera adecuada a escasa; moderadamente empantanado o taludes erosionados de canales o drenaje de canales	0.010
Severa	Márgenes malamente empantanados de canales naturales; malamente erosionado o lados empantanados de canales o drenaje de canales; deformado, mellado, y superficies irregulares de canales excavados en roca.	0.020

TABLA 4.6 Factores modificantes por obstrucción (Anónimo, 1963b)

Efecto relativo de obstrucciones	Valor modificante
Despreciable	0.000
Menor	0.010–0.015
Apreciable	0.020–0.030
Severo	0.040–0.060

TABLA 4.7 Valores modificantes por canales alineados (Anónimo, 1963b)

ℓ_m/ℓ_s	Grado de tortuosidad	Valor modificante
1.0–1.2	Menor	0.00
1.2–1.5	Apreciable	0.15 n'
>1.5	Severo	0.30 n'

res encontrados en los pasos 2, 3 y 4 al valor básico de n, paso 1, para formar el subtotal n'. Se define ℓ_s = longitud recta de la distancia bajo consideración y ℓ_m = longitud del meandro del canal en la longitud considerada. El valor de modificación para alineamiento puede entonces estimarse a partir de la tabla 4.7 para varios valores de la relación ℓ_m/ℓ_s.

Paso 6: *Estimación de n:* Un valor de n puede ser estimado por la sumatoria de los resultados encontrados en los pasos 1 al 5.

El uso del método de las SCS en la estimación de n para un canal natural se demuestra con un ejemplo.

EJEMPLO 4.1

Un canal de dragado tiene una sección transversal que puede ser aproximada a un trapecio con un ancho del fondo de 10 ft (3.0 m) y taludes de 1.5:1. Al nivel máximo el tirante promedio del flujo es de 8.5 ft (2.6 m) y el ancho superficial es de 35.5 ft (10.8 m). El alineamiento del canal tiene un moderado grado de meandro. Mientras que los taludes son bastante regulares, el fondo es desigual e irregular. La variación del área de la sección transversal con distancia longitudinal es moderado. El material a través del cual se puede caracterizar al canal es de arcilla gris con la parte superior del canal franco arcillo limoso. Los taludes del canal están cubiertos con un crecimiento grueso de álamos con un diámetro de 2 a 3 in (0.05 a 0.08 m), grandes sauces y enredaderas trapadoras. Existe también un pequeño crecimiento de maleza sobre el fondo del canal. Dada esta descripción, estímese un valor de n para este canal bajo las condiciones que se presentan en verano cuando la vegetación está llena de follaje.

Solución

Paso	Comentario	Valor modificante
1	Valor básico estimado de n, tabla 4.2	0.02
2	Descripción de la vegetación indica un alto grado de retardo, tabla 4.3	0.8
3	La descripción sugiere un insignificante cambio en el tamaño y forma del canal, tabla 4.4	0.00
4	La descripción indica un moderado grado de irregularidad, tabla 4.5	0.01
5	No se indica ninguna de las obstrucciones, tabla 4.6	0.00
6	Se indica un moderado grado de cambios alineados; por lo tanto. $n' = 0.02 + 0.08 + 0.01 = 0.11$ Valor modificante $= 0.15(0.11) = 0.02$ Tabla 4.7	0.02
	Total estimado $n =$	0.13

Estimación de n por el método de la tabla Un segundo método para estimar n para un canal, implica el uso de tablas de valores. Chow (1959) presentó una tabla extensiva de valores de n para varios tipos de canales, y la información de esta tabla se repite aquí como la tabla 4.8. En esta tabla se establecen valores mínimos, normales y máximos para n, para cada tipo de canal. Los valores subrayados son recomendados para diseño. Puede notarse que los valores normales suponen que el canal recibe mantenimiento regular.

Método fotográfico Fue desarrollado por el U.S. Geological Survey, el cual realizó fotografía de canales de resistencia conocida junto con un sumario de parámetros geométricos e hidráulicos que definen el canal para un gasto específico, el cual es común en la estimación del coeficiente de resistencia (Barnes, 1967). Puede señalarse que el U.S. Geological Survey mantiene un programa de entrenamiento a ingenieros en la estimación de los coeficientes de resistencia de canales. Los resultados de este programa indican que ingenieros entrenados pueden estimar coeficientes de resistencia con una certeza de ± 15% bajo muchas condiciones (Barnes, 1967).

Las figuras de la 4.3 a la 4.15 son un conjunto de fotografías y tablas tomadas de Barnes (1967) para canales con un amplio rango de coeficientes de resistencia. Nota: muchas oficinas de campo del U.S. Geological Survey tienen

TABLA 4.8 Valores del coeficiente de rugosidad n (Chow, 1959)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
A. Conductor cerrados fluyendo llenos parcialmente			
A-1. Metal			
a. Bronce, liso	0.009	0.010	0.013
b. Acero			
1. "Lockbar" y soldado	0.010	0.012	0.014
2. Riveteado y en espiral	0.013	0.016	0.017
c. Acero fundido			
1. Forrado	0.010	0.013	0.014
2. Sin forrar	0.011	0.014	0.016
d. Acero comercial			
1. Negro	0.012	0.014	0.015
2. Galvanizado	0.013	0.016	0.017
e. Metal corrugado			
1. Drenaje inferior	0.017	0.019	0.021
2. Drenaje de tormenta	0.021	0.024	0.030
A-2. No metal			
a. Lucita	0.008	0.009	0.010
b. Vidrio	0.009	0.010	0.013
c. Cemento			
1. Pulido de superficie	0.010	0.011	0.013
2. Mortero	0.011	0.013	0.015
d. Concreto			
1. Alcantarilla, recta y libre de desperdicios	0.010	0.011	0.013
2. Alcantarilla con codos, conexiones y algunos desperdicios	0.011	0.013	0.014
3. Terminado	0.011	0.012	0.014
4. Coloca con válvulas, entradas, etc., recto	0.013	0.015	0.017
5. Sin terminar, con encofrado metálico	0.012	0.013	0.014
6. Sin terminar, con encofrado pulido de madera	0.012	0.014	0.016
7. Sin terminar, con encofrado común de madera	0.015	0.017	0.020
e. Madera			
1. Machihembrada	0.010	0.012	0.014
2. Laminada, tratada	0.015	0.017	0.020
f. Cerámica			
1. Drenaje común de tejas	0.011	0.013	0.017
2. Cloaca vitrificada	0.011	0.014	0.017
3. Cloaca vitrificada con válvulas, entradas, etc.	0.013	0.015	0.017

TABLA 4.8 Valores del coeficiente de rugosidad n (Chow, 1959) (continuación)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
4. Dren inferior vitrificado con juntas abiertas	0.014	0.016	0.018
g. Mampostería de ladrillo			
1. Vidriada	0.011	0.013	0.015
2. Revestida con mortero de cemento	0.012	0.015	0.017
h. Colectores sanitarios revestidos con desechos de aguas negras, con codos y conexiones	0.012	0.013	0.016
i. Solera pavimentada, cloaca de fondo liso	0.016	0.019	0.020
j. Mampostería cepillada, cementada	0.018	0.025	0.030
B. Canales revestidos o fabricados			
B-1. Metal			
a. Superficie de acero liso			
1. Sin pintar	0.011	0.012	0.014
2. Pintada	0.012	0.013	0.017
b. Corrugado	0.021	0.025	0.030
B-2. No metal			
a. Cemento			
1. Limpio en la superficie	0.010	0.011	0.013
2. Mortero	0.011	0.013	0.015
b. Madera			
1. Cepillada sin tratar	0.010	0.012	0.014
2. Cepillada, creosotada	0.011	0.012	0.015
3. Sin cepillar	0.011	0.013	0.015
4. Planchas con listones	0.012	0.015	0.018
5. Revestida con papel impermeable	0.010	0.014	0.017
c. Concreto			
1. Terminado con cuchara	0.011	0.013	0.015
2. Terminado con lechada	0.013	0.015	0.016
3. Terminado con grava en el fondo	0.015	0.017	0.020
4. Sin terminar	0.014	0.017	0.020
5. Gunita en sección correcta	0.016	0.019	0.023
6. Gunita en sección ondulada	0.018	0.022	0.025
7. Sobre roca excavada pareja	0.017	0.020	
8. Sobre roca excavada irregular	0.022	0.027	
d. Fondo de concreto terminado con lechada con los costados de			
1. Piedra acomodada en mortero	0.015	0.017	0.020
2. Piedra volcada en mortero	0.017	0.020	0.024
3. Mampostería de piedra partida cementada y revocada	0.016	0.020	0.024

TABLA 4.8 Valores del coeficiente de rugosidad n (Chow, 1959) (continuación)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
4. Mampostería de piedra partida cementada	0.020	0.025	0.030
5. Piedra partida suelta o riprap	0.020	0.030	0.035
e. Fondo de grava con costado de			
1. Hormigón encofrado	0.017	0.020	0.025
2. Piedra volcada en mortero	0.020	0.023	0.026
3. Piedra partida suelta o riprap	0.023	0.033	0.036
f. Ladrillo			
1. Vidriado	0.011	<u>0.013</u>	0.015
2. En mortero de cemento	0.012	<u>0.015</u>	0.018
g. Mampostería			
1. Piedra partida cementada	0.017	0.025	0.030
2. Piedra partida suelta	0.023	0.032	0.035
h. Piedra cortada y acomodada	0.013	0.015	0.017
i. Asfalto			
1. Liso	0.013	0.013	
j. Revestimiento vegetal	0.030		0.500
C. Excavado o dragado			
a. Tierra, recto y uniforme			
1. Limpio, terminado recientemente	0.016	0.018	0.020
2. Limpio con cierto uso	0.018	<u>0.022</u>	0.025
3. Grave, sección uniforme, limpio	0.022	0.025	0.030
4. Con musgo corto, poca hierba	0.022	0.027	0.033
b. Tierra, curvo y lento			
1. Sin vegetación	0.023	0.025	0.030
2. Musgo, lagunos pastos	0.025	0.030	0.033
3. Pastos densos o plantas acuáticas en canales profundos	0.030	0.035	0.040
4. Fondo de tierra y costados de piedra partida	0.028	0.030	0.035
5. Fondo pedregoso y bancos con pastos	0.025	0.035	0.040
6. Fondos de cantoś rodados y costados limpios	0.030	0.040	0.050
c. Excavado con pala o dragado			
1. Sin vegetación	0.025	0.028	0.033
2. Poco arbustos en los bancos	0.035	0.050	0.060
d. Roca cortada			
1. Lisa y uniforme	0.025	0.035	0.040
2. Dentada o irregular	0.035	0.040	0.050
C. Canales sin mantenimiento, pastos y arbustos sin cortar			

✓ **TABLA 4.8 Valores del coeficiente de rugosidad n (Chow, 1959) (continuación)**

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
1. Pasto densos, altos como la profundidad del flujo	0.050	0.080	0.120
2. Fondo limpio, arbustos en los lados	0.040	0.050	0.080
3. Igual, al más alto nivel del flujo	0.045	0.070	0.110
4. Arbustos densos, nivel alto	0.080	0.100	0.140
D. Cursos naturales			
D-1. Cursos menores (ancho superior al nivel de crecida <100 ft).			
a. Cursos en planicie			
1. Limpio, recto, nivel lleno, sin fallas o pozos profundos	0.025	0.030	0.033
2. Igual que arriba, pero más piedras y pastos	0.030	0.035	0.040
3. Limpio, curvado, algunos pozos y bancos	0.033	0.040	0.045
4. Igual que arriba, pero algunos pastos y piedras	0.035	0.045	0.050
5. Igual que arriba, nivel inferiores, más pendiente y sección inefectivas.	0.040	0.048	0.055
Igual que 4, pero más piedras	0.045	0.050	0.060
7. Tramos sucios, con pastos y pozos profundos	0.050	0.070	0.080
8. Tramos con muchos pastos, pozos profundos o recorridos de la crecida con mucha madera y arbustos bajos.	0.075	0.100	0.150
b. Cursos en montaña, sin vegetación en el canal, laderas con pendientes usualmente pronunciadas, árboles y arbustos a lo largo de las laderas sumergidos para niveles altos.			
1. Fondo: grava, canto rodado y algunas rocas	0.030	0.040	0.050
2. Fondo: cantos rodados con grandes rocas	0.040	0.050	0.070
D-2. Planicie crecida			
a. Pasturas, sin arbustos			
1. Pastos cortos	0.025	0.030	0.035
2. Pastos altos	0.030	0.035	0.050

Valores del coeficiente de rugosidad *n* (Chow, 1959) (continuación)

Tipo de canal y descripción	Mínimo	Normal	Máximo
b Áreas cultivadas			
1. Sin cultivo	0.020	0.030	0.040
2. Cultivos maduros alineados	0.025	0.035	0.045
3. Campo de cultivos maduros	0.030	0.040	0.050
c. Arbustos			
1. Arbustos escasos, muchos pastos	0.035	0.050	0.070
2. Pequeños arbustos y árboles, en invierno	0.035	0.050	0.060
3. Pequeños arbustos y árboles, en verano	0.040	0.060	0.080
4. Arbustos medianos a densos, en invierno	0.045	0.070	0.110
5. Arbustos medianos a densos en verano	0.070	0.100	0.160
d. Árboles			
1. Sauces densos, en verano y rectos	0.110	0.150	0.200
2. Tierra clara con ramas, sin brotes	0.030	0.040	0.050
3. Igual que arriba, pero con gran crecimiento de brotes.	0.050	0.060	0.080
4. Grupos grandes de madera, algunos árboles caídos, poco crecimiento inferior y nivel de la inundación por debajo de las ramas	0.080	0.100	0.120
5. Igual que arriba, pero con el nivel de inundación alcanzando las ramas	0.100	0.120	0.160
D-3. Cursos de agua importantes (ancho superior a nivel de inundación > 100 ft.) Los valores *n* son menores que los de los cursos menores de descripción similar, ya que los bancos ofrecen menor resistencia efectiva			
a. Sección regular sin rocas y arbustos	0.025		0.060
b. Sección irregular y áspera	0.035		0.100

NOTA: En proyectos se recomiendan los valores subrayados.

estereoscopios, con los cuales se obtiene una vista tridimensional de estos canales. Todos los canales descritos en estas figuras, son considerados estables y siguen el siguiente criterio:

1. Los sitios fueron estudiados únicamente después de que ocurrió una gran inundación. Así, las fotografías representan condiciones en un canal inmediatamente después de una inundación.

2. El gasto pico en el canal especificado, se determinó mediante una medida métrica actual o por una relación nivel-gasto.

3. Dentro de la orilla, estuvieron disponibles marcas de altura del agua para definir el perfil de la superficie del agua y el gasto pico.

4. En la vecindad de la estación de aforo, en la cual se determinó el gasto pico el canal fue uniforme.

5. El gasto pico fue confinado dentro de las orillas del canal.

Los coeficientes de resistencia de Manning presentados en las figuras 4.3 a 4.15 fueron estimado a partir de las medidas de gasto, los perfiles de la superficie del agua, y las propiedades de las orillas definidas por más de dos secciones transversales en cada caso. Para un caso en que hay N secciones transversales.

$$n = \frac{\phi}{Q}\left\{\frac{(h+h_u)_1 - (h+h_u)_N - \sum_{j=2}^{N}(k\,\Delta h_u)_{j-1,j}}{\sum_{j=2}^{N}\frac{L_{j-1,j}}{(AR^{2/3})_{j-1}(AR^{2/3})_j}}\right\}^{1/2} \tag{4.3.11}$$

donde, con referencia a la figura 4.16, h = elevación de la superficie del agua en una sección con respecto a un plano de referencia común a todas las secciones, $(\Delta h_u)_{j-1,j}$ = cambio en la carga de velocidad entre las secciones $j-1$ y j, $h_u = \alpha\bar{u}^2/2g$ = carga de velocidad en la sección, k = un coeficiente para cuantificar la no uniformidad del canal ($k = 0$ para una orilla uniforme: $k = 0.5$ para una orilla no uniforme), h_f = pérdida de energía ocasionada por la fricción de la frontera, ϕ = un coeficiente para el sistema de unidades utilizado ($\phi = 1.49$ para el sistema inglés y $\phi = 1.00$ para el sistema SI), y $L_{j-1,j}$ = distancia entre las secciones $j-1$ y j.

Medida de velocidad Desde un punto de vista teórico, un valor del coeficiente de resistencia, puede estimarse a partir de medidas de velocidad cuando el perfil de velocidad depende de la rugosidad ponderada del perímetro. En flujos hidráulicamente rugosos, la distribución vertical de velocidades puede aproximarse mediante

$$u = 5.75\,u_*\log\frac{30y}{k_s} \tag{4.3.12}$$

donde y = distancia desde la frontera del fondo y k_s = rugosidad ponderada. Dado que $u_{0.2}$ = velocidad a dos décimas del tirante, i.e., a $0.8D$ sobre el fondo donde D = tirante del flujo y $u_{0.8}$ = velocidad a 8 décimas del tirante, por

Área de drenaje: 70.3 mi² (182 km²)

Fecha de avenida: Mayo 11, 1948

Gasto pico: 768 ft³/s (21.7 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.026

Descripción del canal: fondo y bordos compuestos de arcilla. Bordos limpios excepto para pasto corto y expuesto a raíces de árboles en algunos lugares.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho Superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft(m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
1	280	52	5.4	4.87	2.74	—	—
	(26.0)	(16)	(1.6)	(1.48)	(0.835)		
2	273	51	5.4	4.82	2.82	257	0.08
	(25.4)	(16)	(1.6)	(1.47)	(0.860)	(78.3)	(0.02)
3	279	52	5.4	4.97	2.76	202	0.05
	(25.9)	(16)	(1.6)	(1.51)	(0.841)	(61.6)	(0.02)

a)

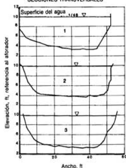
FIGURA 4.3 (a) Ramificación india bajo la presa Atwood cerca de New Cumberland, Ohio. (*Barnes, 1967*). (b) Croquis de planta y secciones transversales, ramificación india bajo la presa Atwood, cerca de New Cumberland, Ohio. (*Barnes, 1967*). (c) Sección 329 del bordo derecho, ramificación india bajo la presa Atwood, cerca de New Cumberland, Ohio (*Barnes, 1967*) (d) Sección 327 del bordo derecho, ramificación india bajo la presa Atwood, cerca de New Cumberland, Ohio. (*Barnes, 1967*).

n=0.026

CROQUIS DE PLANTA



SECCIONES TRANSVERSALES



(b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 174 mi² (451 km²)

Fecha de avenida: Mayo 2, 1954

Gasto pico: 1860 ft³/s (53 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.030

Descripción del canal: Fondo consistente de arena y arcilla. Los bordos son generalmente suaves y libres de desarrollo vegetal durante las avenidas.

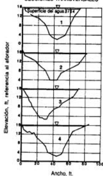
Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
1	528	72	7.4	6.7	3.46	—	—
	(49.1)	(22)	(2.3)	(2.0)	(1.05)		
2	502	80	6.3	5.9	3.71	113	0.09
	(46.6)	(24)	(1.9)	(1.8)	(1.13)	(34.4)	(0.03)
3	497	69	7.2	6.6	3.74	110	0.06
	(46.2)	(21)	(2.2)	(2.0)	(1.14)	(33.5)	(0.02)
4	497	78	6.4	5.9	3.74	134	0.05
	(46.2)	(24)	(2.0)	(1.8)	(1.14)	(40.8)	(0.02)

a)

FIGURA 4.4 (*a*) Salt Creek en Roca, Nebraska. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de la planta y secciones transversales, Salt Creek en Roca, Nebraska (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 824 aguas abajo, Salt Creek en Roca, Nebraska. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 825 aguas abajo, Salt Creek en Roca, Nebraska (*Barnes, 1967*).

n = 0.030


CROQUIS DE PLANTA
1
2
3
4


SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua 2/7/64
1
2
3
4
Elevación, ft, referencia al aforador
0
4
8
12
16
20
40
60
80
100
Ancho, ft.

b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 3140 mi² (8100 km²)

Fecha de avenida: Marzo 24, 1950; Abril 3, 1950

Gasto pico: 1060 ft³/s (30 m³/s); 684 ft³/s (19 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.032; n = 0.036

Descripción del canal: Fondo consistente de arena y grava. El bordo izquierdo es de roca y el bordo derecho es principalmente de grava.

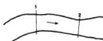
Sección	Área, ft² (m²)	Ancho Superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
				Marzo 24, 1950			
1	312	95	3.3	3.12	3.40	—	—
	(29.0)	(29)	(1.0)	(0.951)	(1.04)		
2	297	84	3.5	3.45	3.57	202	0.24
	(27.6)	(26)	(1.1)	(1.05)	(1.09)	(61.6)	(0.073)
				Abril 3, 1950			
1	235	92	2.6	2.52	2.91	—	—
	(21.8)	(28)	(0.79)	(0.768)	(0.887)		
2	249	81	3.1	2.95	2.75	202	0.23
	(23.1)	(25)	(0.94)	(0.899)	(0.838)	(61.6)	(0.070)

a)

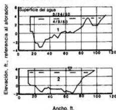
FIGURA 4.5 (*a*) Río Chama de Chamita, Nuevo México (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, río Chama cerca de Chamita, Nuevo México (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 550 aguas abajo del bordo derecho, río Chama cerca de Chamita, Nuevo México. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 547 aguas arriba a lo largo del bordo derecho, río Chama cerca de Chamita, Nuevo México (*Barnes, 1967*).

n = 0.032: 0.036

CROQUIS DE PLANTA



SECCIONES TRANSVERSALES



Ancho, ft.

(b)



c)



d)

Área de drenaje: 6230 mi² (16,000 km²)

Fecha de avenida: Marzo 24, 1950

Gasto pico: 1280 ft³/s (36.2 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado : n = 0.032

Descripción del canal: Fondo y bordos consistentes de cantos rodados lisos de 4-10 in. (10-25 cm) de diámetro, diámetro medio de 6 in. (15 cm). Unas cuantas piedras grandes por lo mucho de 18 in. (46 cm) de diámetro.

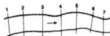
Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caida entre las secciones ft (m)
1	484	189	2.6	2.55	2.65	—	—
	(45.0)	(57.6)	(0.79)	(0.777)	(0.808)		
2	408	192	2.1	2.12	3.14	258	0.37
	(37.9)	(58.5)	(0.64)	(0.646)	(0.957)	(78.6)	(0.11)
3	384	154	2.6	2.49	3.34	317	0.50
	(35.7)	(46.9)	(0.79)	(0.759)	(1.02)	(96.6)	(0.15)
4	449	194	2.3	2.30	2.86	294	0.31
	(41.7)	(59.1)	(0.70)	(0.701)	(0.872)	(89.6)	(0.094)
5	420	204	2.1	2.06	3.05	370	0.63
	(39.0)	(62.2)	(0.64)	(0.628)	(0.930)	(113)	(0.19)
6	381	207	1.8	1.84	3.36	333	0.72
	(35.4)	(63.1)	(0.55)	(0.561)	(1.02)	(101)	(0.22)
7	308	191	1.6	1.61	4.16	314	1.06
	(28.6)	(58.2)	(0.49)	(0.491)	(1.27)	(95.7)	(0.32

a)

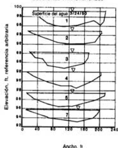
FIGURA 4.6 (a) Río Salt debajo de la presa Stewart Mountain, Arizona (*Barnes, 1967*) (b) Croquis de planta y secciones transversales, río Salt debajo de la presa Stewart Mountain, Arizona (*Barnes, 1967*) (c) Aguas arriba a lo largo del bordo izquierdo, río Salt debajo de la presa Stewart Mountain, Arizona (*Barnes, 1967*) (d) Sección 818 aguas abajo a lo largo del bordo izquierdo, río Salt presa Stewart Mountain, Arizona (*Barnes, 1967*).

n = 0.032

CROQUIS DE PLANTA



SECCIONES TRANSVERSALES



b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 103 mi² (267 km²)

Fecha de avenida: Junio 22, Feb. 13, Feb. 14, 1959

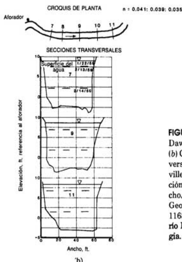
Gasto pico: 2260 ft³/s (64.0 m³/s); 1850 ft³/s (52.4 m³/s); 515 ft³/s (14.6 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: $n = 0.041$; $n = 0.039$; $n = 0.035$

Descripción del canal: Fondo de arena y grava con varios árboles caídos en el tramo. Bordos alineados con árboles colgados y maleza.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft(m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
			Ene. 22, 1959				
7	618	60	10.3	8.15	3.66	—	—
	(57.4)	(18)	(3.14)	(2.48)	(1.12)		
8	621	66	9.4	7.77	3.64	316	0.22
	(57.7)	(20)	(2.9)	(2.37)	(1.11)	(96.3)	(0.067)
9	619	63	9.8	8.18	3.65	286	0.18
	(57.5)	(19)	(3.0)	(2.49)	(1.11)	(87.2)	(0.055)
10	610	63	9.7	7.77	3.70	293	0.14
	(56.7)	(19)	(3.0)	(2.37)	(1.13)	(89.3)	(0.043)
11	622	66	9.4	7.89	3.63	203	0.17
	(57.8	(20)	(2.9)	(2.40)	(1.11)	(61.9)	(0.052)
			Feb. 13, 1959				
7	528	57	9.3	7.37	3.50	—	—
	(49.1)	(17)	(2.8)	(2.25)	(1.07)		
8	531	64	8.3	6.95	3.48	316	0.19
	(49.3)	(20)	(2.5)	(2.12)	(1.06)	(96.3)	(0.058)
9	532	59	9.0	7.56	3.48	286	0.20
	(49.4)	(18)	(2.7)	(2.30)	(1.06)	(87.2)	(0.061)
10	525	61	8.6	7.00	3.52	293	0.14
	(48.8)	(19)	(2.6)	(2.13)	(1.07)	(89.3)	(0.043)
11	530	62	8.6	7.10	3.49	203	0.14
	(49.2)	(19)	(2.6)	(2.16)	(1.06)	(61.9)	(0.043)
			Feb. 14, 1959				
7	240	51	4.7	4.04	2.15	—	—
	(22.3)	(16)	(1.4)	(1.23)	(0.655)		
8	209	59	3.5	3.27	2.46	316	0.16
	(19.4)	(18)	(1.1)	(0.997)	(0.750)	(96.3)	(0.049)
9	235	53	4.4	4.04	2.19	286	0.17
	(21.8)	(16)	(1.3)	(1.23)	(0.668)	(87.2)	(0.052)
10	203	59	3.4	3.19	2.54	293	0.19
	(18.6)	(18)	(1.0)	(0.972)	(0.774)	(89.3)	(0.058)
11	219	55	4.0	3.59	2.35	203	0.15
	(20.3)	(17)	(1.2)	(1.09)	(0.716)	(61.9)	(0.046)

(a)



b)

FIGURA 4.7 (*a*) Río Etowah cerca de Dawsonville, Georgia. (*Barnes, 1967.*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, río Etowah cerca de Dawsonville, Georgia. (*Barnes, 1967.*) (*c*) Sección 1167 aguas abajo del bordo derecho, río Etowah cerca de Dawsonville, Georgia. (*Barnes, 1967.*) (*d*) Sección 1168 aguas arriba del bordo derecho, río Etowah cerca de Dawsonville, Georgia. (*Barnes, 1967*).



c)



d)

Área de drenaje: 388 mi^2 (1000 km^2)

Fecha de avenida: Junio 1, 1948

Gastos pico: 3220 ft^3/s (91.2 m^3/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.041

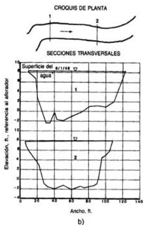
Descripción del canal: el fondo está compuesto de arena, grava y rocas angulares. Los bordos son irregulares, erosionados y tienen una espesa cubierta de pasto y árboles pequeños. Aunque el canal entre las secciones 1 y 2 es recto, el canal se curvea pronunciadamente por encima de la extensión y moderadamente abajo.

Sección	Área, ft^2 (m^2)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
1	818	114	7.2	6.79	3.94	—	—
	(76.0)	(34.7)	(2.2)	(2.07)	(1.20)		
2	735	102	7.2	6.87	4.38	315	0.38
	(68.3)	(31.1)	(2.2)	(2.09)	(1.34)	(96.0)	(0.12)

a)

FIGURA 4.8 (*a*) Riachuelo Bull cerca de Ira, Texas. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, riachuelo Bull cerca de Ira, Texas (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 342 aguas abajo, riachuelo Bull cerca de Ira, Texas. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 345 aguas arriba, riachuelo Bull cerca de Ira, Texas. (*Barnes, 1967*).

$n = 0.041$


CROQUIS DE PLANTA
1
2
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua
6/1/48
1
2
Elevación, ft., referencia al aforador
10
8
6
4
2
0
-2
10
8
6
4
2
0
-2
-4
0
20
40
60
80
100
120
140
Ancho, ft.

b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 24 mi² (62 km²)

Fecha de avenida: Feb. 7, 1958

Gastos pico: 840 ft³/s (23.8 m³/s)

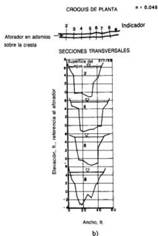
Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.045

Descripción del canal: fondo consistente de arena y grava. Ambos bordos están alineados con árboles en la parte de arriba y abajo con la línea de agua.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
2	215	45	4.8	4.21	3.93	—	—
	(20.0)	(14)	(1.5)	(1.28)	(1.20)		
3	212	42	5.0	4.20	3.99	78	0.21
	(19.7)	(13)	(1.5)	(1.28)	(1.22)	(24)	(0.064)
4	227	50	4.5	4.02	3.73	124	0.35
	(21.1)	(15)	(1.4)	(1.23)	(1.14)	(37.8)	(0.11)
5	202	43	4.7	4.02	4.19	92	0.21
	(18.8)	(13)	(1.4)	(1.23)	(1.28)	(28)	(0.064)
6	187	41	4.6	3.74	4.52	71	0.35
	(17.4)	(12)	(1.4)	(1.14)	(1.38)	(22)	(0.11)
7	200	48	4.2	3.64	4.23	88	0.11
	(18.6)	(15)	(1.3)	(1.11)	(1.29)	(27)	(0.033)
8	198	45	4.4	3.94	4.27	149	0.38
	(18.4)	(14)	(1.3)	(1.20)	(1.30)	(45.4)	(0.12)

a)

FIGURA 4.9 (*a*) Riachuelo Murder cerca de Monticello, Georgia. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, riachuelo Murder cerca de Monticello, Georgia (*Barnes, 1967*) (*c*) Secciones 1176 aguas arriba del bordo derecho, riachuelo Murder cerca de Monticello, Georgia (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 1177 aguas abajo del bordo, riachuelo Murder cerca de Monticello, Georgia. (*Barnes, 1967*).


CROQUIS DE PLANTA
n = 0.045
Indicador
Aforador en adamios sobre la cresta
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua
Elevación, ft., referencia al aforador
Ancho, ft.

b)



c)



d)

Área de drenaje: 233 mi² (604 km²)

Fecha de avenida: Junio 13; Oct. 7, 1952

Gasto pico: 1200 ft³/s (34.0 m³/s); 64.8 ft³/s (1.83 m³/s)

Coeficiente de Rugosidad estimado: n = 0.045; n = 0.073

Descripción del canal: fondo y bordos consistentes de rocas lisas y redondeadas del orden de 1 ft. (0.305 m) de diámetro. Algo de maleza se encontró debajo de las elevaciones del agua en junio 13 de 1952.
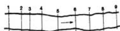
Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
				Junio 13, 1952			
1	184	47	3.9	3.70	6.52	—	—
	(17.1)	(14)	(1.2)	(1.13)	(1.99)		
3	171	49	3.5	3.33	7.02	88	0.67
	(15.9)	(15)	(1.1)	(1.02)	(2.14)	(26.8)	(0.20)
5	173	55	3.1	3.02	6.95	109	1.04
	(16.1)	(17)	(0.94)	(0.920)	(2.12)	(33.2)	(0.317)
7	173	48	3.6	3.43	6.95	117	1.10
	(16.1)	(15)	(1.1)	(1.05)	(2.12)	(35.7)	(0.335)
9	183	55	3.3	3.22	6.56	116	1.04
	(17.0)	(17)	(1.0)	(0.982)	(2.00)	(35.4)	(0.317)
				Oct. 7, 1952			
1	36	38	1.0	0.95	1.79	—	—
	(3.3)	(12)	(0.30)	(0.29)	(0.546)		
3	38	34	1.1	1.10	1.70	88	0.32
	(3.5)	(10)	(0.34)	(0.335)	(0.518)	(26.8)	(0.098)
5	34	32	1.1	0.82	1.90	109	0.84
	(3.2)	(9.8)	(0.34)	(0.25)	(0.579)	(33.2)	(0.26)
7	34	39	0.9	0.86	1.91	117	1.28
	(3.2)	(12)	(0.27)	(0.26)	(0.582)	(35.7)	(0.390)
9	31	41	0.8	0.76	2.08	116	1.12
	(2.9)	(12)	(0.24)	(0.23)	(0.634)	(35.4)	(0.341)

(a)

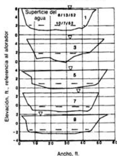
FIGURA 4.10 (*a*) Río Provo cerca de Hailstone, Utah. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, río Provo cerca de Hailstone, Utah (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 770 aguas arriba, río Provo cerca de Hailstone, Utah (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 769 aguas abajo, río Provo cerca de Hailstone, Utah (*Barnes, 1967*).

n = 0.045: 0.073

CROQUIS DE PLANTA



SECCIONES TRANSVERSALES



b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 399 mi² (1030 km²)

Fecha de avenida: Mayo 26, 1958

Gasto pico: 1380 ft³/s (39.1 m³/s)

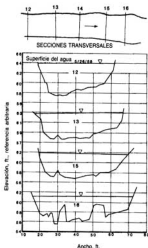
Coeficiente de rugosidad estimado: $n = 0.050$

Descripción del canal: fondo y bordos están compuestos de piedras angulares del orden de 2.0 ft. (0.61 m) de diámetro.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
12	200 (18.6)	43 (13)	4.6 (1.4)	4.22 (1.29)	6.90 (2.10)	—	—
13	206 (19.1)	50 (15)	4.1 (1.2)	3.83 (1.17)	6.70 (2.04)	47 (14)	0.85 (0.26)
14	183 (17.0)	52 (16)	3.5 (1.1)	3.29 (1.00)	7.54 (2.30)	39 (12)	0.65 (0.20)
15	184 (17.1)	51 (16)	3.6 (1.1)	3.36 (1.02)	7.50 (2.29)	46 (14)	0.65 (0.20)
16	184 (17.1)	55 (17)	3.3 (1.0)	2.69 (0.820)	7.50 (2.29)	32 (9.8)	0.60 (0.18)

(a)

FIGURA 4.11 (*a*) Riachuelo Limpio cerca de Golden, Colorado. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, riachuelo Limpio cerca de Golden, Colorado. (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 1199 aguas arriba del bordo izquierdo, riachuelo Limpio cerca de Golden, Colorado. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 1198 aguas arriba, riachuelo Limpio cerca de Golden, Colorado. (*Barnes, 1967*).


CROQUIS DE PLANTA
n = 0.050
12
13
14
15
16
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua
6/26/58
12
13
15
16
Elevación, ft., referencia arbitraria
Ancho, ft.

b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 528 mi² (1370 km²)

Fecha de avenida: Jul. 24, Jul. 25, 1951

Gasto pico: 3840 ft³/s (109 m³/s); 1830 ft³/s (51.8 m³/s)

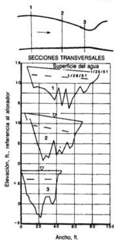
Coeficiente de Rugosidad estimado: $n = 0.053$; $n = 0.079$

Descripción del canal: fondo compuesto de grandes piedras angulares. Bordos consistentes de roca expuesta, piedras y algunos árboles.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
				Ene. 24, 1951			
1	401	81	5.0	4.27	9.59	—	—
	(37.2)	(25)	(1.5)	(1.30)	(2.92)		
2	384	65	5.9	5.02	10.00	102	1.80
	(35.7)	(20)	(1.8)	(1.53)	(3.05)	(31.1)	(0.549)
3	295	45	6.6	5.27	13.02	62	3.10
	(27.4)	(14)	(2.0)	(1.61)	(3.97)	(18.9)	(0.945)
				Ene. 25, 1951			
1	271	76	3.6	3.09	6.75	—	—
	(25.2)	(23)	(1.1)	(0.942)	(2.06)		
2	236	51	4.6	3.88	7.75	102	2.75
	(21.9)	(16)	(1.4)	(1.18)	(2.36)	(31.1)	(0.838)
3	211	38	5.6	4.45	8.67	62	2.55
	(19.6)	(12)	(1.7)	(1.36)	(2.64)	(18.9)	(0.77[illegible])

(a)

FIGURA 4.12 (*a*) Riachuelo Cache cerca de Lower Lake, California. (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, riachuelo Cache cerca de Lower Lake, California. (*Barnes, 1967*) (*c*) Sección 1191 aguas abajo del bordo izquierdo, riachuelo Cache cerca de Lower Lake, California. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 1193 aguas abajo, riachuelo Cache cerca de Lower Lake, California. (*Barnes, 1967*).


CROQUIS DE PLANTA
n = 0.053: 0.079
1
2
3
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua
1/25/51
1/26/51
1
2
3
Elevación, ft., referencia al aforador
15
10
5
0
10
5
0
+5
0
-5
0
20
40
60
80
100
Ancho, ft.

b)


1

c)



d)

Área de drenaje: 89 700 mi² (232 000 km²)

Fecha de avenida: Mayo 22, 1949

Gasto pico: 406 000 ft³/s (11 500 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.024

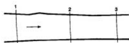
Descripción del canal: fondo consistente de canto rodado y grava cubiertas de limo. La recta y el paso del bordo izquierdo está compuesto de canto rodado cementado y grava. La pendiente suave del bordo derecho consiste de cantos rodados arreglados con grava y está libre de vegetación.

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre las secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
1	47,100	1800	26.2	26.16	8.65	—	—
	(4380)	(549)	(7.99)	(7.97)	(2.64)		
2	49,000	1650	29.7	29.56	8.28	2500	0.48
	(4550)	(503)	(9.05)	(9.01)	(2.52)	(762)	(0.15)
3	49,600	1760	28.2	28.10	8.17	2500	0.49
	(4610)	(536)	(8.60)	(8.56)	(2.49)	(762)	(0.15)

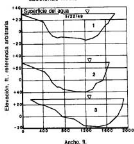
a)

FIGURA 4.13 (*a*) **Río Columbia en Vernita, Washington.** (*Barnes, 1967*) (*b*) **Croquis de planta y secciones transversales, río Columbia en Vernita, Washington.** (*Barnes, 1967*) (*c*) **Sección 66 aguas arriba a lo largo del bordo derecho, río Columbia en Vernita, Washington** (*Barnes, 1967*) (*d*) **Sección 67 aguas arriba de la parte superior del bordo, río Columbia en Vernita, Washington.** (*Barnes, 1967*).

CROQUIS DE PLANTA n = 0.024



SECCIONES TRANSVERSALES



b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 181 mi^2 (469 km^2)

Fecha de avenida: Mayo 17, 1950

Gasto pico: 1950 ft^3/s (55.2 m^3/s)

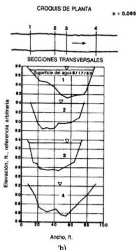
Coeficiente de rugosidad estimado: n = 0.065

Descripción del canal: canal totalmente recto compuesto de piedras grandes con árboles a lo largo de la parte superior de los bordos.

Sección	Área, ft^2 (m^2)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico ft (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre secciones ft (m)	Caída entre las secciones ft (m)
1	308	78	4.0	3.90	6.33	—	—
	(28.6)	(24)	(1.2)	(1.19)	(1.93)		
2	263	64	4.1	3.98	7.41	200	3.40
	(24.4)	(20)	(1.2)	(1.21)	(2.26)	(61)	(1.04)
3	309	63	4.9	4.68	6.31	40	0.50
	(28.7)	(19)	(1.5)	(1.43)	(1.92)	(12)	(0.15)
4	327	78	4.2	4.09	5.96	180	1.55
	(30.4)	(24)	(1.3)	(1.25)	(1.82)	(55)	(0.47)

a)

FIGURA 4.14 **(*a*) Río Merced en Happy Isles Bridge, cerca de Yosemite, California** (*Barnes, 1967*) **(*b*) Croquis de planta y secciones transversales, río Merced en Happy Isles Bridge, cerca de Yosemite, California.** (*Barnes, 1967*) **(*c*) Sección 1196 aguas abajo, río Merced en Happy Islas Bridge, cerca de Yosemite, California** (*Barnes, 1967*) **(*d*) Sección 1197 aguas arriba del bordo derecho, río Merced en Happy Isles Bridge, cerca de Yosemite, California** (*Barnes, 1967*).


CROQUIS DE PLANTA
n = 0.066
1
2
3
4
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua 6/17/60
1
2
3
4
Elevación, ft., referencia arbitraria
0
20
40
60
80
100
Ancho, ft.

(b)



(c)



(d)

Área de drenaje: 64.0 mi² (166 km²)

Fecha de avenida: Feb. 14, 1950

Gasto pico: 1480 ft³/s (41.9 m³/s)

Coeficiente de rugosidad estimado: $n = 0.070$

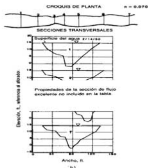
Descripción del canal: fondo de arena fina y limo. Bordos irregulares con total desarrollo denso de 2 a 8 in. (5 a 20 cm) de árboles sobre los bordos encima y particularmente en la parte baja del bordo izquierdo. Secciones de extensión 1, 2, 5, 6, 7 se utilizan para determinar el coeficiente de rugosidad. Puente apoyado de la constricción en la sección 3.

L

Sección	Área, ft² (m²)	Ancho superficial ft (m)	Tirante medio ft (m)	Radio hidráulico (m)	Velocidad media ft/s (m/s)	Distancia entre secciones ft (m)	Caída entre secciones ft (m)
1	888	115	7.7	7.10	1.67	—	—
	(82.5)	(35.0)	(2.3)	(2.16)	(0.509)		
2	830	122	6.8	6.48	1.78	90	0.05
	(77.1)	(37.2)	(2.1)	(1.98)	(0.543)	(27)	(0.015)
3	591	52	11.4	8.23	2.50	95	0.10
	(54.9)	(16)	(3.47)	(2.51)	(0.762)	(29)	(0.031)
4	837	116	7.2	6.80	1.77	45	0.02
	(77.8)	(35.4)	(2.2)	(2.07)	(0.540)	(14)	(0.0061)
5	818	94	8.7	8.06	1.81	79	0.05
	(76.0)	(29)	(2.7)	(2.46)	(0.552)	(24)	(0.015)
6	791	107	7.4	7.00	1.87	156	0.10
	(73.5)	(32.6)	(2.3)	(2.13)	(0.570)	(47.5)	(0.031)
7	854	115	7.4	7.00	1.73	147	0.07
	(79.3)	(35.1)	(2.3)	(2.13)	(0.527)	(44.8)	(0.021)

(a)

FIGURA 4.15 (*a*) Riachuelo Pond cerca de Louisville, Kentucky (*Barnes, 1967*) (*b*) Croquis de planta y secciones transversales, riachuelo Pond cerca de Louisville, Kentucky. (*Barnes, 1967*) (c) Sección 452 aguas abajo, riachuelo Pond cerca de Louisville, Kentucky. (*Barnes, 1967*) (*d*) Sección 453 aguas abajo del bordo derecho, riachuelo Pond cerca de Louisville, Kentucky. (*Barnes, 1967*).



CROQUIS DE PLANTA
n = 0.070
1
2
3
4
5
6
7
SECCIONES TRANSVERSALES
Superficie del agua
1
2
Propiedades de la sección de flujo excelente no incluido en la tabla.
7
Elevación, ft., referencia al aforador.
0
40
80
120
160
Ancho, ft.

(b)



(c)



(d)

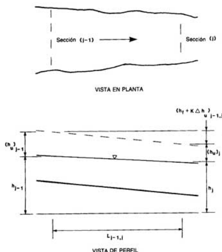


FIGURA 4.16 Definición esquemática.

ejemplo a $0.2D$ sobre el fondo. Substituyendo estas definiciones en la ecuación (4.3.12)

$$u_{0.2} = 5.75\, u_*\, \log \frac{24D}{k_s}$$

y

$$u_{0.8} = 5.75\, u_*\, \log \frac{6D}{k_s}$$

Eliminando u_* de las ecuaciones anteriores,

$$\log \frac{D}{k_s} = \frac{0.778x - 1.381}{1 - x} \qquad (4.3.13)$$

donde $x = u_{0.2}/u_{0.8}$. Substituyendo la ecuación (4.3.13) en la ecuación (1.4.33) donde se supone que $R \simeq D$ se obtiene

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1.78(x + 0.95)}{x - 1} \qquad (4.3.14)$$

Recuérdese que

$$\frac{u}{u_*} = \frac{C}{\sqrt{g}}$$

y usando esta relación y la ecuación (4.2.7) se obtiene

$$\frac{u}{u_*} = \frac{D^{1/6}}{3.81} \tag{4.3.15}$$

Utilizando los lados derechos de las ecuaciones (4.3.14) y (4.3.15) y resolviendo para n,

$$n = \frac{(x-1)D^{1/6}}{6.78(x+0.95)} \tag{4.3.16}$$

La ecuación (4.3.16) estima los valores de n para flujos completamente rugosos en un canal ancho que tiene una distribución de velocidad vertical logarítmica. En el caso de una corriente real, D puede tomarse como el tirante medio. Chow (1959) hizo la hipótesis de esta metodología y aclaró que debe utilizarse con precaución ya que no ha sido verificada. Aunque French y McCutcheon (1977) encontraron en un estudio sobre el río Cumberland, Tennessee que la ecuación (4.3.16) provee estimados razonables de n, se requiere una verificación adicional de la metodología.

Métodos empíricos Se han desarrollado varios métodos empíricos para estimar n. El más conocido de estos métodos es uno propuesto por Strickler en 1923; véase Simons y Senturk (1976). Strickler hipotetizó que

$$n = 0.047d^{1/6} \tag{4.3.17}$$

donde d = diámetro en milímetros de la arena uniforme adherida a los lados y al fondo del canal, medidas de régimen crítico usado por Strickler en sus experimentos. Simons y Senturk (1976) aseveraron que el diseño experimental utilizado por Strickler, ecuación (4.3.17) no se aplica a flujos sobre fondos móviles. Es importante hacer notar, el significativo desacuerdo entre varios autores acerca de los siguientes aspectos motivados por las circunstancias del experimento original de Strickler: el valor del coeficiente en la ecuación (4.3.17), la definición de la variable d y las unidades asociadas con d. Por ejemplo,

1. Henderson (1966) señaló que las investigaciones de Strickler estuvieron basadas en corrientes con fondos de grava, y no en un canal medidor de régimen crítico, y que d fue el tamaño medio del material del fondo. La ecuación dada por Henderson (1966) y atribuida a Strickler fue

$$n = 0.034d^{1/6} \tag{4.3.18}$$

donde las unidades de d no fueron especificadas.

2. Raudkivi (1976) estableció que la ecuación de Strickler es

$$n = 0.042d^{1/6} \tag{4.3.19}$$

donde d es medida en metros o

$$n = 0.013d_{65}^{1/6} \tag{4.3.20}$$

donde d_{65} = diámetro del material del fondo en milímetros tal que el 65% del material por peso es menor. Si las dimensiones de la ecuación 4.3.20 son dadas en pies, entonces

$$n = 0.034d_{65}^{1/6} \tag{4.3.21}$$

donde el coeficiente tiene el mismo valor numérico que el dado por Henderson en la ecuación (4.3.18). Raudkivi (1976) notó que las ecuaciones (4.3.19) a la (4.3.21) son útiles en la selección de rugosidades ponderadas para modelos hidráulicos de fondo fijo.

3. Garde y Raju (1978) señalaron que los datos analizados por Strickler, fueron realizados a partir de varias corrientes en Suiza que tienen fondos formados por materiales de granulación gruesa y donde el fondo está libre de ondulaciones. La ecuación proporcionada por estos autores y atribuida a Strickler fue

$$n = 0.039d_{50}^{1/6} \tag{4.3.22}$$

donde d_{50} = diámetro del material del fondo en pies tal que el 50% del material por peso es menor.

4. Subramanya (1982) obtuvo la ecuación de Strickler como

$$n = 0.047d_{50}^{1/6} \tag{4.3.23}$$

donde d_{50} = diámetro del material del fondo en metros tal que el 50% del material por peso es menor. Se puede mostrar fácilmente que las ecuaciones (4.3.22) y (4.3.23) son equivalentes y por lo tanto no existe diferencia entre las ecuaciones planteadas por Garde y Raju (1978) y Subramanya (1982).

El análisis anterior no significa que exista un error previo del autor, sino que se presenta para ilustrar que pueden existir diferentes interpretaciones de un importante concepto.

Para mezclas de materiales de fondo con una significativa proporción de tamaños granulométricos, Meyer-Peter y Muller (1948) sugieren la siguiente ecuación.

$$n = 0.038d_{90}^{1/6} \tag{4.3.24}$$

donde d_{90} = tamaño del fondo en metros, tal que el 90% del material por peso es menor. En experimentos de campo, involucrando canales empedrados con guijarros, Lane y Carlson (1953) determinaron que

$$n = 0.026 d_{75}^{1/6} \tag{4.3.25}$$

donde d_{75} = diámetro del material del fondo en pulgadas tal que el 75% del material por peso es menor.

EJEMPLO 4.2

Para el canal definido en el ejemplo 4.1., determínese la pendiente mínima que se requiere sí se supone que la n de Manning es una constante.

Solución

A partir del ejemplo 4.1

$n = 0.13$
tirante del flujo $y_N = 8.5$ ft (2.6m)
Ancho del fondo $b = 10$ ft (3.0 m)
Talud 1.5:1

Entonces, a partir de la tabla 1.1

$$A = (b + zy)y = [10 + 1.5(8.5)]8.5 = 194 \text{ ft}^2 \ (18.0 \text{ m}^2)$$
$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 10 + 2(8.5)\sqrt{3.25} = 40.6 \text{ ft} \ (12.4 \text{ m})$$
$$R = A/P = 194/40.6 = 4.8 \text{ ft} \ (1.5 \text{ m})$$

de la ecuación (4.3.6)

$$S = \left(\frac{1.9 \times 10^{-13}}{n^6\sqrt{R}}\right)^2 = \left[\frac{1.9 \times 10^{-13}}{(0.13)^6\sqrt{4.8}}\right]^2 = 3.2 \times 10^{-16}$$

Por lo tanto, si la pendiente del canal descrita en el ejemplo 4.1. excede a 3.2. $\times 10^{-16}$ la suposición de un valor constante de n es válida.

BIBLIOGRAFÍA

Ackers, P., "Resistance to Fluids Flowing in Channels and Pipes," Hydraulic Research Paper No. 1, H.M.S.O., London, 1958.

Anonymous, "Report of the American Society of Civil Engineers' Task Force on Friction Factors in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division,* vol. 89, No. HY2, March 1963a, pp. 97–143.

Anonymous, "Guide for Selecting Roughness Coefficient '*n*' Values for Channels," U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Washington, December 1963b.

Barnes, H. H., Jr., "Roughness Characteristics of Natural Channels," U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 1849, U.S. Geological Survey, Washington, 1967.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

French, R. H., and McCutcheon, S. C., "The Stability of a Two Layer Flow without Shear in the Presence of Boundary Generated Turbulence: Field Verification," Technical Report No. 39, Environmental and Water Resources Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tenn., October 1977.

Garde, R. J., and Ranga Raju, K. G., *Mechanics of Sediment Transportation and Alluvial Stream Problems*, Wiley Eastern, New Delhi, 1978.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, The Macmillan Company, New York, 1966.

Lane, E. W., and Carlson, E. J., "Some Factors Affecting the Stability of Canals Constructed in Coarse Granular Materials," *Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention*, September 1953.

Meyer-Peter, E., and Muller, R., "Formulas for Bed-Load Transport," *Proceedings of the 3rd Meeting of IAHR*, Stockholm, pp. 39–64, 1948.

Raudkivi, A. J., *Loose Boundary Hydraulics*, 2d ed., Pergamon Press, New York, 1976.

Simons, D. B., and Senturk, F., *Sediment Transport Technology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Col., 1976.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, McGraw Hill Book Company, New York, 1975.

Subramanya, K., *Flow in Open Channels*, vol. 1, Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1982.

Urquhart, W. J., "Hydraulics," *Engineering Field Manual*, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Washington, 1975.

Zegzhda, A. P., "Teoriia podobiia i metodika rascheta gidrotekhnicheskikh modelei" ("Theory of Similarity and Methods of Design of Models for Hydraulic Engineering"), *Gosstroiisdat*, Leningrad, 1938.

CINCO



Cálculo del flujo uniforme

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo, se hace hincapié en el análisis de técnicas para calcular el tirante normal del flujo en canales abiertos. El cálculo más tedioso y difícil del flujo normal ocurre cuando la ecuación de resistencia de Manning no puede resolverse explícitamente para el tirante normal de flujo. Las técnicas de solución incluyen tanteos, gráficas y métodos numéricos para la solución del problema implícito.

En la tercera sección de este capítulo, se trata el problema de la estimación compuesta o rugosidad promedio en canales artificiales, naturales o de laboratorio. Se analizan diversas técnicas para estimar los coeficientes de rugosidad en flujos compuestos en canales artificiales y naturales. En el caso de canales medidores de régimen crítico de laboratorio con rugosidad artificial en el fondo y paredes hidráulicamente suaves (lisas), se analiza una técnica para estimar el coeficiente de rugosidad en la frontera del fondo.

En la cuarta sección de este capítulo se consideran diversas aplicaciones de los conceptos de flujo uniforme en la práctica, por ejemplo, cálculos de flujo área-pendiente en avenidas máximas, canales cubiertos por hielo y gasto normal en canales de sección compuesta.

5.1 CÁLCULO DEL TIRANTE Y VELOCIDAD NORMAL

En el capítulo anterior se describieron: flujo uniforme, sus ecuaciones de comportamiento y diversas metodologías para estimar el coeficiente de rugosidad. Se recordará que la ecuación de Manning considera que

$$\overline{u} = \frac{\phi}{n} R^{2/3} \sqrt{S} \tag{5.1.1}$$

y por la ley de conservación de masa, cuando se multiplica esta ecuación por el área del flujo se obtiene una ecuación para el gasto del flujo uniforme.

$$Q = \overline{u}A = \frac{\phi}{n} AR^{2/3} \sqrt{S} \tag{5.1.2}$$

En la ecuación (5.1.2) el parámetro $AR^{2/3}$ recibe el nombre de *factor de sección* y

$$K = \frac{\phi}{n} AR^{2/3} \tag{5.1.3}$$

es por definición la conducción del canal. Para un cierto canal, donde $AR^{2/3}$ siempre se incrementa con el incremento del tirante, cada gasto tiene un tirante único, correspondiente al momento en que ocurre el flujo uniforme.

Un examen de las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) demuestra que la velocidad uniforme promedio, del flujo o la proporción de flujo es una función de 1) la for-

ma del canal, 2) el coeficiente de resistencia (rugosidad), 3) la pendiente longitudinal del canal, y 4) el tirante del flujo o

$$Q = f(\Gamma, n, S, y_N) \tag{5.1.4}$$

donde Γ = un factor de forma del canal y y_N = tirante normal del flujo. Si cuatro de las cinco variables en la ecuación. (5.1.4) son conocidas, entonces puede determinarse la quinta variable.

EJEMPLO 5.1

Dado un canal tropical con un ancho en el fondo de 3 m (10 ft), con taludes 1.5: 1, una pendiente longitudinal de 0.0016, y un coeficiente de resistencia de $n = 0.013$, determínese el gasto normal si el tirante normal del flujo es de 2.6 m (8.5 ft).

Solución

De la tabla 1.1

$$A = (b + zy)y = [3.0 + 1.5(2.6)]2.6 = 18 \text{ m}^2 \ (190 \text{ ft}^2)$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 3.0 + 2(2.6)\sqrt{3.25} = 12 \text{ m} \ (39 \text{ ft})$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{18}{12} = 1.5 \text{ m} \ (4.9 \text{ ft})$$

A partir de la ecuación 5.1.2.

$$Q = \frac{\phi}{n} AR^{2/3}\sqrt{S} = \frac{1.0}{0.013}(18)(1.5)^{2/3}\sqrt{0.0016} = 73 \text{ m}^3/\text{s} \ (2600 \text{ ft}^3/\text{s})$$

En general, el cálculo más difícil y tedioso del flujo normal ocurre cuando Q, Γ, S y n son conocidos y y_N debe ser estimado. En tal caso, no es posible una solución explícita de la ecuación (5.1.2) y el problema debe ser solucionado por tanteos, diagramas de curvas o métodos numéricos. La sección inicial de este capítulo examina tres metodologías que son comunes en la solución de este tipo de problemas.

Soluciones por tanteos y gráficas

Si Q, Γ, S, y n son conocidas, entonces la ecuación (5.1.2) puede reagruparse para obtener

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} \tag{5.1.5}$$

donde el lado derecho de la ecuación es una constante y el lado izquierdo es el factor de sección que es función de la forma del canal y del tirante del flujo.

La aproximación más directa para encontrar y_N es una solución por tanteos de la ecuación (5.1.5).

EJEMPLO 5.2

Dado en un canal tropical con un ancho en el fondo de 10 ft (3.0 m), taludes de 1.5:1, una pendiente longitudinal de 0.0016, y una n estimada de 0.13, encuéntrese el tirante normal de flujo para un gasto de 250 ft³/s (7.1 m³/s).

Solución

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} = \frac{0.13(250)}{1.49\sqrt{0.0016}} = 545$$

con

$$A = (b + zy)y = (10 + 1.5y)y$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 10 + 2y\sqrt{3.25} = 10 + 3.6y$$

$$R = \frac{(10 + 1.5y)y}{10 + 3.6y}$$

Se construye la siguiente tabla para valores supuestos de y calculando el valor correspondiente de $AR^{2/3}$. Cuando el valor calculado $AR^{2/3}$ corresponda al valor calculado en la exposición del problema, el valor correcto de y_N ha sido determinado.

Prueba y, ft	A, ft²	P, ft	R, ft	$AR^{2/3}$
8.0	176	38.8	4.54	482
9.0	212	42.4	5.00	620
8.5	193	40.6	4.75	546

A partir de la información contenida en esta tabla, se concluye que y_N es igual a 8.5 ft (2.6 m) que es el tirante normal del flujo para el canal y el gasto especificado.

Un segundo método para la solución de este problema es con la construcción de una gráfica del factor de sección contra el tirante del flujo.

EJEMPLO 5.3

Dada una alcantarilla circular de 3.0 ft (0.91 m) de diámetro, con $S = 0.0016$ y $n = 0.015$, encuéntrese el tirante normal del flujo para un gasto de 15 ft³/s (0.42 m³/s).

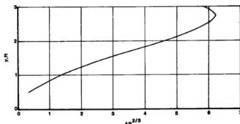


FIGURA 5.1 $AR^{2/3}$ contra y para un conducto circular de 3.0 ft (0.91 m) de diámetro.

Solución

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} = \frac{0.015(15)}{1.49\sqrt{0.0016}} = 3.78$$

Se construye una gráfica de $AR^{2/3}$ contra y (Fig. 5.1). Para $AR^{2/3} =$ 3.78, $y_N = 1, 7$ ft. Con respecto a la figura 5.1 puede notarse que el factor de sección se incrementa primero al incrementarse el tirante hasta llegar a un valor máximo, para que después, al seguirse incrementando el tirante, el factor de sección empiece a disminuir hasta un valor correspondiente con el tirante igual al diámetro. Por lo tanto, es posible tener dos valores de y_N para ciertos valores de $AR^{2/3}$.

Los métodos examinados anteriormente, tienen la ventaja de dirigir y la desventaja de ser difíciles de manejar si se tienen un gran número de problemas a resolver. Cuando se tiene un gran número de problemas que deben ser resueltos es necesario tener un enfoque diferente.

Diagramas de curvas adimensionales

Con objeto de simplificar los cálculos del tirante normal para configuraciones comunes de canales, se han preparado para canales rectangulares, circulares y trapeciales, curvas adimensionales para el factor de sección como una función del tirante (Fig. 5.2). Estas curvas proporcionan soluciones a los problemas de cálculo del tirante normal de manera similar a la utilizada en el ejemplo 5.3, pero no proporcionan un método general de solución.

Métodos numéricos

Si se dispone de una computadora y debe resolverse un gran número de problemas de estimación del tirante normal, entonces la mejor aproximación puede

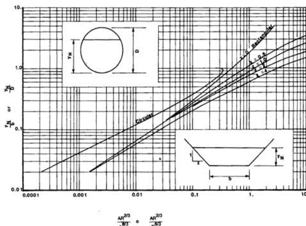


FIGURA 5.2 Curvas adimensionales para determinar el tirante normal conocido el factor de sección.

ser un procedimiento numérico de tanteos. En la figura 5.3 se muestra un diagrama lógico para una solución numérica en el caso de canales rectangulares, trapeciales, triangulares, circulares y naturales y un listado de un programa interactivo que soluciona el problema del tirante normal se presenta en el apéndice I.

En este programa interactivo de computadora, el usuario define el tipo de canal y especifica el valor del factor de sección. Las subrutinas RECT, TRAP, CIRC y NATDAT crean y buscan un arreglo de tirantes de flujo y sus correspondientes valores del factor de sección hasta que se encuentra un intervalo que incluye el factor de sección especificado. Este intervalo entonces se subdivide y se ajusta una curva polinomial cúbica a este intervalo en la subrutina SPCOEF. El valor de y_M correspondiente al valor especificado por el usuario para el factor de sección se estima en la subrutina SPLINE. Con respecto a este programa se pueden hacer los siguientes comentarios. Primero, canales triangulares son tratados como un caso especial de canales trapeciales. Segundo, para canales naturales, la sección transversal debe ser especificada en términos de la distancia de un lado del canal y la altura del perimetro del canal sobre algún plano de referencia arbitrario. Tercero, las subrutinas SPCOEF y SPLINE son subrutinas estándar de interpolación para curvas polinomiales cúbicas similares a las que han presentado Pine y Allen (1973).

Aún cuando la solución numérica del cálculo del tirante normal tiene un costo razonable, si el usuario tiene un gran número de problemas a solucionar y

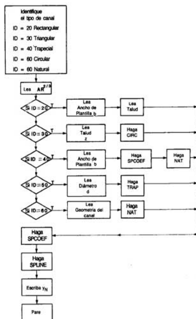


FIGURA 5.3 Diagrama lógico para una solución interactiva por computadora del tirante normal.

sólo dispone de una microcomputadora, esta metodología puede acarrear errores serios cuando el usuario no está enteramente familiarizado con la estructura del programa. Por lo tanto el lector debe estar atento a revisar cuidadosamente el esquema computacional del apéndice I y realizar algunas adaptaciones antes de aplicarlo a un problema específico.

EJEMPLO 5.4

La sección transversal de la figura 5.4 es el resultado de una curva batimétrica de un río. Si Q = 10 000 ft³/s (283 m³/s), $n = 0.024$ y $S = 0.0001$, estímese el tirante normal del flujo.

Solución

El valor del factor de sección es

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} = \frac{0.024(10.000)}{1.49\sqrt{0.0001}} = 16\,107$$

Los datos de la sección transversal requeridos para el programa de computadora del tirante normal están tabulados abajo.

Nivel del agua en ft (m), sobre una referencia arbitraria	Distancia a la primera intersección perimetral de la margen sur, en ft (m)	Distancia a la segunda intersección perimetral de la margen sur, en ft (m)
15 (4.6)	330(100)	330 (100)
20 (6.1)	240(73)	460 (140)
25 (7.6)	200(61)	530 (160)
30 (9.1)	170(52)	600 (180)
35 (11)	150(46)	710 (220)
40 (12)	130(40)	850 (260)
45 (14)	110(34)	1200 (365)
50 (15)	80(24)	1220 (370)
55 (17)	20(6.1)	1230 (375)

Con respecto a la figura 5.4, a los datos tabulados y al programa de computación del tirante normal, se hacen notar las siguientes consideraciones: primero, el canal tiene una sección individual profunda. El esquema de cálculo, aunque podrá ser fácilmente modificado, no está diseñado para tratar un canal con dos secciones profundas. Segundo, el perímetro del canal está definido por las elevaciones sobre una referencia arbitraria y las distancias de uno de los lados a las intersecciones con las fronteras del canal. Tercero, la dimensión de las declaraciones en el programa permite sólo 10 puntos del perímetro a fin de que pueda definirse. Estas declaraciones podrán también cambiarse según se requieran. El material de abajo es el resultado del uso del programa de computadora del apéndice I en la resolución del problema. En este material, las respuestas generadas por la computadora se subrayan y la información dada por el usuario se indica con negritas.

a. salida

indíquese el valor calculado de ar**0.667
16107.
identifíquese el tipo de canal: 20 rectángulo;
30 triángulo;
40 trapecial;
50 circular;
60 natural;

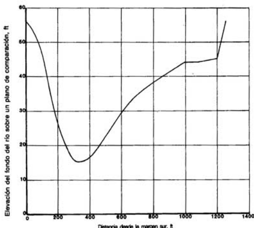


FIGURA 5.4 Elevación del fondo del río en función de la distancia a la margen sur.

60

en este programa se proporcionan de manera interactiva los datos que definen el perímetro del canal en términos de un nivel de agua por encima de un plano de referencia y de dos puntos de intersección, proporciónese el número de ternas para lectura I2

9

indíquese la terna número 1

15. 330. 330.

indíquese la terna número 2

20. 240. 460.

indíquese la terna número 3

25. 200. 530.

indíquese la terna número 4

30. 170. 600.

indíquese la terna número 5

35. 150. 710.

indíquese la terna número 6

40. 130. 850.
indíquese la terna número 7

45. 110. 1200.
indíquese la terna número 8

50. 80. 1220.
indíquese la terna número 9

55. 20. 1230.
tirante normal = 29.86

Así, el tirante normal es de aproximadamente $y_N = 30$ ft (9.1 m).

5.2 PENDIENTES NORMAL Y CRÍTICA

Si se define Q, n, y_N, y la sección del canal, entonces se puede rersolver la ecuación (5.1.2) explícitamente para la pendiente que permita que el flujo ocurra como se especificó. Por definición, ésta es la pendiente normal.

Si la pendiente del canal cambia, manteniéndose constante el gasto y la rugosidad, es posible encontrar una pendiente para la que se presente el flujo normal en estado crítico; i.e., una pendiente tal que el flujo normal se presente con $\mathbf{F} = 1$. La pendiente obtenida de esta forma es, por definición, la pendiente crítica y también la pendiente normal. La pendiente crítica menor para una forma del canal, gasto, y rugosidad dados se le denomina la *pendiente crítica límite*.

Con base en estas definiciones, debe poderse definir una pendiente crítica y un gasto que correspondan a un tirante normal especificado para un canal dado. A esta pendiente se le conoce como la pendiente crítica en el tirante normal especificado. Los siguientes dos ejemplos ilustran los puntos importantes de este análisis.

EJEMPLO 5.5

Un canal rectangular tiene un ancho de fondo de 6.0 m (19.7 ft) y n = 0.020.

a. Encuéntrese la pendiente normal para y_N = 1.0 m (3.3 ft) y Q = 11 m³/s (388 ft³/s).
b. Encuéntrese la pendiente crítica límite y el tirante normal para Q = 11 m³/s (388 ft³/s).
c. Encuéntrese la pendiente crítica para y_N = 1.0 m (3.3 ft) y determínese el gasto que le corresponde a este tirante y pendiente.

Solución

a. Para los datos dados

$$A = by = 6.0(1.0) = 6.0 \text{ m}^2 \text{ (65 ft}^2\text{)}$$

$$P = b + 2y = 6 + 2(1.0) = 8.0 \text{ m (26 ft)}$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{6}{8} = 0.75 \text{ m (2.5 ft)}$$

Si se reordena la ecuación (5.1.2),

$$S = \left(\frac{nQ}{\phi AR^{2/3}}\right)^2 = \left[\frac{0.02(11)}{1.0(6)(0.75)^{2/3}}\right]^2 = 0.002$$

Por lo que, $S = 0.002$ mantendrá un flujo uniforme de 11 m³/s (388 ft³/s) en este canal a un tirante de 1.0 m (3.3 ft).

b. El tirante crítico se encuentra con la ecuación (2.2.3) o

$$\frac{\overline{u}^2}{2g} = \frac{D}{2}$$

donde
$$\overline{u} = \frac{Q}{by} = \frac{11}{6y_N}$$

y ya que este es un canal rectangular,

$$D = y_N = \frac{Q^2}{g(by_N)^2}$$

$$y_N = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left[\frac{(11)^2}{9.8(6)^2}\right]^{1/3} = 0.70 \text{ m (2.3 ft)}$$

Entonces

$$A = by = 6(0.70) = 4.2 \text{ m}^2 \text{ (45 ft}^2\text{)}$$

$$P = b + 2y = 6 + 2(0.70) = 7.4 \text{ m (24 ft)}$$

$$R = \frac{4.2}{7.4} = 0.57 \text{ m (1.9 ft)}$$

Al reordenar la ecuación (5.1.2),

$$S_c = \left(\frac{nQ}{\phi AR^{2/3}}\right)^2 = \left[\frac{0.02(11)}{1.0(4.2)(0.57)^{2/3}}\right]^2 = 0.0058$$

donde S_c = pendiente crítica. Ésta es la pendiente que mantendrá un flujo uniforme y crítico de 11 m³/s (388 ft³/s) en el canal dado.

c. A partir del inciso *a*, para un tirante normal de 1.0 m (3.3 ft).

$$A = 6.0\ \text{m}^2\ (65\ \text{ft}^2)$$
$$P = 8.0\ \text{m}\ (26\ \text{ft})$$
$$R = 0.75\ \text{m}\ (2.5\ \text{ft})$$
$$P = 8.0\ \text{m}\ (26\ \text{ft})$$
$$R = 0.75\ \text{m}\ (2.5\ \text{ft})$$

Se puede entonces encontrar la velocidad por la definición de flujo crítico o

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gy_N}} = 1$$

$$\overline{u} = \sqrt{9.8(1)} = 3.1\ \text{m/s}\ (10\ \text{ft/s})$$

Entonces al reordenar la ecuación (5.1.1),

$$S_{cN} = \left(\frac{n\overline{u}}{\phi R^{2/3}}\right)^2 = \left[\frac{0.02(3.1)}{1.0(0.75)^{2/3}}\right]^2 = 0.0056$$

donde S_{cN} = pendiente que mantendrá un flujo crítico y uniforme a un tirante de 1.0 m (3.3 ft) en el canal dado. El gasto está determinado por

$$Q = \overline{u}A = 3.1(6) = 19\ \text{m}^3/\text{s}\ (670\ \text{ft}^3/\text{s})$$

EJEMPLO 5.6

Desarróllese una gráfica de Q contra S_c, la pendiente crítica límite para un canal trapecial, con ancho de plantilla de 20.4 ft (6.2 m), taludes de 0.5:1, y n = 0.02.

Solución

De la ecuación (2.2.3), la condición de flujo crítico en un canal trapecial es

$$\frac{\overline{u}^2}{g} = D$$

donde la tabla 1.1

$$A = (b + zy)y = (20.4 + 0.5y)y$$

$$T = b + 2zy = 20.4 + y$$

$$D = \frac{A}{T} = \frac{(20.4 + 0.5y)y}{20.4 + y}$$

y

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(20.4 + 0.5y)y}$$

Si se combinan estas relaciones, se tiene una ecuación implícita para el tirante o

$$\frac{Q^2}{g}(20.4 + y_c) = [(20.4 + 0.5y_c)y_c]^3$$

Esta ecuación, una vez resuelta, da valores para y_c que corresponden a un gasto dado. Luego se emplea y_c en la ecuación de Manning en forma similar a la demostrada en el ejemplo 5.5*b* para estimar S_c. Los resultados de este cálculo se resumen en la figura 5.5. La curva de esta figura separa las regiones de flujo normal subcrítico del supercrítico, para los valores dados de Q y S.

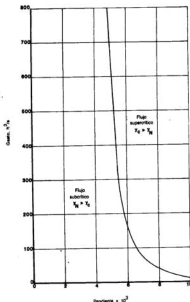


FIGURA 5.5 Curva que define las regiones de flujo normal subcrítico y supercrítico para un canal determinado en función del gasto y de la pendiente.

5.3 CANALES CON RUGOSIDAD COMPUESTA

En muchos canales artificiales, y en la mayor parte de los canales naturales, la rugosidad varía a lo largo del perímetro del canal, en estos casos a veces es necesario calcular un valor equivalente del coeficiente de rugosidad para todo el perímetro. Este coeficiente de rugosidad efectivo se emplea entonces en el cálculo de tirantes normales en todo el canal. En esta sección se considerarán varios métodos para estimar el coeficiente de rugosidad equivalente para canales naturales, artificiales, y de laboratorios.

En un canal natural, el área de flujo se divide en N partes cada una de las cuales tiene asociado un perímetro mojado P_i y un coeficiente de rugosidad n_i conocidos. En estos métodos, los perímetros mojados (i.e., las P_i) no incluyen las fronteras imaginarias entre las subsecciones. Los métodos de cálculo del coeficiente de rugosidad para este tipo de canal son:

1. Horton (1933) y, Einstein y Banks (1950) desarrollaron por separado un método que supone que cada subdivisión del área tiene la misma velocidad media de la sección total o, $\bar{u} = \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \ldots = \bar{u}_N$ donde $\bar{u}_i$ = velocidad media de la sección i-ésima. Entonces

$$n_e = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (P_i n_i^{3/2})}{P} \right]^{2/3} \tag{5.3.1}$$

donde n_e = coeficiente equivalente de Manning
P = perímetro mojado de la sección completa
N = número de subsecciones.

2. Si se supone que la fuerza cortante total es igual a la suma de las fuerzas cortantes en cada subsección, entonces

$$n_e = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (P_i n_i^2)}{P} \right]^{1/2} \tag{5.3.2}$$

3. Si se supone que el gasto total de la sección es igual a la suma de los gastos de cada subsección, entonces

$$n_e = \frac{PR^{5/3}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i R_i^{5/3}}{n_i}} \tag{5.3.3}$$

donde R_i = radio hidráulico de cada subsección y R = radio hidráulico de la sección completa.

En un canal artificial o de laboratorio, los ángulos del bordo se bisectan y la subdivisión se componen por: el perímetro del canal, los bisectores de ángulos de bordos y la superficie del agua. Aunque los dos métodos de cálculo de n_e descritos en seguida pueden emplearse para canales naturales, los cálculos geométricos requeridos pueden ser bastante engorrosos en esta situación.

1. En el método atribuido por Cox (1973) a Los Angeles U.S. Army Corps of Engineers District, se calcula n_e por

$$n_e = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i A_i}{A} \tag{5.3.4}$$

donde A_i = área de la i-ésima subsección y A = área hidráulica total.

2. El método de Colbatch, que también describe Cox (1973), emplea la siguiente ecuación:

$$n_e = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} A_i n_i^{3/2}}{A} \right)^{2/3} \tag{5.3.5}$$

En general, cualquiera de los cinco métodos antes descritos es satisfactorio para estimar los valores equivalentes de n para canales artificiales o naturales, aunque no se conocen la precisión y la aplicabilidad de las estimaciones resultantes.

EJEMPLO 5.7

Dado el canal descrito en forma esquemática en la figura 5.6, estímese el valor de n_e por los métodos mencionados.

Solución

Los datos requeridos para la solución de este problema se resumen en la siguiente tabla:

	Ecuaciones (5.3.1), (5.3.2) y (5.3.5)				Ecuaciones (5.3.4) y (5.3.3)
Subdivisión	***A*, ft²**	***P*, ft**	***R*, ft**	***n***	***A*, ft²**
1	25.0	11.2	2.23	0.01	27.9
2	75.0	15.0	5.00	0.015	77.2
3	37.5	7.07	5.30	0.020	53.0
4	200	20.0	10.0	0.030	159
5	37.5	7.07	5.30	0.020	53.0
6	50.0	10.0	5.00	0.015	50.0
7	12.5	7.07	1.77	0.010	17.7
Sección total	437	77.4	5.65		437

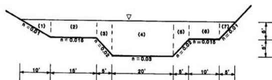


FIGURA 5.6 Definición del canal para el ejemplo 5.7.

Entonces, si se emplea

$$\text{Eq. (5.3.1)}, n_e = 0.019$$
$$\text{Eq. (5.3.2)}, n_e = 0.020$$
$$\text{Eq. (5.3.3)}, n_e = 0.019$$
$$\text{Eq. (5.3.4)}, n_e = 0.022$$
$$\text{Eq. (5.3.5)}, n_e = 0.023$$

Nótese que cada uno de los métodos para estimar el valor equivalente de n da aproximadamente la misma respuesta para este ejemplo.

El problema de una rugosidad compuesta también se presenta en experimentos de laboratorios (i.e., la frontera de fondo del canal de laboratorio comúnmente se le da una rugosidad para duplicar condiciones naturales), pero a las paredes no suele dárseles rugosidad adicional. En este caso, el factor de fricción de la sección compuesta se estima a partir de valores medidos de la pendiente de la superficie del agua y del radio hidráulico; el problema es estimar el factor de fricción o velocidad al cortante asociados con la rugosidad de fondo. La metodología que se describe a continuación se desarrolló por Vanoni y Brooks (1957). En este análisis las variables con subíndice w están asociadas con las paredes y las variables sin subíndices están asociadas con el flujo compuesto.

Se requieren las siguientes suposiciones:

1. Se puede dividir el área de flujo del canal en dos partes: una sección en la que el flujo produce cortante en la frontera de fondo y otra en la que el flujo produce cortante en las paredes (Fig. 5.7). Se supone que las fronteras entre las secciones de fondo y las paredes tienen superficies con cero cortante y no se incluyen en P_b y P_w.
2. La velocidad media en la sección de fondo $\overline{u}_b$ es igual a la velocidad media en la sección de la pared $\overline{u}_w$.
3. Las secciones de fondo y de pared se comportan como dos canales independientes.

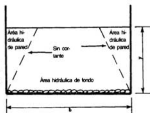


FIGURA 5.7 Definición esquemática del cómputo de rugosidad compuesta de Vanoni y Brook (1957).

4. Las rugosidades de fondo y de pared son homogéneas pero diferentes.

En este análisis supuestamente se conocen las siguientes cantidades fundamentales:

$$R, u_*, \nu, P_w, P_b, A, F, u$$

donde $f = 8(u_*/\overline{u})^2$ = coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach, y ν = viscosidad cinemática. Las incógnitas primordiales son

$$u_{*b}, f_b, R_b$$

Es crucial estimar el factor de fricción de pared para la solución de este problema. Aunque este problema se puede resolver si las paredes no son hidráulicamente lisas, la suposición de paredes lisas da una solución mucho más simple, ya que bajo esta suposición f_w está sólo en función del número de Reynolds de la pared $\mathbf{R}_w$ donde

$$\mathbf{R}_w = \frac{\overline{u}_w R_w}{\nu} \tag{5.3.6}$$

En esta ecuación, $\mathbf{R}_w$ es una incógnita. La ecuación (5.3.6) también puede escribirse como

$$\mathbf{R}_w = \frac{4\overline{u}R}{\nu}\frac{R_w}{R} = \mathbf{R}\frac{R_w}{R} \tag{5.3.7}$$

El factor de fricción para la pared está dado por

$$gR_wS = \frac{f_w\overline{u}^2}{8} \tag{5.3.8}$$

y el factor de fricción para el flujo compuesto es

$$gRS = \frac{f\overline{u}^2}{8} \tag{5.3.9}$$

Al dividir la ecuación (5.3.8) por la (5.3.9),

$$\frac{R_w}{R} = \frac{f_w}{f} \qquad (5.3.10)$$

Si se sustituye esta ecuación en la (5.3.7) da

$$\frac{\mathbf{R}_w}{f_w} = \frac{\mathbf{R}}{f} \qquad (5.3.11)$$

Aunque el parámetro $\mathbf{R}_w/f_w$ puede calcularse con esta ecuación, no se puede estimar $\mathbf{R}_w$ o f_w por sí solos. Se necesita una ecuación auxiliar que relacione a f_w con $\mathbf{R}_w$. Para superficies hidráulicamente lisas con $\mathbf{R}_w < 100\ 000$, se puede emplear la ecuación (4.3.7) como ecuación auxiliar. Para $\mathbf{R}_w \geq 100\ 000$, se puede emplear la ecuación (4.3.8). Para emplearse con la ecuación (5.3.11), se grafican la ecuación (4.3.7) y la (4.3.8) en la figura 5.8. En esta figura, f_w puede estimarse cuando se conoce $\mathbf{R}_w/f_w$.

Entonces, a partir de consideraciones geométricas

$$A = A_b + A_w \qquad (5.3.12)$$

donde con un poco de reordenamiento la ecuación (5.3.9) da

$$A = \frac{Pf\bar{u}^2}{8gS} \qquad (5.3.13)$$

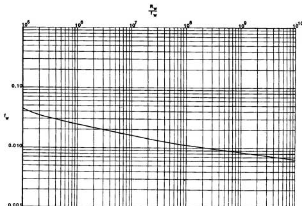


FIGURA 5.8 f_w como función de $\mathbf{R}_w/f_w$

$$A_b = \frac{P_b f_b \overline{u}^2}{8gS} \tag{5.3.14}$$

y

$$A_w = \frac{P_w f_w \overline{u}^2}{8gS} \tag{5.3.15}$$

Si se sustituye desde la ecuación (5.3.13) hasta la (5.3.15) en la ecuación (5.3.12) y si se reordenan, se tiene

$$f_b = \frac{P}{P_b} f - \frac{P_w}{P_b} f_w \tag{5.3.16}$$

Para un canal rectangular, la ecuación (5.3.16) queda como

$$f_b = f + \frac{2y}{b}(f - f_w) \tag{5.3.17}$$

donde y = tirante. También para un canal rectangular,

$$R_b = R\frac{f_b}{f} \tag{5.3.18}$$

y

$$u_{*b} = \sqrt{gR_bS} \tag{5.3.19}$$

EJEMPLO 5.8

Estímese los valores de f_b y u_{*b} en un experimento de laboratorio en un canal rectangular de 2.75 ft (0.84 m) de ancho con paredes hidráulicamente lisas y con un fondo artificialmente rugoso si $Q = 1.00$ ft³/s (0.028 m³/s), $S = 0.00278$, y $y = 0.30$ ft (0.091 m).

Solución

A partir de los datos dados, se pueden calcular las siguientes variables:

$A = by = 2.75(0.30) = 0.825$ ft² (0.25 m²)

$P = b + 2y = 2.75 + 2(0.30) = 3.35$ ft (1.0 m)

$R = \frac{A}{P} = \frac{0.825}{3.35} = 0.246$ ft (0.075 m)

$u_* = \sqrt{gRS} = \sqrt{(32.2)(0.246)(0.00278)} = 0.148$ ft/s (0.045 m/s)

$\overline{u} = \frac{Q}{A} = \frac{1.00}{0.825} = 1.21$ ft/s (0.37 m/s)

$f = 8\left(\frac{u_*}{\overline{u}}\right)^2 = 8\left(\frac{0.148}{1.21}\right)^2 = 0.120$

Supóngase que $\nu = 9.55 \times 10^{-6}$ ft²/s (8.87×10^{-7} m²/s); entonces,

$$\mathbf{R} = \frac{4\bar{u}R}{\nu} = \frac{4(1.21)(0.246)}{9.55 \times 10^{-6}} = 1.25 \times 10^5$$

y de la ecuación (5.3.11)

$$\frac{\mathbf{R}_w}{f_w} = \frac{R}{f} = \frac{1.25 \times 10^5}{0.120} = 1.04 \times 10^6$$

Para este valor del parámetro $\mathbf{R}_w/f_w$ la figura 5.8 da un valor de

$$f_w = 0.028$$

y $$f_b = f + \frac{2y}{b}(f - f_w) = 0.120 + \frac{2(0.30)}{2.75}(0.120 - 0.028) = 0.140$$

Al emplear las ecuaciones (5.3.18) y (5.3.19),

$$R_b = R\frac{f_b}{f} = 0.246\frac{0.140}{0.120} = 0.287$$

y $$u_{*b} = \sqrt{gR_bS} = \sqrt{32.2(0.287)(0.00278)} = 0.160 \text{ ft/s } (0.049 \text{ m/s})$$

5.4 APLICACIÓN PRÁCTICA DE LOS CONCEPTOS DE FLUJO UNIFORME

En esta sección se consideran varias aplicaciones específicas de los principios de flujo uniforme. Aunque por razones de espacio quedan limitadas las aplicaciones que pueden tratarse, se espera que los casos considerados indiquen la forma en que se deben aplicar los principios teóricos del flujo uniforme.

Cálculos de área-pendiente en el flujo de avenidas máximas

No obstante que las avenidas producen flujos espacialmente variados y no permanentes, en algunos casos es posible y/o necesario analizar estos flujos con los conceptos de flujo permanente y uniforme. Desde un punto de vista teórico, el empleo de este enfoque puede justificarse sólo cuando los cambios en los niveles de la avenida y gastos son lo suficientemente graduales para que la pendiente de fricción no refleje más que las pérdidas causadas por la fricción de frontera. También se justifica el empleo del enfoque pendiente-área cuando los cambios en el factor de forma son menores al 30%. Desde un punto de vista práctico, los métodos pendientes-área pueden y se emplean cuando se requiere una estimación de gasto pico y los datos disponibles no son suficientes para justificar el uso de técnicas más complicadas. Por ejemplo, se han empleado los métodos pendiente-área para estimar flujos no permanentes, como las avenidas "relampagueantes" en zonas áridas en las que los registros hidrométricos y de precipitación son esencialmente inexistentes (Glancy y Harmsen, 1975).

Al aplicar el método pendiente-área, se requieren los siguientes datos: 1) una medición del área hidráulica media en el tramo, 2) el cambio de la elevación de la superficie del agua a través del tramo, 3) la longitud del tramo, y 4) una estimación del coeficiente medio de rugosidad para el tramo. Dalrymple y Benson (1976) dieron los siguientes lineamientos para la selección de un tramo apropiado:

1. Una consideración primordial en la selección del tramo es la disponibilidad de marcas del nivel de avenidas en el tramo. Por ejemplo, un canal de taludes fuertes de piedra puede tener características hidráulicas casi perfectas, pero si no tiene ninguna marca de avenida, no se puede emplear. Benson y Dalrymple (1976) dan varias técnicas para identificar marcas confiables de avenidas.
2. Un tramo con cambios importantes en la forma del canal debe evitarse, si es posible, ya que se presentan incertidumbres sobre la pérdida de carga en estas secciones. Aunque se prefiere un tramo recto y uniforme, se debe elegir un tramo con contracción y no uno en expansión, en caso que pueda hacerse la elección.
3. El método pendiente-área supone que el área total de la sección transversal del canal efectivamente transporta el gasto. Por ende, las condiciones aguas arriba o las de aguas abajo del tramo que causen una distribución desbalanceada del gasto deben evitarse (e.g., puentes y curvas).
4. El método pendiente-área no es aplicable a tramos que incluyen caídas libres (e.g., cataratas).
5. El tramo debe ser lo suficientemente largo para desarrollar una caída en la superficie del agua cuya magnitud pueda determinarse en forma precisa. En general, la precisión del método pendiente-área mejora a medida que aumenta la longitud del tramo. Dalrymple y Benson (1976) recomendaron que se cumpliese con uno o más de los siguientes criterios para determinar la longitud del tramo: *a*) la longitud debe ser, por lo menos, 75 veces el tirante medio, *b*) la caída de la superficie del agua debe ser igual o mayor que la carga de velocidad, y *c*) la caída debe ser, por lo menos, de 0.50 ft (0.15 m).

Debe recalcarse que la selección de un tramo apropiado es crucial para obtener estimaciones precisas del gasto pico a partir del método de la pendiente-área.

Con la información requerida, el cálculo de la pendiente-área procede como sigue:

1. Estímese R, para las áreas de la sección transversal. Recuérdese que el factor de forma del canal es por definición.

$$K = \frac{\phi}{n} AR^{2/3} \tag{5.1.3}$$

Calcúlese los factores de forma de aguas arriba, K_u, y de aguas abajo, K_d.

2. Calcúlese el factor geométrico medio de forma para el tramo o

$$\overline{K} = \sqrt{K_u K_d} \qquad (5.4.1)$$

3. Como una aproximación de orden-cero de la pendiente real de energía sea

$$S^0 = \frac{F}{L} \qquad (5.4.2)$$

donde S^0 = aproximación de orden-cero de S
F = cambio en la elevación de la superficie del agua en el tramo
L = longitud del tramo

4. La estimación de orden-cero del gasto pico es

$$Q^0 = \overline{K}\sqrt{S^0} \qquad (5.4.3)$$

5. Calcúlese la aproximación de primer orden del gasto mediante la refinación de la estimación de la pendiente de energía; i.e.,

$$S^1 = S^0 + k\left[\frac{\alpha_u\,(\overline{u}_u^2/2g) - \alpha_d\,(\overline{u}_d^2/2g)}{L}\right] \qquad (5.4.4)$$

donde α = coeficiente de corrección de energía cinética.

$\overline{u}_u$ y $\overline{u}_d$ = velocidades medias de aguas arriba y aguas abajo calculadas con Q^0 y con las áreas de las secciones transversales, respectivamente

k = factor de corrección por contracción/expansión.

Si el tramo se expande, o sea $\overline{u}_u > \overline{u}_d$, *entonces* $k = 0.5$. Si el tramo se contrae, o sea $\overline{u}_d > \overline{u}_u$, entonces $k = 1.0$.

Entonces $$Q^1 = \overline{K}\sqrt{S^1} \qquad (5.4.5)$$

6. Se repite el paso 5 hasta que

$$Q^{n-1} \simeq Q^n$$

7. Se considera apropiado promediar los gastos estimados para varios tramos.

En el mejor caso, el método de la pendiente-área da una estimación burda del gasto pico, pero en muchos casos la estimación obtenida por esta técnica puede ser económicamente factible.

EJEMPLO 5.9

Estímese el gasto de avenida en un tramo de 4300 ft (1300 m) de largo si $F = 7.3$ ft (2.2 m), $\alpha_u = \alpha_d = 1$, $n = 0.035$, $A_u = 1189$ ft^2 (110 m^2), $P_u = 248$ ft (76 m), $A_d = 1428$ ft^2 (133 m^2), y $P_d = 298$ ft (91 m).

Solución

Radio hidráulico de aguas arriba

$$R_u = \frac{A_u}{P_u} = \frac{1189}{248} = 4.79 \text{ ft } (1.46 \text{ m})$$

Factor de forma de aguas arriba

$$K_u = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} = \frac{1.49}{0.035} (1189)(4.79)^{2/3} = 144\,000$$

Radio hidráulico de aguas abajo

$$R_d = \frac{A_d}{P_d} = \frac{1428}{298} = 4.79 \text{ ft } (1.46 \text{ m})$$

Factor de forma de aguas abajo

$$K_d = \frac{1.49}{0.035} (1428)(4.79)^{2/3} = 173\,000$$

El cambio porcentual del factor de forma en el tramo es

$$100 \frac{K_d - K_u}{K_d} = 100 \frac{173\,000 - 144\,000}{173\,000} = 17 \text{ por ciento} < 30 \text{ por ciento}$$

La media geométrica del factor de forma en el tramo es

$$\overline{K} = \sqrt{K_u K_d} = \sqrt{(144\,000)(173\,000)} = 158\,000$$

La estimación de orden cero para el gasto es

$$S^0 = \frac{F}{L} = \frac{7.3}{4300} = 0.00017$$

$$Q^0 = \overline{K} \sqrt{S^0} = 158\,000 \sqrt{0.0017} = 6514 \text{ ft}^3/\text{s } (184 \text{ m}^3/\text{s})$$

Entonces, dado que $A_u < A_d$, $k = 0.50$, son aplicables los siguientes datos:

Orden de la estimación n	Q^{n-1}, ft^3/s	$\overline{u}_u$, ft/s	$\overline{u}_d$, ft/s	S^n	Q^n
1	6510	5.50	4.56	0.0017	6540
2	6540	5.50	4.58	0.0017	6540

Así, el gasto se estima que es 6500 ft^3/s (184 m^3/s).

Canales cubiertos por hielo

Antes de iniciar un estudio sobre canales cubiertos por hielo, es esencial que el lector tenga algún conocimiento del material y la manera en que se forma. Primero, como un material, el hielo es complejo y exhibe las siguientes características:

1. Es no homogéneo y no isotrópico.
2. En una condición de compresión rápida, se comporta elásticamente; aunque si la compresión se aplica lentamente, se presentan deformaciones viscoelásticas.
3. A diferencia de la mayor parte de los materiales, es menos denso que el agua de la que se formó. Así, flota sobre su propia agua derretida, a una temperatura cercana a la de fusión.
4. Aunque la temperatura de la superficie superior de la capa de hielo es variable, la temperatura de la superficie inferior que se encuentra en contacto con el agua es siempre igual a la de fusión.
5. Dentro de la capa de hielo, la razón de la temperatura del hielo a la de fusión —ambas en grados Kelvin— es siempre mayor que 0.80 (Sharp, 1981).
6. No obstante que todos los cristales de hielo tienen forma hexagonal, la estructura granular del hielo varía en función del mecanismo de formación.

Segundo, se han identificado dos métodos básicos de formación de hielo en canales abiertos:

1. En agua con movimiento lento o estancada, la nucleación se presenta cuando el agua se sobreenfría, el resultado es la formación de una capa delgada de hielo en la superficie superior. En esta etapa del desarrollo del hielo, los cristales que se forman suelen tener la forma de agujas. Si el proceso de crecimiento de estos cristales es lento, pueden crecer en granos muy grandes con dimensiones que deben medirse en ft. Pero si el proceso de crecimiento es rápido, los cristales en forma de aguja se entrelazan y se forma una estructura compleja. Ya que en canales abiertos es común que la temperatura del canal central exceda la temperatura de la frontera, el crecimiento del hielo mediante este proceso se inhibe con frecuencia por las temperaturas mayores del centro o de la turbulencia.

   Después del desarrollo de la lámina inicial de hielo, se produce un crecimiento subsecuente en una dirección paralela al flujo de calor; i.e., en la dirección vertical. Este tipo de crecimiento produce una estructura en forma de columnas (Fig. 5.9). Aunque este tipo de estructura puede presentarse sobre toda la columna de hielo, en general la mayor parte de las estructuras de columnas verticales incluyen un poco de hielo al que se le denomina *hielo*

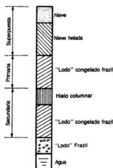


FIGURA 5.9 Perfil típico del hielo (*Michel* y *Ramseier*, *1971*.)

de nieve. El hielo de nieve —que es opaco y blanco— se produce cuando se moja, y luego congela la nieve que cae sobre la capa de hielo.

2. Bajo condiciones de flujo turbulento, se inhibe la formación de hielo superficial y la nucleación se presenta dentro de la columna de agua, y no en la superficie. Para que se presente este proceso, se requiere todavía de unas centésimas de grado de sobreenfriamiento. El hielo que se forma en estas condiciones se llama *hielo frazil* y puede presentarse en toda la columna vertical, turbulenta, sobreenfriada. El hielo frazil se forma por el desarrollo de discos pequeños que están en suspensión debajo de la superficie. En condiciones ideales (e.g., una superficie abierta enfriada por vientos fuertes) la producción de hielo frazil puede adquirir proporciones enormes.
   Los cristales de hielo frazil son inicialmente muy angulares y se adhieren entre sí formando flóculos. Éstos afloran a la superficie donde forman lo que se denomina *"lodo" frazil*. Los flóculos de hielo frazil también tienden a adherirse a cualquier objeto servible (e.g., otro tipo de hielo, rocas, o estructuras). A medida que se aglomera el hielo frazil, puede formarse una capa superficial completa, aun bajo condiciones de flujo turbulento. Osterkamp (1978) efectuó una excelente revisión bibliográfica de la formación de hielo frazil.

Cuando un canal se cubre con hielo flotante, aumenta el perímetro mojado asociado con el flujo; así, para una pendiente de fondo constante, el gasto uniforme del canal debe decrecer. Por causa del fuerte impacto de la cubierta de hielo sobre canales en climas fríos, no es sorprendente que este problema haya

sido considerado desde los primeros años de la década de 1930. La mayoría de las investigaciones de este problema han buscado desarrollar modificaciones de los coeficientes de Manning o de Chezy que reflejen la naturaleza compuesta de la rugosidad del canal. O sea, se divide el canal en dos partes: una de área A_1, y radio hidráulico R_1, que está dominada por la rugosidad del lecho del canal, por el balance de la sección $A_2 = A_0 - A_1$ y por el radio hidráulico R_2, que a su vez están dominados por la rugosidad de la cubierta de hielo, donde A_0 es el área hidráulica total. Uzuner (1975) revisó la mayoría de las hipótesis desarrolladas entre 1931 y 1969, y algunos de estos resultados se resumen en la tabla 5.1. En esta tabla los subíndices 0, 1, y 2 designan a parámetros asociados con las secciones compuesta, el lecho, y la cubierta de hielo, respectivamente; $\phi = P_2/P_1$, y_j = distancias de los tipos de frontera al punto de velocidad máxima, y $\bar{u}_j$ = velocidades medias de las secciones.

Las limitantes de estas ecuaciones resumidas en la tabla 5.1, que son primordialmente para uso en cubiertas de hielo flotantes, son: 1) con la excepción del método de Hancu, todas las ecuaciones están basadas en la ecuación de Manning y por tanto son aplicables sólo para flujos completamente turbulentos, 2) todos los métodos suponen que la sección transversal puede dividirse en dos partes, en donde la cubierta de hielo sólo afecta a la parte superior y el lecho solamente a la inferior; 3) no se dispone de estimaciones confiables de n_2 para los distintos tipos de cubiertas de hielo; y 4) el coeficiente de rugosidad estimado es constante y no puede reflejar el cambio en la rugosidad del hielo a lo largo de la estación de invierno.

Como consecuencia de las limitaciones de las ecuaciones de la tabla 5.1, Tsang (1982) empezó su deducción del cálculo de flujo uniforme en un canal cubierto por hielo con una ecuación de balance de fuerzas, análoga a la empleada en el capítulo anterior para el desarrollo de la ecuación de Chezy o

$$\rho g A_w \,\Delta h = \tau_b A_b + \tau_i A_i \tag{5.4.6}$$

donde ρ = densidad del agua
A_w = área de la sección transversal del canal
A_b = área superficial del fondo del canal
A_i = área de la superficie de abajo del hielo
Δh = pérdida de carga a través de la sección
τ_b = esfuerzo cortante del fondo del canal
τ_i = esfuerzo cortante de la cubierta de hielo

Al simplificar (5.4.6) se obtiene

$$\rho g A_w S = \tau_b P_b \left(1 + \frac{\tau_i A_i}{\tau_b A_b}\right) \tag{5.4.7}$$

donde P_b = perímetro mojado de la sección transversal, que excluye la capa de hielo. Sea r_s la razón de esfuerzo al cortante o

$$r_s = \frac{\tau_i}{\tau_b}$$

TABLA 5.1 Relaciones de rugosidades compuestas para canales de hielo

Investigador	Ecuación	Comentario
Pavlovskiy en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \left[\frac{1 + \phi\,(n_2/n_1)^2}{1 + a}\right]^{1/2}$	
Lotter en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \frac{\phi + 1}{1 + \phi(n_1/n_2)}$	
Belokon en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \left[1 + \phi\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{3/2}\right]^{2/3}$	
Sabaneev en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \frac{[1 + (n_2/n_1)^{2/2r+1}]^{(2r+1)/2}}{1 + \phi}$	
Chow (1959)	$\frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left[\phi^{3/4} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{3/2}\right]^{2/3}$	$r = 1/6$
Hancu en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{1/6}\left[\left(\frac{\overline{u}_1}{\overline{\overline{u}}_0}\right)^2 + \left(\frac{\overline{u}_2}{\overline{\overline{u}}_0}\right)^2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{1/3}\right]^{1/2}$	
Yu-Graf-Levine en Uzuner (1975)	$\frac{n_0}{n_1} = \left[\frac{1 + \phi^z\,(n_2/n_1)^{3/2}}{(1+\phi)^z}\right]^{2/3}$	$z = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/6}$
Larsen (1969)	$\frac{n_0}{n} = \frac{0.63\,[y_2/y_1 + 1]^{5/3}}{(n_1/n_2)\,(y_2/y_1)^{5/3} + 1}$	

y que C_i represente la fracción de superficie cubierta por el hielo de la superficie del canal o

$$C_i = \frac{A_i}{A_b}$$

Con estas definiciones, la ecuación (5.4.7) queda como

$$\rho gRS = \tau_b(1 + r_s C_i) \tag{5.4.8}$$

Se puede suponer que

$$\overline{u} = \phi C\sqrt{RS} \tag{5.4.9}$$

donde

$$\phi = \left[\frac{1}{\psi\,(1 + rC_i)}\right]^{1/2}$$

donde ψ designa una función desconocida, ϕ es menor que 1, y C = coeficiente de rugosidad de Chezy para el canal sin cubierta de hielo. Nótese que la ecua-

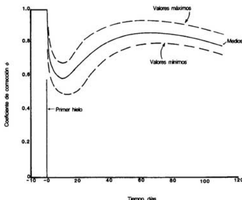


FIGURA 5.10 Variación de ϕ con el tiempo.

ción (5.4.9) es análoga a la ecuación de Chezy [ecuación (4.2.4)] y es aplicable a cualquier tipo de flujo sin importar si es completamente turbulento o no.

Al examinar las condiciones de invierno en el Beuharnois Canal, entre Lakes St. Francis y St. Louis enel río St. Lawrence, Tsang (1982) encontró que ϕ era una función que dependía en gran medida del tiempo medido a partir del día de formación del hielo (Fig. 5.10). Respecto a esta figura, que se basa en ocho años de observaciones, debe notarse lo siguiente: primero, a partir de la primera aparición de hielo en el canal, el valor de ϕ decrece significativamente. Aunque el mayor decrecimiento se presenta dos días después de la aparición del hielo, el valor mínimo de ϕ se obtiene, en promedio, en el lapso de una semana. Segundo, después de obtenido el valor mínimo de ϕ, el valor de este parámetro aumenta lentamente hasta que llega a un máximo local, alrededor de tres quintos de la estación de hielo. Tercero, después de llegar a este máximo local, el valor de ϕ decrece lentamente hasta que se llega al día de resquebrajamiento del hielo. Cuarto, durante el resquebrajamiento del hielo, el valor de ϕ aumenta o disminuye rápidamente y después aumenta, según sea la forma de rompimiento del hielo. Esto no se muestra en la Fig. 5.10.

Es necesario que las observaciones hechas arriba se correlacionen con una descripción física de la situación. Tsang (1982) atribuyó el decrecimiento rápido del valor de ϕ después de la formación del hielo a la presencia de grandes cantidades de hielo frazil en el flujo. Notó que cuando la concentración de hielo frazil fue la mayor, la resistencia al flujo en el canal también era máximo. La reducción de la velocidad media de flujo, en estas condiciones, provocó una consolidación del hielo frazil en una capa completa de hielo. A medida que

se alisaba la cara inferior de la cubierta de hielo por el flujo, aumentó el valor de ϕ. Hacia el final del invierno, ϕ llegó a un máximo local y empezó a decrecer, un fenómeno atribuido a un muy leve calentamiento del agua que fluía bajo el hielo. Ashton y Kennedy (1972) han notado que un flujo en la cara inferior, que presenta sólo fracciones de grado más altas que el punto de congelación, puede producir ondulaciones en la cara inferior del hielo que aumentan la rugosidad del canal. Una vez formadas, las ondulaciones del hielo tienden a persistir hasta el final de la temporada de invierno. Entonces, cuando se rompe el hielo, ϕ debería aumentar rápidamente a un valor de 1, y una vez que lo alcanza se derrite el hielo o decrecer rápidamente si se rompen bloques, en lo que se produce un embotellamiento de hielo.

Debe notarse que, de muchas maneras, estos resultados representan un caso especial. Por ejemplo, el gasto en este canal está regulado, y durante los meses de invierno el canal está por completo cubierto por hielo. En un canal natural con una velocidad importante de flujo, el canal rara vez está completamente cubierto de hielo. Por ende, los resultados presentados en la figura 5.9 deben considerarse solamente como indicativos de un patrón que puede encontrarse en canales que desarrollan cubiertas de hielo. El punto sobresaliente es que ϕ –y por tanto C o n es una función del tiempo o del desarrollo de la cubierta de hielo en la temporada de invierno. Por esto, la suposición de que el coeficiente de rugosidad, cuyo valor permanece constante, quizá sea equivocada.

En una discusión subsecuente de este trabajo, Calkins y Ashton (1983) criticaron el trabajo de Tsang (1982) porque no separaba explícitamente el importante efecto del doblar aproximadamente el perímetro mojado, de los efectos secundarios como: la variación del coeficiente de rugosidad de la capa de hielo, la intercepción de flujo causadas por el hielo frazil y los cambios de cargas asociados con los cambios en el perfil gradualmente variado. Calkins yAshton (1983) concluyeron que la metodología propugnada por Tsang (1982) parecería ser inapropiada, excepto para casos de ubicaciones específicas donde se tuvieran registros históricos para estimar ϕ. En respuesta a estos comentarios, Tsang (1983) notó que su trabajo claramente demostraba que en el Beauharnois Canal el factor que tenía la mayor influencia en la capacidad de conducción del canal no era una capa sólida de hielo, sino la presencia de hielo frazil sobre el flujo. En este caso, donde un aumento a la resistencia del flujo es el resultado de una frontera no sólida, los métodos descritos previamente en esta sección no se pueden aplicar. Aunque —hasta que no se disponga de resultados adicionales— la metodología propugnada por Tsang (1982) debe considerarse novedosa pero específica al sitio. *Nota*: el modelo de dependencia del tiempo de Tsang (1982), es conceptualmente similar a la hipótesis de Nezhikhovsky (1964), que involucraba una dependencia del tiempo de n, (véase p. ej., Shen y Yapa (1982). Además, Shen (1983) provée una revisión breve sobre resistencia al flujo causada por otras formas de hielo como: congestionamientos de hielo, presas de hielo colgantes, suspensiones de frazil, y cubiertas de hielo en movimiento.

Gasto normal en canales de sección compuesta

En el capítulo 2, se discutió —desde el punto de vista de la energía específica— el problema de canales compuestos de distintas subsecciones en donde cada una de ellas tiene su propio coeficiente de rugosidad. Este tipo de canal también requiere una consideración especial, desde el punto de vista del cálculo de gasto normal. A medida que el flujo empieza a cubrir la llanura de inundación, el perímetro mojado de la sección aumenta rápidamente, mientras que el área aumenta de manera lenta. Por ende, en esta situación, el radio hidráulico, la velocidad, y el gasto disminuyen al aumentar el tirante; una situación que aunque es correcta, en los cálculos resulta físicamente incorrecta. Se han sugerido varios métodos para darle la vuelta a este problema de cálculo:

1. Toda el área de la sección transversal *A(abcdefgh)*, (véase la Fig. 5.11) se divide entre todo el perímetro *P(abcdefgh)* para obtener un radio hidráulico medio o compuesto. De esta forma, se puede calcular una velocidad media y el gasto. Como se notó arriba, este método da resultados erróneos para tirantes someros en las secciones laterales.
2. Se divide el canal en una sección principal y dos secciones laterales mediante las líneas verticales *ic* y *jf*. El área del canal principal es *A(icdefj)* con un perímetro mojado *P(icdefj)*. Las secciones laterales tienen las siguientes áreas y perímetros mojados: *A(abci)*, *P(abc)*, y *A(jfgh)*, y *P(fgh)*. En este método las líneas *ic* y *jf* se incluyen en el perímetro mojado del canal principal, ya que el cortante en estas líneas no es cero (véase, p. ej., Myers, 1978); aunque, se supone que el cortante en estas líneas no afecta al flujo lateral.
3. El canal se divide como en el método 2, pero no se consideran las líneas *ic* y *jf* como partes del perímetro mojado.
4. Se divide la sección transversal mediante las líneas *ck* y *fk*, que bisectan los ángulos reentrantes. Se calcula el perímetro mojado de las tres subsecciones incluyendo solo las fronteras sólidas, y se calcula el radio hidráulico pesado para toda la sección con

$$R = \frac{\{[A(abck)]^2/P(abc)\} + \{[A(kcdef)]^2/P(cdef)\} + \{[A(kfgh)]^2/P(cgh)\}}{A(abck) + A(kcdef) + A(kfgh)}$$

Posey (1967) valúo la precisión de los métodos anteriores con un conjunto de datos tomados de experimentos en un canal de laboratorio, con las dimensiones mostradas en la Fig. 5.11. En estos experimentos, la rugosidad del canal principal y lateral es uniforme, y por ende esta evaluación examinó principalmente la habilidad de los métodos descritos arriba para tomar en cuenta la geometría compleja del canal. Posey (1967) concluyó que: 1) el método 2 es superior cuando el tirante en las secciones laterales es pequeño y 2) el método

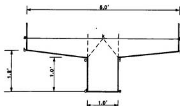


FIGURA 5.11 Definición de la sección transversal.

1 es mejor cuando el tirante en las secciones laterales es, por lo menos, la mitad de la altura de la sección principal hasta el inicio de las laterales. Debe notarse que los datos que tenía Posey son limitados y que es necesario hacer más investigaciones en este campo.

BIBLIOGRAFÍA

Ashton, G. D., and Kennedy, J. F., "Ripples on Underside of River Ice Covers," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 98, no. HY9, September 1972, pp. 1603–1624.

Benson, M. A., and Dalrymple, T., "General Field and Office Procedures for Indirect Discharge Measurements," *Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey*, book 3, chapter A1, U.S. Geological Survey, Washington, 1976.

Calkins, D. J., and Ashton, G. D., Discussion of "Resistance of Beauharnois Canal in Winter," by G. Tsang, *Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers*, vol. 109, no. 4, April 1983, pp. 641–642.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Cox, R. G., "Effective Hydraulic Roughness for Channels Having Bed Roughness Different from Bank Roughness," Miscellaneous paper H-73-2, U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS, February 1973.

Dalrymple, T., and Benson, M. A., "Measurement of Peak Discharge by the Slope-Area Method," *Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey*, book 3, chapter A2, U.S. Geological Survey, Washington, 1976.

Einstein, H. A., and Banks, R. B., "Fluid Resistance of Composite Roughness," *Transactions of the American Geophysical Union*, vol. 31, no. 4, August 1950, pp. 603–610.

Glancy, P. A., and Harmsen, L., "A Hydrologic Assessment of the September 14, 1974 Flood in Eldorado Canyon, Nevada," Geological Survey Professional Paper 930, U.S. Geological Survey, Washington, 1975.

Horton, R. E., "Separate Roughness Coefficients for Channel Bottom and Sides," *Engineering News Record*, vol. III, no. 22, Nov. 30, 1933, pp. 652–653.

Larsen, P. A., "Head Losses Caused by an Ice Cover on Open Channels," *Journal of the Boston Society of Civil Engineers*, vol. 56, no. 1, 1969, pp. 45–67.

Michel, B., and Ramseier, R. O., "Classification of River and Lake Ice," *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 8, no. 36, 1971, pp. 36–45.

Myers, W. R. C., "Momentum Transfer in a Compound Channel," *International Association for Hydraulic Research, Journal of Hydraulic Research*, vol. 16, no. 2, 1978, pp. 139–150.

Nezhikhovskiy, R. A. "Coefficients of Roughness of Bottom Surface of Slush Ice Cover," *Soviet Hydrology: Selected Papers*, no. 2, 1964, pp. 127–149.

Osterkamp, T. E., "Frazil Ice Formation: A Review," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY9, September 1978, pp. 1239–1255.

Pine, L. S., and Allen, R. C., *Numerical Computing: Introduction*, Saunders, Philadelphia, 1973.

Posey, C. J., "Computation of Discharge Including Over-Bank Flow," *Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, April 1967, pp. 62–63.

Sharp, J. J., *Hydraulic Modelling*, London, Butterworth, 1981.

Shen, H. T., "Hydraulic Resistance of River Ice," ASCE, *Proceedings of the Conference on Frontiers in Hydraulic Engineering*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Ma., 1983, pp. 224–229.

Shen, H. T., and Yapa, P. N. D., "Simulation of Undersurface Roughness Coefficient of River Ice Cover," Report No. 82-6, Department of Civil and Environmental Engineering, Clarkson College, Potsdam, New York, July, 1982.

Tsang, G., "Resistance of Beauharnois Canal in Winter," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 108, no. HY2, February 1982, pp. 167–186.

Tsang, G., Closure to "Resistance of Beauharnois Canal in Winter," *Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers*, vol. 109, no. 4, April 1983, pp. 642–643.

Uzuner, M. S., "The Composite Roughness of Ice Covered Streams," *International Association for Hydraulic Research, Journal of Hydraulic Research*, vol. 13, no. 1, 1975, pp. 79–102.

Vanoni, V., and Brooks, N. H., "Laboratory Studies of the Roughness and Suspended Load of Alluvial Streams," Report No. 11, California Institute of Technology, Pasadena, 1957.

SEIS

Teoría y análisis del flujo gradual y espacialmente variado

SINOPSIS

Este capítulo trata sobre la teoría y análisis de los flujos gradual y espacialmente variados. Cuando el tirante varía con la distancia longitudinal en un flujo en canal abierto, se dice que el flujo es *gradualmente variado*. Estas situaciones ocurren aguas arriba o abajo de las secciones de control. En este capítulo se estudian métodos tabulares, digitales y gráficos para la estimación del tirante en función de la distancia longitudinal.

El flujo permanente, espacialmente variado es por definición un flujo en el cual el gasto varía con la distancia longitudinal. Estas situaciones se presentan en vertedores de canal lateral, colectores de escurrimientos pluviales, canales con fronteras permeables, y estructuras de caída en el fondo del canal. Se consideran soluciones tabulares de las ecuaciones diferenciales que rigen el flujo espacialmente variado para incrementos y decrementos de gasto.

Para concluir, se analizan varias consideraciones prácticas incluyendo métodos de cómputo de flujo permanente alrededor de islas.

6.1 SUPOSICIONES BÁSICAS Y LA ECUACIÓN DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Como se estudió en el capítulo 2, la variación gradual del tirante en la dirección longitudinal en un canal abierto está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - \mathbf{F}^2} \tag{6.1.1}$$

Mientras que en el capítulo 2 se determinaron soluciones de esta ecuación para el caso especial de que $S_f = 0$, en este capítulo se buscarán soluciones para esta ecuación cuando $S_f \neq 0$. En general, todas las técnicas de solución que se desarrollarán para flujo gradualmente variado dependen de las siguientes suposiciones:

1. La pérdida de carga es igual a la pérdida de carga en el tramo para un flujo uniforme con el mismo radio hidráulico y velocidad media, o en términos de la ecuación de Manning

$$S_f = \frac{n^2\overline{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}} \tag{6.1.2}$$

Se cree que los errores ocasionados por esta suposición son pequeños en comparación con los producidos por el empleo normal de la ecuación de Manning en la estimación del coeficiente de rugosidad. Esta suposición es tal vez más precisa en el caso de campos de flujo que se contraen que en campos de flujos expansivos dado que en la primera la pérdida de energía es primordialmente el resultado de efectos de fricción y en la segunda pueden tenerse pérdidas significativas atribuibles a vórtices.

2. La pendiente del canal es pequeña; por ende, el tirante es el mismo si se mide en forma vertical o perpendicular con respecto al fondo.
3. No se tiene inclusión de aire. Si se tuviese inclusión significativa de aire, el problema se resuelve bajo la suposición de que no existe inclusión de aire y se modifica el perfil resultante para tomar en cuenta la inclusión del aire.
4. La distribución de velocidades en el canal es fija; por lo que, el coeficiente de corrección de energía cinética, α, es constante.
5. El coeficiente de rugosidad es independiente del tirante y constante en todo el tramo bajo consideración.

6.2 CARACTERÍSTICAS Y CLASIFICACIÓN DE LOS PERFILES DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Al examinar el cómputo de perfiles de flujo gradualmente variado, se necesita primero desarrollar un método sistemático para clasificar los perfiles que pueden presentarse en un canal dado. Recuérdese que

$$\mathbf{F}^2 = \frac{Q^2 T}{g A^3}$$

para un canal de forma arbitraria, nótese que la ecuación (6.1.2) puede escribirse como

$$S_f = \frac{n^2 Q^2 P^{4/3}}{\phi^2 A^{10/3}}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (6.1.1) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - (n^2 Q^2 P^{4/3}/\phi^2 A^{10/3})}{1 - (Q^2 T / g A^3)} \tag{6.2.1}$$

Para un valor dado de Q, $\mathbf{F}$ y S_f son funciones del tirante y, y en un canal ancho $\mathbf{F}$ y S_f variarán casi en la misma forma que y dado que $P \simeq T$ y tanto S_f como $\mathbf{F}$ tienen una fuerte dependencia inversa en el área de flujo. Además, al aumentar y, $\mathbf{F}$ y S_f decrecerán. Por definición $S_f = S_o$ cuando $y = y_N$; por ende, el siguiente juego de desigualdades debe cumplirse

$$S_f \gtreqless S_o \text{ correspondiente a } y \lesseqgtr y_N \tag{6.2.2}$$

y

$$\mathbf{F} \gtreqless 1 \text{ correspondiente a } y \lesseqgtr y_c \tag{6.2.3}$$

Estas desigualdades dividen al canal en tres secciones en la dimensión vertical (Fig. 6.1). Por convención, estas secciones se numeran del 1 al 3 empezan-

do desde arriba. Para un canal con pendiente suave o subcrítica (Fig. 6.1) se pueden apuntar los siguientes resultados donde y es el tirante real del flujo:

1. Zona 1: $y > y_N > y_c$; $S_o > S_f$, $\mathbf{F} < 1$; por lo tanto $dy/dx > 0$.
2. Zona 2: $y_N > y > y_c$; $S_o < S_f$, $\mathbf{F} < 1$; por lo tanto $dy/dx < 0$.
3. Zona 3: $y_N > y_c > y$; $S_o < S_f$, $\mathbf{F} > 1$; por lo tanto $dy/dx > 0$.

Una vez determinado el signo de dy/dx para cada región, se puede predecir el comportamiento del perfil de la superficie del agua. Considérense uno por uno los casos anteriores.

Zona 1: En este caso, en la frontera de aguas arriba, $y \to y_N$ y por definición $S_f \to S_o$; por ende, $dy/dx = 0$. En la frontera de aguas abajo, $y \to \infty$ y S_f y $\mathbf{F}$ se aproximan a cero; por lo que $dy/dx \to S_o$ y la superficie del agua se aproxima asintóticamente a una línea horizontal. Con estos resultados, emerge un panorama claro de qué circunstancias podrían causar este tipo de perfiles. Este tipo de situación puede presentarse detrás de una cortina y se le designa como curva de remanso M1 donde M indica la pendiente del canal ("mild" en inglés, suave en español) y el 1 identifica la región vertical del canal en la cual se presenta el perfil.

Zona 2: En este caso, en la frontera de aguas arriba, $y \to y_N$ y por definición $S_f \to S_o$; por lo que $dy/dx \to 0$. En la frontera de aguas abajo, $y \to y_c$ y $dy/dx \to \infty$. La condición de frontera de aguas abajo no puede realmente cumplirse dado que la superficie del agua no puede formar un ángulo recto con el fondo del canal. Este tipo de perfil puede presentarse en una caída libre o una transición entre un canal de pendiente suave a pendiente pronunciada o supercrítica. A este tipo de perfil se le denomina curva de remanso M2.

Zona 3: En la frontera de aguas arriba, $y \to 0$ y S_f y $\mathbf{F}$ tienden a infinito, dando como resultado que dy/dx tienda a un límite positivo finito. Este resultado es de interés limitado debido a que un tirante de cero no se puede presentar. En la frontera de aguas abajo, $y \to y_c$, la derivada dy/dx es positiva, y el tirante aumenta hasta que se llega al tirante conjugado y se forma el salto hidráulico. A este perfil se le denomina perfil M3 y puede presentarse aguas abajo en una compuerta en un canal de pendiente suave o en un punto donde un canal de pendiente supercrítica se encuentra con uno de pendiente suave.

La información dada arriba presenta una descripción bastante detallada de los perfiles de flujo gradualmente variado en canales con pendiente suave. En la figura 6.1, se resumen esquemáticamente los posibles perfiles de flujo gradualmente variado para distintos tipos de pendientes de fondo, y en la ta-

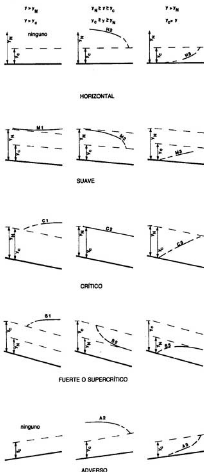


FIGURA 6.1 Sistema de clasificación de perfiles de flujo gradualmente variados.

TABLA 6.1 Tipos de perfiles de flujo

Pendiente del canal	Designación de perfil Zona 1	Zona 2	Zona 3	Relación relativa de y a y_N y y_c	Tipo de curva	Tipo de flujo
Suave	M1			$y > y_N > y_c$	Remanso	Subcrítico
$0 < S_o < S_c$		M2		$y_N > y > y_c$	Caída	Subcrítico
			M3	$y_N > y_c > y$	Remanso	Supercrítico
Crítica	C1			$y > y_c = y_N$	Remanso	Subcrítico
$S_o = S_c > 0$		C2		$y_c = y = y_N$	Paralela al fondo del canal	Uniforme-crítico
			C3	$y_c = y_N > y$	Remanso	Supercrítico
Fuerte $S_o > S_c > 0$	S1			$y > y_c > y_N$	Remanso	Subcrítico
		S2		$y_c > y > y_N$	Caída	Supercrítico
			S3	$y_c > y_N > y$	Remanso	Supercrítico
Horizontal $S_o = 0$	Ninguna					
		H2		$y_N > y > y_c$	Caída	Subcrítico
			H3	$y_N > y_c > y$	Remanso	Supercrítico
Adversa $S_o < 0$	Ninguna					
		A2		$y_N^* > y > y_c$	Caída	Subcrítico
			A3	$y_N^* > y_c > y$	Remanso	Supercrítico

*Supuesto positivo.

bla 6.1 se resumen los distintos tipos de perfiles en forma tabular. El material que sigue describirá en forma sucinta las diversas posibilidades.

Perfiles S En estos perfiles, $S_o > S_c$ y $y_N < y_c$. El Perfil S1 por lo general comienza con un salto en la frontera de aguas arriba y termina con un perfil tangente a la horizontal en la frontera de aguas abajo, e.g., el flujo detrás de una presa construida en un canal de pendiente pronunciada. El perfil S2 es una curva de rápida que es comúnmente muy corta. En la frontera de aguas abajo, este perfil es tangente al tirante normal. Este tipo de perfil se puede presentar aguas abajo de un ensanchamiento del canal y también aguas abajo de una transición de pendientes de una pronunciada a una más pronunciada. El perfil S3 es también transicional ya que conecta un flujo supercrítico con el tirante normal. Este perfil se puede presentar en una transición de pendiente entre pronunciada y suave o aguas abajo de una compuerta en una pendiente suave donde el agua inicialmente fluye por debajo del tirante normal.

Perfiles C En estos perfiles, $S_o = S_c$ y $y_N = y_c$. El perfil C1 es asintótico a una línea horizontal, e.g., un perfil que conecta a un canal de pendiente crítica

con un canal de pendiente suave. El perfil C3 puede conectar un flujo supercrítico con un almacenamiento en una pendiente crítica.

Perfiles H En este caso $S_o = 0$, y los perfiles H pueden considerarse como un caso límite de los M. El perfil de la curva de abatimiento H2 puede encontrarse aguas arriba de una caída libre, mientras que el perfil H3 puede conectar un flujo supercrítico bajo una compuerta con un nivel en vaso.

Perfiles A En estos perfiles $S_o < 0$. En general, los perfiles A2 y A3 se presentan con poca frecuencia y son similares a los H2 y H3.

En resumen, se pueden apuntar los siguientes principios respecto a los perfiles de flujo gradualmente variado:

1. El signo de dy/dx puede determinarse a partir de las ecuaciones (6.2.1) a (6.2.3).
2. Cuando el perfil de la superficie del agua se acerca al tirante normal, lo hace en forma asintótica.
3. Cuando el perfil de la superficie del agua se acerca al tirante crítico, lo atraviesa en un ángulo grande pero finito.
4. Si el flujo es subcrítico aguas arriba pero atraviesa el tirante crítico, entonces el rasgo que produce el tirante crítico determina y ubica todo el perfil de la superficie del agua. Si el flujo aguas arriba es supercrítico, e.g., en el caso de un perfil M3, entonces el control no puede estar aguas abajo.
5. Todos los perfiles de flujo gradualmente variado ejemplifican el principio de que los flujos subcríticos están controlados desde aguas abajo y los supercríticos desde aguas arriba. Los perfiles de flujo gradualmente variados no existirían si no hubiese controles de aguas arriba y abajo.
6. En canales con pendientes horizontales y adversas, la terminología *tirante normal* no tiene ningún significado dado que el tirante normal es negativo o imaginario. De todas maneras, en estos casos, el numerador de la ecuación (6.2.1) es negativo por lo que se puede deducir la forma del perfil.

6.3 CÁLCULO DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

En esta sección, se discuten varios métodos de integración de la ecuación (6.1.1) para determinar la variación del tirante con la distancia. Aunque hay varias técnicas de solución para obtener esta integración, dada una situación particular, un método puede ser mejor que los otros. Por ende, se le advierte al lector que considere con detenimiento el problema antes de proceder con un procedimiento de cómputo. Todas las soluciones de la ecuación de flujo gradualmente variado deben empezar con un tirante en un control y proceder en la dirección en que opera dicho control. En la frontera de aguas arriba,

el perfil gradualmente variado puede aproximarse a un tirante especificado en forma asintótica. En este momento bajo la condición de un acercamiento asintótico, debe desarrollarse una definición razonable de convergencia.

Canales Uniformes

En el caso de un canal uniforme, i.e., un canal prismático con pendiente y coeficiente de rugosidad constantes, es posible plantear una solución tabular de la ecuación de flujo gradualmente variado. En este canal,

$$\frac{dE}{dx} = S_o - S_f = S_o - \frac{n^2\overline{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}} \tag{6.3.1}$$

o en forma de diferencias finitas

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\Delta[y + (\overline{u}^2/2g)]}{\Delta x} = S_o - \frac{n^2\overline{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}} \tag{6.3.2}$$

En esta ecuación, todas las variables, con la excepción de Δx, son funciones de y, el tirante. Por ende, la ecuación (6.3.2) pude resolverse seleccionando valores de y, calculando $\overline{u}$ y R, y resolviendo para el valor de Δx correspondiente a y o

$$\Delta x = \frac{\Delta[y + (\overline{u}^2/2g)]}{S_o - (n^2\overline{u}^2/\phi^2 R^{4/3})_m} \tag{6.3.3}$$

donde el subíndice m indica un valor medio sobre el intervalo bajo consideración. A esto se le denomina por lo común el *método del paso directo.* La dificultad principal de este método es que en la mayor parte de los casos ΔE o $\Delta[y + (\overline{u}^2/2g)]$ es pequeña; por lo que se tiene que resolver la dificultad de determinar una diferencia pequeña entre dos números relativamente grandes. Esta dificultad de cómputo puede resolverse empleando la ecuación (2.2.1) en forma de diferencias finitas o

$$\Delta E = \Delta y(1 - \mathbf{F}^2) \tag{6.3.4}$$

y la ecuación (6.3.3) se convierte entonces en

$$\Delta x = \frac{\Delta y(1 - \mathbf{F}^2)_m}{S_o - (n\overline{u}^2/\phi^2 R^{4/3})_m} \tag{6.3.5}$$

Una dificultad secundaria con esta técnica de solución se presenta en situaciones en las que $S_f \rightarrow S_o$ dado que en este caso la diferencia $S_o - S_f$ es pequeña. Por lo general esto no presenta graves dificultades desde un punto de vista práctico dado que los detalles del acercamiento asintótico del tirante al tirante normal no son de interés. Los detalles de este método de solución se ilustran mejor con un ejemplo.

EJEMPLO 6.1

Un canal trapecial con ancho b = 20 ft (6.1 m), n = 0.025, z = 2, y S_o = 0.001 tiene un gasto de 1000 ft³/s (28 m³/s). Si este canal termina en una caída libre, determínese el perfil de flujo gradualmente variado con el método del paso directo.

Solución

El perfil del flujo será el de una curva de abatimiento, y el primer paso para resolver este problema es el de establecer el tirante en las fronteras de aguas arriba y abajo.

1. *Frontera de aguas arriba:* En la frontera de aguas arriba, el tirante será y_N. y_N puede determinarse a partir de la información dada con el programa de computadora del apéndice I con

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} = \frac{0.025(1000)}{1.49\sqrt{0.001}} = 531$$

y

$$y_N = 6.25 \text{ ft } (1.90 \text{ m})$$

Dado que en esta frontera el tirante se aproxima a y_N en forma asintótica, se debe establecer una definición razonable de convergencia; e.g., los cálculos se llevarán a cabo hasta que el tirante sea de $0.90y_N$ o 5.62 ft (1.71 m).

2. *Frontera de aguas abajo:* En la frontera de aguas abajo, el tirante será y_c. De la ecuación (2.2.3)

$$\frac{\overline{u}^2}{2g} = \frac{D}{2} \Rightarrow \frac{Q^2}{gA^2} = \frac{A}{T}$$

o

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{T}$$

donde

$$A = (b + zy)y = (20 + 2y)y$$

$$T = b + 2zy = 20 + 4y$$

De donde

$$\frac{y_c^3(20 + 2y_c)^3}{20 + 4y_c} = \frac{(1000)^2}{32.2} = 31\,060$$

Por tanteos

$$y_c = 3.74 \text{ ft } (1.14 \text{ m})$$

Por tanto, la extensión de los tirantes en estos cálculos es de 3.74 ft (1.14 m) en el control a 5.62 ft en la frontera de aguas arriba. El número de Froude en la frontera de aguas arriba es

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}} = 0.41$$

TABLA 6.2 Ejemplo 6.1

(a) Solución del ejemplo 6.1 empleando la ecuación (6.3.3)

y, ft (1)	A, ft^2 (2)	P, ft (3)	R, ft (4)	$\bar{u}$, ft/s (5)	$\frac{\bar{u}^2}{2g}$, ft (6)	E, ft (7)	$\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2R^{4/3}}$ (8)	$\left(\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2R^{4/3}}\right)_m$ (9)	$S_o - \left(\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2R^{4/3}}\right)_m$ (10)	ΔE, ft (11)	Δx, ft (12)	$x = \Sigma\Delta x$, ft (13)
3.74	103	36.7	2.81	9.71	1.46	5.20	0.00670					
								0.00601	−0.00501	+0.0400	−8.00	
4.00	112	37.9	2.95	8.93	1.24	5.24	0.00531					−8.0
								0.00478	−0.00378	+0.0700	−18.5	
4.25	121	39.0	3.10	8.26	1.06	5.31	0.00425					−27
								0.00386	−0.00286	+0.110	−38.5	
4.50	130	40.1	3.24	7.69	0.918	5.42	0.00347					−65
								0.00314	−0.00214	+0.120	−56.1	
4.75	140	41.2	3.40	7.14	0.792	5.54	0.00281					−121
								0.00256	−0.00156	+0.150	−96.1	
5.00	150	42.3	3.55	6.67	0.691	5.69	0.00231					−217
								0.00213	−0.00113	+0.170	−150	
5.25	160	43.5	3.68	6.25	0.607	5.86	0.00194					−367
								0.00179	−0.000790	+0.180	−228	
5.50	170	44.6	3.81	5.88	0.537	6.04	0.00164					−595
								0.00156	−0.000560	+0.0800	−143	
5.62	176	45.1	3.90	5.68	0.501	6.12	0.00148					−738

(*b*) Solución del ejemplo 6.1 empleando las ecuaciones (6.3.4) y (6.3.5).

y, ft (1)	A, ft^2 (2)	P, ft (3)	T, ft (4)	R, ft (5)	D, ft (6)	$\bar{u}$, ft/s (7)	$\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}}$ (8)	F^2 (9)	$\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}}$ (10)	F_m^2 (11)	$S_o - \left(\frac{n^2\bar{u}^2}{\phi^2 R^{4/3}}\right)_m$ (12)	ΔE (13)	Δx (14)	$\Sigma\Delta x$ (15)
3.74	103	36.7	35.0	2.81	2.94	9.71	0.00670	0.996						
									0.00601	0.896	−0.00501	0.0270	−5.39	
4.00	112	37.9	36.0	2.95	3.11	8.93	0.00531	0.796						−5
									0.00478	0.722	−0.00378	0.0695	−18.4	
4.25	121	39.0	37.0	3.10	3.27	8.26	0.00425	0.648						−24
									0.0386	0.593	−0.00286	0.102	−35.7	
4.50	130	40.1	38.0	3.24	3.42	7.69	0.00347	0.537						−59
									0.00314	0.489	−0.00214	0.128	−59.8	
4.75	140	41.2	39.0	3.40	3.59	7.14	0.00281	0.441						−119
									0.00256	0.404	−0.00156	0.149	−95.5	
5.00	150	42.3	40.0	3.55	3.75	6.67	0.00231	0.368						−215
									0.00213	0.340	−0.00113	0.165	−146	
5.25	160	43.5	41.0	3.68	3.90	6.25	0.00194	0.311						−361
									0.00179	0.288	−0.000790	0.178	−225	
5.50	170	44.6	42.0	3.81	4.05	5.88	0.00164	0.265						−586
									0.00156	0.254	−0.000560	0.0895	−160	
5.62	176	45.1	42.5	3.90	4.14	5.68	0.00148	0.242						−746

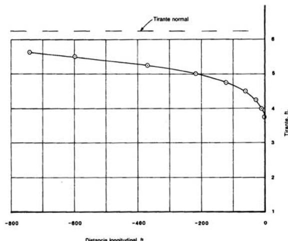


FIGURA 6.2 Curva de abatimiento para el ejemplo 6.1.

Por lo tanto, el perfil de abatimiento es una curva tipo M2. Los detalles del cálculo se presentan en la tabla 6.2 *a* y *b* y los resultados se resumen en la figura 6.2. En la tabla 6.2*a*, se empleó la ecuación (6.3.3), mientras que en la tabla 6.2*b*, se emplearon las ecuaciones (6.3.4) y (6.3.5). La diferencia observada en los resultados en la frontera de aguas arriba fue menor de 2%

Este método es útil para canales artificiales y tiene la ventaja distintiva de predecir una distancia longitudinal para un tirante especificado. Eso sí, el método tiene la desventaja de no poder predecir el tirante a una distancia especificada.

Un segundo método para estimar el perfil de flujo gradualmente variado en canales uniformes es por la integración directa de la ecuación (6.1.1). En esta ecuación el número de Froude para un canal de forma arbitraria se define como

$$\mathbf{F}^2 = \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3}$$

Recuérdese que en la ecuación (2.2.9) el factor de sección se definió como

$$Z = \sqrt{\frac{A^3}{T}}$$

Supóngase que se presenta un gasto crítico en el canal; entonces

$$Q = Z_c \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tag{6.3.6}$$

donde Z_c = factor de sección para flujo crítico. Es crucial diferenciar entre Z la cual es simplemente el valor numérico calculado para un Q y y dados y Z_c la cual se calcula para el Q dado como si este ocurriese con el tirante crítico. Al sustituir la definición de Z en la definición del número de Froude se obtiene

$$\mathbf{F}^2 = \frac{Z_c^2}{Z^2} \tag{6.3.7}$$

La pendiente de fondo del canal y la de energía pueden representarse en términos del factor de forma definido en la ecuación (5.1.3) o

$$S_o = \frac{Q^2}{K_N^2} \tag{6.3.8}$$

y

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} \tag{6.3.9}$$

Nuevamente es necesario distinguir entre K el cual es el valor numérico del factor de forma cuando el flujo se presenta con un tirante y y K_N el cual se calcula para un gasto dado Q como si el flujo se presentara con el tirante normal. Reordenando la ecuación (6.1.1) y sustituyendo las ecuaciones (6.3.7) a (6.3.9) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = S_o \left[\frac{1 - (K_N/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2}\right] \tag{6.3.10}$$

Si la ecuación (6.3.10) se debe resolver por integración directa, es necesario que se expresen los parámetros $(K_N/K)^2$ y (Z_c/Z) en términos del tirante. Dado que el factor de sección es sólo función de la pendiente del canal y y, supóngase que

$$Z^2 = Cy^M \tag{6.3.11}$$

donde C = un coeficiente y M = exponente hidráulico para flujo crítico. La relación funcional entre M, el tirante, y la geometría del canal se puede establecer tomando primero el logaritmo de ambos lados de la ecuación (6.3.11) y después diferenciar la ecuación respecto a y o

$$\frac{d(\ln Z)}{dy} = \frac{M}{2y} \tag{6.3.12}$$

Tomando el logaritmo y diferenciando la definición del factor de sección ecuación (2.2.9), con respecto a y se obtiene

$$\frac{d(\ln Z)}{dy} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} - \frac{1}{2T}\frac{dT}{dy} \tag{6.3.13}$$

Al combinar las ecuaciones (6.3.12) y (6.3.13) y resolviendo para M se obtiene

$$M = \frac{y}{A}\left(3T - \frac{A}{T}\frac{dT}{dy}\right) \tag{6.3.14}$$

Con un canal con geometría especificada, se puede calcular el valor de M para cada tirante. Para un canal rectangular, M tiene un valor de 3. En la tabla 6.3 se resumen las expresiones para el cálculo de M en canales de varias formas.

En forma análoga, si se supone que el factor de forma es también una función del tirante o

$$K^2 = C'y^N \tag{6.3.15}$$

donde C' = un coeficiente y N = exponente hidráulico para cálculos de flujo uniforme. Siguiendo un procedimiento análogo a la técnica empleada para M se obtiene

$$N = \frac{2y}{3A}\left(5T - 2R\frac{dP}{dy}\right) \tag{6.3.16}$$

El valor de N depende de si el factor de forma se expresa en función de la n de Manning o la C de Chezy. La ecuación (6.3.16) se basa en la ecuación de Manning. Por ejemplo, en un canal rectangular, $N = 3.33$ sí se emplea la ecuación de Manning, pero en $N = 3$ se emplea la ecuación de Chezy. En la tabla 6.3 se resumen las expresiones para el cálculo de N en canales de distintas formas. Debe notarse que en general N y M son funciones de y y no son constantes.

Al sustituir las ecuaciones (6.3.11) y (6.3.15) en la ecuación (6.3.10) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = S_o\left[\frac{1 - (y_N/y)^N}{1 - (y_c/y)^M}\right] \tag{6.3.17}$$

Dejando $u = y/y_N$ y reordenando resulta

$$dx = \frac{y_N}{S_o}\left[1 - \frac{1}{1 - u^N} + \left(\frac{y_c}{y_N}\right)^M \frac{u^{N-M}}{1 - u^N}\right] du \tag{6.3.18}$$

Para poder integrar la ecuación (6.3.18), se debe suponer que N y M son constantes. En general, es posible dividir al canal en subsecciones para que N y M permanezcan esencialmente constantes. Bajo esta suposición

$$x = \frac{y_N}{S_o}\left[u - \int_0^u \frac{du}{1 - u^N} + \left(\frac{y_c}{y_N}\right)^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1 - u^N}\,du\right] + C \tag{6.3.19}$$

TABLA 6.3 Valores de M y N para canales rectangulares, trapeciales y triangulares

	M	N
Rectangular	3.0	$10/3$
Trapecial	$\dfrac{3[1+2z(y/b)]^2-2z(y/b)[1+z(y/b)]}{[1+2z(y/b)][1+z(y/b)]}$	$\dfrac{10[1+2z(y/b)]}{3[1+z(y/b)]}-\dfrac{8(y/b)\sqrt{1+z^2}}{3[1+2(y/b)\sqrt{1+z^2}]}$
Triangular	5	$16/3$

donde la integral $(\int_0^u)\, du/(1-u^N) = F(u,N)$ se le conoce como la función de flujo gradualmente variado de Bakhmeteff y C = una constante de integración. La segunda integral en la ecuación (6.3.19) también puede expresarse en la forma de la función de flujo variado sustituyendo $v = u^{N/J}$ donde $J = N/(N - M + 1)$ (Chow, 1959). Entonces

$$\int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N}\,du = \frac{J}{N}\int_0^v \frac{dv}{1-v^J} = \frac{J}{N}F(v,J) \tag{6.3.20}$$

Con esta definición, la ecuación (6.3.19) se convierte en

$$x = \frac{y_N}{S_o}\left[u - F(u,N) + \frac{J}{N}\left(\frac{y_c}{y_N}\right)^M F(v,J)\right] + C$$

La constante de integración en esta ecuación, C, puede eliminarse si la ecuación (6.3.17) se integra entre dos estaciones o

$$L = x_2 - x_1 = A\,\{(u_2 - u_1) - [F(u_2, N) - F(u_1, N)] + B[F(v_2, J) - F(v_1, J)]\} \tag{6.3.21}$$

donde $A = y_N/S_o$ y $B = (y_c/y_N)^M J/N$. Aunque se dispone de tablas para valuar $F(u, N)$ y $F(v, J)$ (Apéndice II), por lo general es conveniente, al emplear el computador digital para estimar los perfiles de flujo gradualmente variado expresar $F(u, N)$ en la forma de una serie infinita o

1. Para $u < 1$

$$\int_0^u \frac{du}{1-u^N} = u + \frac{1}{N+1}u^{N+1} + \cdots + \frac{1}{(P-1)N+1}u^{(P-1)N+1} + R_P \tag{6.3.22}$$

donde N = exponente hidráulico
P = número del término de la serie ($P = 1, 2, \ldots, \infty$,)
R_P = residuo después de que se han sumado $(P - 1)$ términos

Respecto a la ecuación (6.3.22), se debe notar lo siguiente: primero,

$$R_P < \frac{u^{PN+1}}{PN+1}\left(\frac{1}{1-u^N}\right) \tag{6.3.23}$$

Segundo, para $u < 0.7$ la serie converge rápidamente, pero para $u = 1$ la serie diverge. Tercero, la serie converge más rápidamente al disminuir el valor de u.

2. Para $u > 1$

$$\int_0^u \frac{du}{1-u^N} = \frac{1}{(N-1)u^{N-1}} + \frac{1}{(2N-1)u^{2N-1}} + \cdots + \frac{1}{(PN-1)u^{PN-1}} + R_P \quad (6.3.24)$$

Para esta expansión en serie se debe notar lo siguiente: primero,

$$R_P < \frac{1}{(PN-1)^{PN-1}} \frac{u^N}{u^{N-1}} \quad (6.3.25)$$

Segundo, para $u > 1.5$ la serie converge rápidamente, pero para $u = 1$ la serie diverge. Tercero, la serie converge más rápidamente al aumentar el valor de u.

En este momento, debe notarse que la ecuación (6.3.17) puede integrarse en forma exacta para el caso especial en que $N = M = 3$, esto es, un canal rectangular con el factor de forma expresado en términos de la ecuación de Chezy. En este caso,

$$x = \frac{1}{S_0}\left\{y - y_N\left[1 - \left(\frac{y_c}{y_N}\right)^3\right]\phi\right\} \quad (6.3.26)$$

donde $\phi = \int \frac{du}{1-u^3} = \frac{1}{6}\log\left[\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2u+1}\right) + C$

a la cual se le conoce como la *función de Bresse*, y C = una constante de integración. Para propósitos de cómputo, conviene expresar por lo común a $(y_c/y_N)^3$ como

$$\left(\frac{y_c}{y_N}\right)^3 = \frac{C^2 S_o}{g}$$

EJEMPLO 6.2

Un canal trapecial con b = 20 ft (6.1 m), n = 0.025, z = 2, y S_o = 0.001 tiene un gasto de 1000 ft³/s (28 m³/s). Si este canal termina en una caída libre, determínese el perfil de flujo gradualmente variado por el método de integración directa.

Solución

En el ejemplo 6.1, para el mismo enunciado se determinó que

$$y_N = 6.25 \text{ ft } (1.90 \text{ m})$$

y

$$y_C = 3.74 \text{ ft } (1.14 \text{ m})$$

TABLA 6.4 Ejemplo 6.2

y, ft	$\bar{u}$	N	M	J	V	F(u,N)	F(v,J)	$\bar{J}$	$\bar{N}$	$\bar{M}$	Δx	ΣΔx
3.74	0.598	3.63	3.39	2.93	0.529	0.620	0.552					
								2.930	3.645	3.40	−1.7	
4.00	0.640	3.66	3.41	2.93	0.573	0.670	0.607					−2
								2.950	3.67	3.425	−19	
4.25	0.680	3.68	3.44	2.97	0.620	0.721	0.664					−21
								2.975	3.69	3.45	−35	
4.50	0.720	3.70	3.46	2.98	0.665	0.775	0.725					−56
								2.99	3.71	3.47	−60	
4.75	0.760	3.72	3.48	3.00	0.712	0.834	0.794					−116
								3.01	3.73	3.49	−92	
5.00	0.800	3.74	3.50	3.02	0.759	0.899	0.871					−208
								3.025	3.75	3.51	−147	
5.25	0.840	3.76	3.52	3.03	0.805	0.974	0.958					−355
								3.04	3.77	3.53	−237	
5.50	0.880	3.78	3.54	3.05	0.853	1.066	1.065					−591
								3.055	3.785	3.545	−153	
5.62	0.899	3.79	3.55	3.06	0.876	1.118	1.130					−745

En la tabla 6.4 se resume una solución tabular de este problema por el método de integración directa. Este método de solución predice que a 745 ft (227 m) de la caída libre el tirante será de 5.62 ft (1.71 m). Este resultado no difiere significativamente de los resultados del ejemplo 6.1.

Al igual que el método del paso directo discutido anteriormente, el método de integración directa tiene la desventaja de no poder predecir un tirante dada la distancia longitudinal. No obstante, este método tiene la ventaja distintiva de que cada paso es independiente del paso anterior; i.e., la longitud total del perfil del flujo gradualmente variado puede estimarse con un solo cómputo. Por ejemplo, la distancia entre los puntos (Ejemplo 6.2) donde $y = 3.74$ ft (1.14 m) y $y = 5.62$ ft (1.71 m) está dada por

$$L = \frac{6.25}{0.001}\left[(0.899 - 0.598) - (1.12 - 0.620) + \frac{2.99}{3.71}\left(\frac{3.74}{6.25}\right)^{3.47}(1.13 - 0.552)\right]$$

$$= -754 \text{ ft } (-230 \text{ m})$$

donde los valores de *M.J.* y *N* empleados en este cálculo se obtuvieron de la tabla que acompaña al ejemplo 6.2 y se promediaron sobre el tramo considerado. Este tipo de cálculo en un solo paso se puede hacer con el método de integración directa pero no con el del paso directo debido a que en este último método cada paso de cómputo depende del anterior. Desgraciadamente, esta ventaja del método de integración directa no puede explotarse efectivamente debido a que por lo común se deben conocer valores intermedios de x para poder graficar el perfil de flujo gradualmente variado.

Nótese en la tabla 6.4, que los exponentes hidráulicos muestran muy poco cambio a lo largo de toda la longitud de canal considerada. Cuando los exponentes hidráulicos están en función de la distancia longitudinal, se puede aplicar la metodología de Bakhmeteff-Chow si el largo del canal se divide en subtramos donde los exponentes hidráulicos son constantes en cada subtramo. En canales rectangulares, trapeciales, y triangulares, la suposición de exponentes hidráulicos constantes es generalmente satisfactoria, mientras que en canales circulares o canales en los que se presentan cambios abruptos en la sección transversal con la elevación, ésta no es una suposición válida.

Para canales con claves que se cierran en forma gradual, como los circulares, los exponentes hidráulicos son variables cerca de la clave, y aunque se pueden aplicar los métodos descritos arriba, pueden obtenerse y resultados más precisos empleando un procedimiento de integración numérica como el desarrollado por Kiefer y Chu (1955). Sea Q_o el gasto en un conducto circular de diámetro d_o cuando el tirante en el canal abierto es de d_o y la pendiente de energía es igual a la de fondo S_o. Entonces por la ecuación (5.1.3)

$$Q_o = K_o\sqrt{S_o} \tag{6.3.27}$$

Para flujo uniforme en este conducto con el gasto Q, la misma ecuación da

$$Q = K_N\sqrt{S_o} \tag{6.3.28}$$

De las ecuaciones (6.3.27) y (6.3.28) se pueden desarrollar las siguientes relaciones

$$\left(\frac{K_N}{K}\right)^2 = \left(\frac{K_N}{K_o}\right)^2\left(\frac{K_o}{K}\right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)^2\left(\frac{K_o}{K}\right)^2 \tag{6.3.29}$$

Dado que la razón K_o/K es una función de y/d_o, la ecuación (6.3.29) puede expresarse como

$$\left(\frac{K_N}{K}\right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)^2 f_1\left(\frac{y}{d_o}\right) \tag{6.3.30}$$

En forma análoga, puede desarrollarse una expresión para el factor de sección o

$$\begin{aligned}\left(\frac{Z_c}{Z}\right)^2 &= \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} = \frac{\alpha Q^2}{d_o^5}\left[\frac{T/d_o}{g(A/d_o^2)^3}\right] \\ &= \frac{\alpha Q^2}{d_o^5} f_2\left(\frac{y}{d_o}\right)\end{aligned} \tag{6.3.31}$$

donde la expresión $(T/d_o)/g(A/d_o^2)^3$ es una función de y/d_o y se representa por $f_2(y/d_o)$. Entonces, al sustituir las ecuaciones (6.3.30) y (6.3.31) en la ecuación (6.3.10) y simplificando se obtiene

$$dx = \frac{d_o}{S_o}\left[\frac{1 - (\alpha Q^2/d_o^5)f_2(y/d_o)}{1 - (Q/Q_o)^2 f_1(y/d_o)}\right] d\left(\frac{y}{d_o}\right) \tag{6.3.32}$$

Al integrar la ecuación (6.3.32) se obtiene

$$x = \frac{d_o}{S_o}\left[\int_0^{y/d_o} \frac{d(y/d_o)}{1-(Q/Q_o)^2 f_1(y/d_o)} - \frac{\alpha Q^2}{d_o^5}\int^{y_o}/d_o 0 \frac{f_2(y/d_o)d(y/d_o)}{1-(Q/Q_o)^2 f_1(y/d_o)}\right] + C \quad (6.3.33)$$

donde C = constante de integración, las integrales se deben valuar por métodos numéricos, y $f_1(y/d_o)$ y $f_2(y/d_o)$ pueden evaluarse numéricamente. La constante de integración se puede eliminar integrando sobre un intervalo designado o

$$L = (x_2 - x_1) = A[(X_2 - X_1) - B(Y_2 - Y_1)] \quad (6.3.34)$$

donde

$$X = -\int_0^{y/d_o} \frac{d(y/d_o)}{1-(Q/Q_o)^2 f_1(y/d_o)}$$

$$Y = -\int_0^{y/d_o} \frac{d(y/d_o)}{1-(Q/Q_o)^2 f_1(y/d_o)}$$

$$A = -\frac{d_o}{S_o}$$

y

$$B = \frac{\alpha Q^2}{d_o^5}$$

Los valores de las funciones X y Y se resumen en las tablas 6.5 y 6.6 en función de y/d_o y Q/Q_0. En estas tablas, se pueden estimar los valores intermedios de los tabulados por interpolación; pero, el proceso de interpolación no puede cruzar las líneas gruesas en estas tablas que determinan la ubicación del tirante normal.

EJEMPLO 6.3

Un conducto circular de 6.0 ft (1.8 m) de diámetro tiene un gasto de 160 ft³/s (4.5 m³/s) con $S = 0.001$ y $n = 0.013$. Determínese la distancia entre una sección de control con tirante crítico y la sección donde el conducto fluye a tubo lleno.

Solución

Supóngase que $\alpha = 1$, entonces de la tabla 2.1

$$\psi = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{(1)(160)^2}{32.2} = 795$$

y

$$y_c = \frac{1.01}{d_o^{0.26}}\psi^{0.25} = \frac{1.01}{(6.0)^{0.26}}(795)^{0.25} = 3.4 \text{ ft } (1.04 \text{ m})$$

TABLA 6.5 La función Y como una función de y/d_o y Q/Q_o para canales circulares (Kiefer y Chu, 1955)

Razón y/d_o	Valores de Q/Q_o									
	0.40	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.07	1.20	1.40	1.60
1.00	0	0	0	0	0		0.0245	0.1128	0.0680	0.0482
0.98	0.0003	0.0003	0.0004	0.0006	0.0009	0.0016	0.0186	0.1120	0.0677	0.0479
0.96	0.0008	0.0010	0.0012	0.0015	0.0024	0.0053	0	0.1105	0.0671	0.0477
0.94	0.0015	0.0019	0.0023	0.0028	0.0043	0.0098	0.0824	0.1079	0.0663	0.0470
0.92	0.0023	0.0029	0.0036	0.0045	0.0067	0.0150	0.1614	0.1051	0.0652	0.0466
0.90	0.0034	0.0042	0.0050	0.0063	0.0096	0.0215	0.2500	0.1028	0.0641	0.0458
0.88	0.0044	0.0055	0.0067	0.0080	0.0132	0.0303	0.1852	0.0983	0.0627	0.0452
0.86	0.0058	0.0072	0.0087	0.0112	0.0175	0.0438	0.1604	0.0950	0.0613	0.0444
0.84	0.0071	0.0090	0.0110	0.0143	0.0230	0.0667	0.1439	0.0913	0.0598	0.0435
0.82	0.0087	0.0112	0.0136	0.0180	0.0299		0.1321	0.0879	0.0583	0.0426
0.80	0.0106	0.0136	0.0166	0.0225	0.0389	0.1806	0.1230	0.0847	0.0568	0.0416
0.78	0.0128	0.0164	0.0204	0.0282	0.0524	0.1546	0.1153	0.0816	0.0552	0.0405
0.76	0.0150	0.0196	0.0247	0.0349	0.0768	0.1394	0.1088	0.0784	0.0537	0.0396
0.74	0.0177	0.0236	0.0300	0.0440	1.8457	0.1288	0.1032	0.0755	0.0521	0.0384
0.72	0.0206	0.0278	0.0361	0.0571	0.1950	0.1200	0.0980	0.0727	0.0505	0.0375
0.70	0.0240	0.0333	0.0443	0.0817	0.1650	0.1130	0.0933	0.0699	0.0489	0.0363
0.68	0.0280	0.0395	0.0556	0.1747	0.1465	0.1066	0.0891	0.0673	0.0473	0.0354
0.66	0.0324	0.0475	0.0724	0.2320	0.1352	0.1011	0.0851	0.0648	0.0458	0.0343
0.64	0.0377	0.0576	0.0978	0.1882	0.1263	0.0960	0.0813	0.0622	0.0442	0.0332
0.62	0.0438	0.0721	0.2500	0.1680	0.1189	0.0916	0.0777	0.0599	0.0426	0.0322
0.60	0.0511	0.0915	0.2780	0.1545	0.1120	0.0870	0.0743	0.0575	0.0411	0.0310
0.58	0.0600	0.1290	0.2265	0.1437	0.1054	0.0830	0.0710	0.0550	0.0396	0.0299
0.56	0.0705	0.3909	0.2006	0.1343	0.0997	0.0790	0.0678	0.0529	0.0381	0.0288
0.54	0.0840	0.3080	0.1828	0.1260	0.0944	0.0753	0.0647	0.0506	0.0365	0.0278
0.52	0.1014	0.2580	0.1686	0.1186	0.0895	0.0717	0.0618	0.0485	0.0351	0.0266
0.50	0.1253	0.2293	0.1562	0.1117	0.0850	0.0682	0.0588	0.0463	0.0336	0.0256
0.48	0.1609	0.2085	0.1452	0.1054	0.0803	0.0648	0.0561	0.0441	0.0321	0.0244
0.46	0.2235	0.1912	0.1350	0.0993	0.0761	0.0616	0.0533	0.0420	0.0306	0.0233
0.44	1.4143	0.1770	0.1256	0.0935	0.0718	0.0582	0.0505	0.0399	0.0291	0.0221
0.42	0.0500	0.1643	0.1170	0.0880	0.0680	0.0552	0.0478	0.0378	0.0276	0.0210
0.40	0.4116	0.1528	0.1090	0.0826	0.0641	0.0519	0.0451	0.0357	0.0261	0.0199
0.35	0.3090	0.1271	0.0917	0.0700	0.0546	0.0444	0.0386	0.0306	0.0224	0.0171
0.30	0.2432	0.1038	0.0755	0.0580	0.0454	0.0370	0.0321	0.0255	0.0188	0.0143
0.25	0.1903	0.0825	0.0607	0.0466	0.0366	0.0297	0.0258	0.0205	0.0151	0.0114
0.20	0.1425	0.0627	0.0462	0.0356	0.0281	0.0227	0.0197	0.0157	0.0115	0.0088
0.15	0.1000	0.0442	0.0327	0.0250	0.0197	0.0158	0.0138	0.0110	0.0081	0.0062
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLA 6.6 La función X como una función de y/d_o Q/Q_o para canales circulares (Kiefer y Chu, 1955

Razón y/d_o	Valores de Q/Q_o 0.40	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.07	1.20	1.40	1.60
1.00	0	0	0	0	0		1.161	0.9166	0.4075	0.2543
0.98	0.0235	0.0299	0.0368	0.0495	0.0817	0.1085	0.760	0.8567	0.3830	0.2397
0.96	0.0468	0.0592	0.0720	0.0954	0.1517	0.2777	0	0.7822	0.3555	0.2238
0.94	0.0700	0.0883	0.1067	0.1403	0.2188	0.4277	2.872	0.7016	0.3269	0.2074
0.92	0.0932	0.1173	0.1415	0.1851	0.2857	0.5763	5.052	0.6203	0.2982	0.1909
0.90	0.1165	0.1465	0.1764	0.2305	0.3541	0.7345	2.7491	0.5427	0.2701	0.1748
0.88	0.1398	0.1759	0.2119	0.2769	0.4257	0.9160	1.4754	0.4714	0.2432	0.1591
0.86	0.1632	0.2057	0.2481	0.3250	0.5023	1.1459	1.0082	0.4076	0.2178	0.1441
0.84	0.1868	0.2360	0.2852	0.3754	0.5868	1.5020	0.7486	0.3515	0.1942	0.1299
0.82	0.2105	0.2668	0.3236	0.4389	0.6835	2.5439	0.5803	0.3025	0.1724	0.1166
0.80	0.2344	0.2985	0.3637	0.4868	0.8002	0.8911	0.4619	0.2600	0.1524	0.1043
0.78	0.2585	0.3311	0.4059	0.5508	0.9552	0.6046	0.3740	0.2233	0.1343	0.0928
0.76	0.2830	0.3649	0.4509	0.6237	1.2090	0.4518	0.3065	0.1916	0.1179	0.0823
0.74	0.3077	0.4002	0.4997	0.7110	1.5967	0.3521	0.2533	0.1643	0.1031	0.0727
0.72	0.3329	0.4374	0.5536	0.8239	0.5844	0.2810	0.2105	0.1407	0.0899	0.0639
0.70	0.3585	0.4770	0.6151	0.9955	0.4016	0.2275	0.1765	0.1202	0.0781	0.0560
0.68	0.3818	0.5199	0.6885	1.5361	0.3001	0.1858	0.1465	0.1026	0.0676	0.0488
0.66	0.4117	0.5674	0.7831	0.5102	0.2329	0.1527	0.1228	0.0873	0.0583	0.0424
0.64	0.4394	0.6215	0.9263	0.3311	0.1845	0.1259	0.1023	0.0741	0.0500	0.0366
0.62	0.4683	0.6860	1.3682	0.2403	0.1479	0.1039	0.0837	0.0627	0.0428	0.0315
0.60	0.4985	0.7699	0.4083	0.1825	0.1196	0.0858	0.0713	0.0529	0.0364	0.0269
0.58	0.5304	0.8986	0.2596	0.1416	0.0970	0.0708	0.0593	0.0444	0.0308	0.0229
0.56	0.5647		0.1851	0.1113	0.0789	0.0583	0.0492	0.0371	0.0259	0.0193
0.54	0.6022	0.3114	0.1380	0.0882	0.0640	0.0478	0.0406	0.0309	0.0217	0.0163
0.52	0.6446	0.1971	0.1051	0.0701	0.0512	0.0391	0.0334	0.0255	0.0180	0.0136
0.50	0.6947	0.1385	0.0811	0.0557	0.0410	0.0318	0.0274	0.0210	0.0149	0.0112
0.48	0.7591	0.1014	0.0628	0.0442	0.0331	0.0257	0.0221	0.0171	0.0122	0.0092
0.46	0.8585	0.0756	0.0487	0.0347	0.0265	0.0206	0.0178	0.0138	0.0099	0.0075
0.44	3.3677	0.0569	0.0377	0.0273	0.0210	0.0164	0.0142	0.0110	0.0080	0.0061
0.42	0.1827	0.0430	0.0291	0.0212	0.0164	0.0130	0.0113	0.0088	0.0063	0.0048
0.40	0.1107	0.0324	0.0223	0.0165	0.0127	0.0101	0.0088	0.0069	0.0050	0.0038
0.35	0.0419	0.0155	0.0110	0.0082	0.0064	0.0052	0.0045	0.0035	0.0026	0.0020
0.30	0.0169	0.0068	0.0049	0.0038	0.0029	0.0024	0.0021	0.0016	0.0012	0.0009
0.25	0.0062	0.0027	0.0019	0.0015	0.0012	0.0009	0.0009	0.0006	0.0005	0.0004
0.20	0.0019	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
0.15	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	—	—	—
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

El gasto del conducto fluyendo a tubo lleno pero como un canal abierto es

$$Q_o = \frac{1.49}{n} AR^{2/3}\sqrt{S}$$

donde

$$A = \frac{\pi d_o^2}{4} = \frac{3.14(6.0)^2}{4} = 28.3 \text{ ft}^2 \ (2.6 \text{ m}^2)$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{(\pi d_o^2/4)}{\pi d_o} = \frac{28.3}{3.14(6.0)} = 1.5 \text{ ft} \ (0.46 \text{ m})$$

y $$Q_o = \frac{1.49}{0.013}(28.3)(1.5)^{2/3}\sqrt{0.001} = 134 \text{ ft}^3/\text{s} \ (3.79 \text{ m}^3/\text{s})$$

De donde, a partir de la ecuación (6.3.34)

$$A = -\frac{d_o}{S_o} = \frac{-6}{0.001} = -6000$$

$$B = \frac{\alpha Q^2}{d_o^5} = \frac{(1)(160)^2}{(6.0)^5} = 3.29$$

y $$\frac{Q}{Q_o} = \frac{160}{134} = 1.19$$

Empleando los datos resumidos en las tablas 6.5 y 6.6, la solución procede como se indica en la tabla 6.7. De estos cálculos, se concluye que el conducto fluye a tubo lleno aproximadamente a 3900 ft (1200 m) aguas arriba de la sección de control.

Cuando se aplica la metodología de Bakhmeteff-Chow a canales con pendiente de cero a negativa, se deben modificar las técnicas discutidas arriba. En un canal horizontal, $S_o = 0$, y la ecuación (6.1.1) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(Q/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} \tag{6.3.35}$$

TABLA 6.7 Solución tabular del ejemplo 6.3

y, ft	y/d_o	X_2	X_1	Y_2	Y_1	Δx	$\Sigma\Delta x$
3.4	0.57	—	—	—	—	—	0
3.6	0.60	0.0543	0.0418	0.0588	0.0552	−3.9	−3.9
4.2	0.70	0.1245	0.0543	0.0717	0.0588	170	−170
4.8	0.80	0.2755	0.1245	0.0876	0.0717	590	−760
5.4	0.90	0.7124	0.2755	0.1141	0.0876	2100	−2900
5.9	0.98	0.8493	0.7124	0.1048	0.1141	−1000	−3900

De donde, por definición, la pendiente crítica S_c es la pendiente en la cual se tendría un gasto Q con un tirante crítico, y_c; y por ende.

$$Q = K_c\sqrt{S_c} \tag{6.3.36}$$

Al sustituir esto en la ecuación (6.3.35) y haciendo

$$\left(\frac{K_c}{K}\right)^2 = \left(\frac{y_c}{y}\right)^N$$

$$\left(\frac{Z_c}{Z}\right) = \left(\frac{y_c}{y}\right)^M$$

y

$$P = \frac{y}{y_c}$$

da

$$\frac{dy}{dx} = S_c\frac{P^{M-N}}{1 - P^M} \tag{6.3.37}$$

Para el caso donde M y N son constantes, la ecuación (6.3.37) puede integrarse para dar

$$x = \frac{y_c}{S_c}\left(\frac{P^{N-M+1}}{N - M + 1} - \frac{P^{N+1}}{N + 1}\right) + C \tag{6.3.38}$$

donde C = constante de integración.

En canales con pendiente adversa, la pendiente del fondo del canal es negativa, y la ecuación (6.1.1) queda como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-S_o - S_f}{1 + \alpha d(\overline{u}^2/2g)/dy} \tag{6.3.39}$$

Puede entonces demostrarse que bajo estas condiciones con N y M constantes [véase, Chow (1959)]

$$x = -\frac{y_N}{S_o}\left[u - \int_0^u \frac{du}{1 + u^N} - \left(\frac{y_c}{y_N}\right)^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1 + u^N}\,du\right] + C \tag{6.3.40}$$

donde las funciones de flujo gradualmente variado para pendientes adversas son

$$F(u, N)_{-S_o} = \int_0^u \frac{du}{1 + u^N} \tag{6.3.41}$$

$$F(v, J)_{-S_o} = \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1 + u^N}\,du = \frac{J}{N}\int_0^v \frac{dv}{1 + v^J} \tag{6.3.42}$$

y

$$v = u^{N/J}$$

Las funciones $F(u, N)_{-S_o}$ y $F(u, J)_{-S_o}$ se tabulan en el apéndice III.

Canales no prismáticos

En la sección anterior, se discutieron dos métodos para calcular perfiles de flujo gradualmente variado en canales prismáticos. En general, ninguna de estas técnicas es muy útil para el cómputo de perfiles de la superficie del agua en canales no prismáticos donde el coeficiente de rugosidad y la forma del canal están en función de la distancia longitudinal. Además, debido a que las propiedades del canal son una función de la distancia longitudinal en canales no prismáticos, el método para estimar la elevación de la superficie del agua debe predecir el tirante a una distancia longitudinal dada en vez de lo contrario, que era el caso en los dos métodos descritos anteriormente.

La aplicación de la ecuación de energía entre las dos estaciones mostradas en la figura 6.3 da

$$z_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g} + h_f + h_e$$

donde z_1 y z_2 = elevación de la superficie del agua sobre un plano horizontal de comparación en las estaciones 1 y 2, respectivamente.
h_e = pérdidas por turbulencia en el tramo
h_f = pérdidas por fricción en el tramo

Las pérdidas por turbulencia (locales), que pueden ser considerables en canales no prismáticos, se expresan generalmente en términos de un cambio en la carga de velocidad en el tramo o

$$h_e = k\,\Delta\left(\alpha \frac{\overline{u}^2}{2g}\right) \tag{6.3.43}$$

donde k = un coeficiente. Desgraciadamente, se dispone de muy poca información generalizada sobre k, y es común en la práctica que los valores de k se determinen a partir de mediciones de campo. Si esto no fuera posible, k se su-

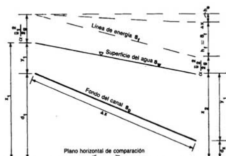


FIGURA 6.3 Definición del tramo del canal.

pone que tiene un valor de 0.5 para expansiones y contracciones bruscas y variará entre 0 y 0.2 para tramos convergentes o divergentes graduales. El término de pérdidas por fricción se aproxima por

$$h_f = S_f \, \Delta x = \frac{(S_{f1} + S_{f2})\, \Delta x}{2} \tag{6.3.44}$$

donde S_{f1} y S_{f2} = pendientes de fricción en las estaciones 1 y 2, respectivamente. Con estas aproximaciones, la ecuación de energía se convierte en

$$z_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g} + \frac{\Delta x (S_{f1} + S_{f2})}{2} + k\, \Delta \left(\alpha \frac{\overline{u}^2}{2g} \right) \tag{6.3.45}$$

Por conveniencia, defínase a

$$H_1 = z_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} \tag{6.3.46}$$

y

$$H_2 = z_2 + \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g} \tag{6.3.47}$$

Con estas definiciones, la ecuación (6.3.45) queda como

$$H_1 = H_2 + h_f + h_e \tag{6.3.48}$$

La ecuación (6.3.48) se resuelve por tanteos; i.e., dada una distancia longitudinal, se supone la elevación de la superficie del agua en la estación 1 la cual permite el cálculo de $H1$ con la ecuación (6.3.46). Se calculan H_f y H_e, y se estima H_1 con la ecuación (6.3.48). Si los dos valores calculados de H_1 concuerdan, entonces la elevación supuesta en la estación 1 es la correcta. En esencia el procedimiento de tanteos trata de que la diferencia entre la H_1 calculada con la ecuación (6.3.46) y el valor estimado por la ecuación (6.3.48) sea cero. El uso del método de tanteos para el cálculo del perfil de la superficie del agua en canales no prismáticos se ilustra mejor con un ejemplo. Aunque este método se diseñó para emplearse en canales no prismáticos, el ejemplo inicial será en un canal prismático con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $h_e = 0$.

EJEMPLO 6.4

Un canal trapecial con b = 20 ft (6.1 m), n = 0.025, z = 2, y S_o = 0.001 tiene un gasto de 1000 ft³/s (28 m³/s). Si este canal termina en una caída libre y no tiene pérdidas locales determínese el perfil de flujo gradualmente variado por el método del paso directo por tanteos.

Solución

Nótese que en este problema el enunciado es idéntico a los ejemplos 6.1 y 6.2. Para efectos de comparación se determinarán las elevacio-

nes de la superficie del agua en las estaciones longitudinales del ejemplo 6.2. Si la elevación de la caída libre es de 100 ft (30 m), entonces la elevación de la superficie del agua en este punto es de 103.74 ft (31.62 m) (véase ejemplo 6.1). La solución de este problema se encuentra resumida en la tabla 6.8; respecto a esta tabla se debe notar lo siguiente:

Columna 1: Cada estación longitudinal se identifica por su distancia a partir del control.

Columna 2: Con la excepción de la primera estación, este es un valor de tanteo de la elevación de la superficie del agua que se verifica o rechaza con base en los cálculos subsecuentes. Cuando se verifica el valor de tanteo, se convierte en la base para el proceso de verificación del valor de tanteo de la siguiente estación.

Columna 3: El tirante correspondiente a la elevación de la superficie del agua en la columna 2. Este valor se calcula restando, de la elevación de la superficie del agua supuesta en la estación, la elevación del control y el producto de la distancia longitudinal desde el control por la pendiente de fondo del canal. Por ejemplo, en la segunda línea de la tabla 6.8

$$104.62 - 100 - 0.001(116) = 4.50 \text{ ft } (1.37 \text{ m})$$

Columna 4: El área de flujo correspondiente al tirante de la columna 3.

Columna 5: La velocidad media del flujo.

Columna 6: La carga de velocidad correspondiente a la velocidad de la columna 5.

Columna 7: La carga total calculada con la ecuación (6.3.46).

Columna 8: El radio hidráulico correspondiente al tirante de la columna 3.

Columna 9: La pendiente de fricción en la estación estimada a partir de

$$S_f = \frac{n^2\bar{u}^2}{2.22R^{4/3}}$$

Columna 10: La pendiente de fricción media en el tramo la cual se aproxima como el valor medio de la pendiente de fric-

TABLA 6.8 Solución tabular del ejemplo 6.4

Estación, ft (1)	z, ft (2)	y, ft (3)	A, ft^2 (4)	V, ft/s (5)	$\frac{V^2}{2g}$, ft (6)	H_1, ft (7)	R, ft (8)	S_f (9)	$\bar{S}_f$ (10)	Δx, ft (11)	h_f, ft (12)	h_e, ft (13)	H, ft (14)
0	103.74	3.74	103	9.71	1.46	105.20	2.81	0.00670	—	—	—	—	105.20
116	104.62	4.50	130	7.69	0.918	105.54	3.24	0.00347	0.00509	116	0.590	—	105.79
	105.02	4.90	146	6.85	0.729	105.75	3.48	0.00251	0.00461	116	0.535	—	105.73
355	105.56	5.20	158	6.33	0.622	106.18*	3.65	0.00201	0.00226	355	0.802	—	106.55
	105.93	5.57	173	5.78	0.519	106.45	3.85	0.00156	0.00204	355	0.724	—	106.47
745	106.34	5.60	175	5.71	0.506	106.85	3.89	0.00150	0.00153	745	1.14	—	107.59
	106.96	6.21	201	4.98	0.385	107.34	4.21	0.00103	0.00130	745	0.968	—	107.42

ción de la columna 9 y el valor correspondiente del tramo anterior. Nota: se dispone de otros métodos para calcular la pendiente de fricción media; véase, por ejemplo, la tabla 6.11.

Columna 11: El incremento de longitud del tramo.

Columna 12: La pérdida por fricción en el tramo estimada como el producto de las columnas 10 y 11.

Columna 13: Las pérdidas locales estimadas para el tramo.

Columna 14: La carga total calculada con la ecuación (6.3.48) o la suma de las columnas 12 y 13 y la elevación de la energía total del tramo anterior, columna 14, que debe ser idéntica al valor de la columna 7. Si el valor obtenido en este cálculo no concuerda cercanamente con el de la columna 7, debe suponerse un nuevo valor de la elevación de la superficie del agua en la columna 2 y repetirse los cálculos.

El paso crucial de este análisis es la selección de un valor apropiado de la elevación de la superficie del agua. Nótese que en la tabla 6.8 sólo se necesitó de dos tanteos para obtener el valor correcto de la elevación de la superficie del agua en la columna 7. Esto se debe a que se empleó una ecuación para la función de error para ajustar el primer valor de tanteo. Recuérdese que la solución por tanteos de la ecuación (6.3.48) depende de hacer que la diferencia entre la H_1 determinada por la ecuación (6.3.46) y la de H_1 determinada por la ecuación (6.3.48) sea cero. Desígnese a esta diferencia por e. El valor de e puede modificarse solamente cambiando el tirante y_2; por ende, el cambio de e respecto al cambio de y_2 puede evaluarse por

$$\frac{de}{dy_2} = \frac{d}{dy_2}\left(y_2 + \frac{\overline{u}_2^2}{2g} - \frac{1}{2}\Delta x\, S_{f2}\right)$$

o

$$\frac{de}{dy_2} = 1 - \mathbf{F}_2^2 + \frac{3S_{f2}\,\Delta x}{2R_2}$$

entonces

$$\Delta y_2 = \frac{e}{1 - \mathbf{F}_2^2 + (3S_{f2}\,\Delta x/2R_2)} \tag{6.3.49}$$

donde Δy_2 = cantidad en la que se debe ajustar el nivel del agua para forzar a que e sea cero. La corrección que se aplicó en la tabla 6.5 al primer tanteo en x = 116 ft (35.4 m) se calculó como

$$D_2 = \frac{A_2}{T_2} = \frac{130}{38} = 3.42 \text{ ft (1.04 m)}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}_2}{\sqrt{gD_2}} = \frac{7.69}{\sqrt{32.2(3.42)}} = 0.73$$

Entonces según la ecuación (6.3.49)

$$y_2 = \frac{105.54 - 105.79}{1 - (0.73)^2 + [3(0.00347)116]/2(3.24)} = -0.382 \sim -0.40 \text{ ft } (0.12 \text{ m})$$

En este caso, Δy_2 debe sumarse al valor inicial de tanteo. Bien empleada, la ecuación (6.3.49) puede reducir significativamente el número de valores de tanteo requeridos para estimar la elevación de la superficie del agua correctamente.

Respecto a este método de tanteos para el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado nótese lo siguiente: 1) este método de resultados similares a los estimados en los ejemplos 6.1 y 6.2 y 2) al igual que en todos los métodos de paso directo los cálculos son secuenciales; i.e., cada paso depende del paso anterior.

En la mayor parte de los canales naturales, se debe tomar en cuenta la posibilidad de que el canal esté compuesto de una sección principal y una o más secciones laterales. En esta situación, el tirante en la sección lateral es diferente del tirante en la sección principal del canal, el coeficiente de rugosidad en la sección lateral puede diferir significativamente del que caracteriza la sección principal, y la longitud entre las secciones en el río puede diferir. En general, el método del paso directo analizado en la sección anterior con algunas modificaciones de cálculo también se puede aplicar a esta situación.

Debido a que se presenta una diferencia de cargas entre las secciones principal y laterales, el coeficiente de corrección de energía α debe emplearse para definir la componente de carga de velocidad en la carga total. De la ecuación (2.4.7), el coeficiente de energía está dado por

$$\alpha = \frac{\Sigma \overline{u}_i^3 A_i}{\overline{u}^3 \Sigma A_i} = \frac{(\Sigma A_i)^2}{(\Sigma Q_i)^3} \Sigma \left(\frac{Q_i^3}{A_i^2}\right)$$

donde los subíndices indican las subsecciones de flujos distintos y las variables sin subíndices indican las variables de todo el canal. En la definición del factor de forma, se combina la ecuación (5.1.3) con la expresión anterior para α, entonces

$$\alpha = \frac{(\Sigma A_i)^2}{(\Sigma K_i)^3} \Sigma \left(\frac{K_i^3}{A_i^2}\right) \tag{6.3.50}$$

Adicionalmente la pendiente de fricción para el tramo bajo consideración está dado por

$$S_f = \frac{Q^2}{(\Sigma K_i)^2} \tag{6.3.51}$$

Cuando el tramo bajo consideración es una curva, la longitud del tramo puede depender de la subsección considerada. El método más simple para tomar en cuenta este efecto es el de variar el valor del coeficiente de fricción.

Por ejemplo, si la longitud de la sección lateral es menor que la principal, entonces se debe reducir el coeficiente de fricción para mantener S_f constante en el tramo. En el caso de la n de Manning, la n para la sección lateral se reduce en proporción al parámetro $(L_o/L_M)^{1/2}$ donde L_o = longitud de la sección lateral y L_M es la longitud de la sección principal (Henderson, 1966). El modelo HEC2 del U.S. Army Corps of Engineers (autor anónimo, 1979) y Shearman (1976) calculan la longitud gasto-pesada por la ecuación

$$L = \frac{\Sigma L_i K_i}{\Sigma K_i} \tag{6.3.52}$$

donde L_i = longitud de la subsección. El empleo de las diversas ecuaciones y definiciones en forma conjunta con el método del paso directo para determinar el perfil de flujo gradualmente variado se demuestra mejor con un ejemplo.

EJEMPLO 6.5

Se desea estimar el perfil de flujo gradualmente variado para Q = 100 000 ft³/s (2800 m³/s) en un tramo de 1 milla (1600 m) cuya sección transversal está definida en la figura 6.4. En este tramo se tiene una sección distintiva principal y una lateral, siendo ambas aproximadamente rectangulares en sección. Las propiedades del canal se resumen en la tabla 6.9. Entre las millas 10 y 10.5 el canal es recto, y se supone que no hay pérdidas locales. Entre las millas 10.5 y 11.0, el canal es curvo de tal forma que la sección lateral está por dentro de la curva y tiene una longitud de 1920 ft (585 m). En esta sección curva, se tiene una pérdida local igual a 0.2 veces las cargas de velocidad media en los extremos del tramo. Si la elevación del flujo es de 70 ft (21 m) en la milla 10, determínese el nivel del río en la milla 11.0.

Solución

Computacionalmente, la solución a este problema procede en forma similar a la empleada en el ejemplo 6.4 con modificaciones menores para tomar en cuenta la sección compuesta. En la tabla 6.10 se resume la

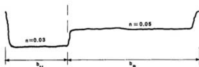


FIGURA 6.4 Definición del canal para el ejemplo 6.5.

TABLA 6.9 Propiedades del canal para el ejemplo 6.5

Milla del río	Anchos b_M, ft	Anchos b_B, ft	Elevaciones del lecho Principal, ft	Elevaciones del lecho Berma, ft
10.00	100	600	50.0	55.0
10.25	150	550	52.5	57.5
10.50	200	500	55.0	60.0
11.00	300	400	60.0	65.0

solución, y respecto a estos cálculos, se deben notar los siguientes puntos:

Columna 2: La notación M en esta columna se refiere al canal principal, mientras que la OB se refiere a la lateral.

Columna 8: Este es el coeficiente de fricción definido en la figura 6.4 o para el caso de la sección lateral o berma, entre las millas 10.5 y 11 del río.

$$n' = \left(\frac{1920}{2640}\right)^{1/2} (0.05) = 0.04$$

Si se empleara la metodología del Hydrologic Engineering Center (HEC), entonces el valor modificado Δx entre estas estaciones sería de

$$L = \frac{18.2 \times 10^5(2640) + 11.0 \times 10^5(1920)}{(18.2 + 11.0) \times 10^5} = 2370 \text{ ft } (722 \text{ m})$$

donde los valores empleados en este cálculo se tomaron del segundo tanteo para este tramo con $n_{OB} = 0.05$. El resultado habría sido aproximadamente igual al dado; e.g., véase el renglón en la tabla 6.10 designado con un asterisco.

En esta solución, la ecuación (6.3.49) también sirvió como guía para la selección del segundo valor de tanteo del nivel en cada estación. En el tramo entre las millas 10.0 y 10.25, el primer tanteo fue incorrecto y el segundo se calculó a partir de

$$R = \frac{9500}{172 + 562} = 12.9 \text{ ft } (3.93 \text{ m})$$

$$\alpha \mathbf{F}_2^2 = \frac{2}{R}\left(\alpha \frac{\overline{u}^2}{2g}\right) = \frac{2}{12.9}(2.29) = 0.36$$

$$\frac{3S_{f2}\,\Delta x}{2R} = \frac{3(0.00277)1320}{2(12.9)} = 0.43$$

TABLA 6.10 Solución tabular del ejemplo 6.5

Milla del río (1)	Subsección (2)	Elevación, ft (3)	A, ft² (4)	P, ft (5)	R, ft (6)	$R^{2/3}$ (7)	n (8)	$K \times 10^{-5}$ (9)	$\frac{K^3}{A^2} \times 10^{-10}$ (10)
10	M	70.	2 000	125	16.0	6.36	0.03	6.3	6.3
	OB		9 000	615	14.6	5.99	0.05	16.0	5.1
	Total		11 000					22.3	11.4
10.25	M	70.	2 625	172	15.2	6.15	0.03	8.0	7.5
	OB		6 875	562	12.2	5.31	0.05	10.0	2.7
	Total		9 500					18.0	10.2
	M	72.1	2 940	175	16.8	6.58	0.03	9.6	10.2
	OB		8 030	565	14.2	5.88	0.05	14.0	4.3
	Total		10 970					23.6	14.5
	M	72.4	2 985	175	17.1	6.64	0.03	9.8	10.6
	OB		8 195	565	14.5	5.95	0.05	14.5	4.6
	Total		11 180					24.3	15.2
10.5	M	74.0	3 800	224	17.0	6.61	0.03	12.0	12.0
	OB		7 000	514	13.6	5.71	0.05	12.0	3.5
	Total		10 800					24.0	15.5
	M	74.5	3 900	224	17.4	6.71	0.03	13.0	14.4
	OB		7 250	514	14.1	5.84	0.05	12.6	3.8
	Total		11 150					25.6	18.2
11	M	78.	5 400	323	16.7	6.54	0.03	17.5	18.4
	OB		5 200	413	12.6	5.42	0.04	10.5	4.3
	Total		10 600					28.0	22.7
	M	78.4	5 520	323	17.1	6.64	0.03	18.2	19.8
	OB		5 360	413	13.0	5.53	0.04	11.0	4.6
	Total		10 880					29.2	24.4
*	M	78.4	5 520	323	17.1	6.64	0.03	18.2	19.8
	OB		5 360	413	13.0	5.53	0.05	8.8	2.4
	Total		10 880					27.0	22.2

y por ende,

$$\Delta y = \frac{72.7 - 74.9}{1 - 0.36 + 0.43} = -2.1 \text{ ft } (0.64 \text{ m})$$

De donde, el segundo valor de tanteo fue de 70 + 2.1 = 72.1 ft (22.0 m). Debe notarse que dado que el primer valor de tanteo tuvo un error

α (11)	$\bar{u}$, ft/s (12)	$\frac{\alpha \bar{u}^2}{2g}$, ft (13)	H, ft (14)	S_f (15)	$\bar{S}_f$ (16)	Δx, ft (17)	h_f, ft (18)	h_e, ft (19)	H, ft (20)
1.24	9.09	1.59	71.6	0.00201					71.6
1.55	10.5	2.29	72.7	0.00305	0.00253	1320	3.33	—	74.9
1.33	9.12	1.72	73.8	0.00180	0.00191	1320	2.52	—	74.1
1.32	8.94	1.64	74.0	0.00169	0.00185	1320	2.44	—	74.0
1.31	9.26	1.74	75.7	0.00174	0.00171	1320	2.26	—	76.3
1.35	8.97	1.69	76.2	0.00153	0.00161	1320	2.13	—	76.1
1.17	9.43	1.60	79.6	0.00128	0.00140	2640	3.70	0.33	79.8
1.16	9.19	1.52	79.9	0.00117	0.00135	2640	3.56	0.32	80.0
1.34	9.19	1.76	80.2	0.00137	0.00145	2370	3.44	0.32	80.0

significativo, se necesitó de más de dos valores de tanteo para determinar la elevación apropiada.

Aunque cualquiera de los métodos estudiados anteriormente puede adaptarse para solución por computadora digital, agencias de gobierno de Estados Unidos han desarrollado para este propósito algunos modelos computaciona-

les para casos generales. En particular, se tiene el modelo HEC-2 desarrollado por Hydrologic Engineering Center (HEC) del U.S. Army Corps of Engineers (autor anónimo, 1979 y Feldman, 1981) y un modelo similar desarrollado por el U.S. Geological Survey, (Shearman, 1976, 1977). El propósito de esta sección es el de resumir brevemente las capacidades de estos modelos y describir sus bases teóricas.

El modelo HEC-2 se desarrolló para calcular perfiles para flujos permanentes, gradualmente variados en canales prismáticos y no prismáticos. Se pueden estimar perfiles subcríticos y supercríticos, y se consideran los efectos de varias obstrucciones como son puentes, alcantarillas, vertedores, y estructuras en rengión de la berma. El modelo está sujeto a cuatro suposiciones críticas:

1. Dado que las ecuaciones no contienen términos dependientes del tiempo, el flujo debe ser permanente.
2. El flujo debe ser gradualmente variado dado que las ecuaciones del modelo suponen una distribución hidrostática de presiones.
3. El flujo es unidimensional.
4. La pendiente del canal es pequeña.

El propósito original del modelo HEC-2 fue el de determinar las elevaciones de la superficie del agua para gastos especificados en canales naturales para ayudar en el programa de manejo de llanuras de inundación del U.S. Army Corps of Engineers. En este contexto el modelo se ha empleado para:

1. Determinar áreas inundadas para varios gastos de inundación para la evaluación de daños.
2. Estudiar efectos sobre las llanuras de inundación del uso de tierras desde el punto de vista de daños por inundación.
3. Estudiar como se pueden mitigar los daños de las inundaciones con diversas mejoras en el canal.

El modelo HEC-2 puede también emplearse para estudiar, los perfiles de flujo gradualmente variado permanente discutidos previamente en este capítulo. Nótese que el modelo HEC-2 esta escrito en FORTRAN IV y requiere de aproximadamente 32 000 bytes de memoria de computadora.

Recuérdese que al aplicar la ecuación de la energía entre dos secciones del canal se tiene

$$z_2 + \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g} = z_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} + h \tag{6.3.53}$$

donde

$$h = L\overline{S}_f + c \left| \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} \right| \tag{6.3.54}$$

donde h = pérdida total de energía entre las dos estaciones
$\overline{S}_f$ = pendiente de fricción representativa en el tramo
L = longitud pesada en el gasto definida por la ecuación (6.3.52)
c = coeficiente de pérdida de expansión o contracción

Por ende, el modelo HEC-2 es esencialmente un esquema de cómputo automático, iterativo del método de paso directo. El procedimiento de cómputo es como sigue:

1. Si los cálculos se dirigen hacia aguas arriba, se supone que se dispone de todos los datos para el cálculo de las variables en las ecuaciones (6.3.53) y (6.3.54) con subíndice de 1.
2. Se supone la elevación de la superficie del agua en la estación 2.
3. Basándose en la suposición de la elevación de la superficie del agua, se determinan el factor de forma y carga de velocidad correspondientes.
4. Con los valores obtenidos en el paso 3, se determina $\overline{S}_f$ y se resuelve la ecuación (6.3.54) para h.
5. Se calcula z_2 a partir de los valores encontrados en los pasos 3 y 4 con la ecuación (6.3.53).
6. El valor de z_2 calculado en el paso 5 se compara con el supuesto en el paso 2. Se repiten los pasos 2 al 5 hasta que los valores supuestos y calculados de z_2 concuerdan dentro de una extensión de 0.01 ft o 0.01 m.

El método por el cual se suponen las elevaciones de la superficie del agua en el procedimiento iterativo descrito arriba varía en función del número de tanteos anteriores.
El primer valor de tanteo se estima proyectando la elevación de la sección transversal anterior sobre la pendiente de fricción media de las dos secciones transversales anteriores. El segundo valor de tanteo se estima como la media aritmética de los valores calculados y supuestos de la elevación de la superficie del agua del primer tanteo. Los tercero y subsecuentes valores de tanteo se estiman por el método de la secante de proyectar el ritmo de cambio de la diferencia entre los valores calculados y supuestos de las elevaciones de los dos tanteos previos a cero. En los tercero y subsecuentes tanteos, el cambio del valor de un tanteo a otro se restringe a un máximo de ±50% de la elevación supuesta del tanteo anterior. Una vez obtenida la elevación correcta de la superficie del agua, se verifica que la elevación calculada se encuentre en el lado correcto de la elevación del tirante crítico para esa sección; e.g., para un perfil subcrítico, las elevaciones de la superficie del agua deben ser mayores que las del tirante crítico. Si la elevación se encuentra en el lado equivocado de la elevación del tirante crítico, se ha cometido un error y se le notifica al usuario. Este tipo de error por lo común se produce cuando las longitudes de los tramos son muy grandes o de una mala representación del área de flujo de la sección transversal. Adicionalmente, debe notarse que la técnica empleada por el modelo HEC-2 para la estimación del tirante crítico de flujo puede

producir errores significativos cuando se aplica a un canal con sección compuesta. El tirante crítico se encuentra al suponer las elevaciones de la superficie del agua y calcular el valor correspondiente de la energía específica. Por esto, la metodología HEC-2 no garantiza que se encuentre el valor correcto del tirante crítico para un canal específico de sección compuesta.

El modelo HEC-2 tiene un número de opciones y restricciones que también deben notarse, como sigue:

1. Dentro del modelo, se tienen cuatro métodos para la determinación de la pendiente media de fricción para el tramo.
   a. Factor de forma media

$$\overline{S}_f = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2}\right)^2 \tag{6.3.55}$$

   donde K_1 y K_2 son los factores de forma totales en las estaciones 1 y 2 respectivamente.
   b. Pendiente de fricción media

$$\overline{S}_f = \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \tag{6.3.56}$$

   c. Media geométrica

$$\overline{S}_f = \sqrt{S_{f1} S_{f2}} \tag{6.3.57}$$

   d. Media armónica

$$\overline{S}_f = \frac{2 S_{f1} S_{f2}}{S_{f1} + S_{f2}} \tag{6.3.58}$$

   Además de las ecuaciones anteriores, Reed y Wolfkill (1976), en su estudio de los modelos de pendientes de fricción, notaron que se han empleado también las siguientes formulaciones para estimar la pendiente de fricción en el tramo

   e.

$$\overline{S}_f = \frac{Q^2 n^2}{\phi^2[2(A_1 A_2/(A_1 + A_2)]^2[(R_1 + R_2)/2]^{4/3}} \tag{6.3.59}$$

   f.

$$\overline{S}_f = \frac{Q^2 n^2}{\phi^2[(A_1 + A_2)/2][(A_1 + A_2)/(P_1 + P_2)]^{4/3}} \tag{6.3.60}$$

   g.

$$\overline{S}_f \doteq \frac{Q^2 n^2}{\phi^2[(A_1 + A_2)/2]^2[(R_1 + R_2)/2]^{4/3}} \tag{6.3.61}$$

h.

$$\overline{S}_f = \frac{Q^2 n^2}{\phi^2[(A_1 R_1^{2/3} + A_2 R_2^{2/3})/2]} \tag{6.3.62}$$

donde R_1 y R_2 = radios hidráulicos al principio y final del tramo, respectivamente; A_1 y A_2 = áreas de flujo al principio y final del tramo respectivamente; n = coeficiente de rugosidad de Manning para el tramo, y Q = gasto en el tramo. Aunque muchas de las ecuaciones anteriores darán una estimación satisfactoria de la pendiente de fricción siempre que el tramo no sea demasiado largo, el concepto de proporcionar dentro de un modelo metodologías alternas para maximizar la longitud del tramo es atractiva. La ecuación (6.3.55) es la formulación estándar de HEC-2, y la ecuación (6.3.57) es la formulación empleada por el U.S. Geological Survey en su modelo de flujo gradualmente variado (Shearman, 1976, 1977). Los resultados de Reed y Wolfkill (1976) se resumen en la tabla 6.11 junto con los criterios empleados por el modelo HEC-2 para seleccionar el modelo óptimo de la pendiente de fricción.

2. Los datos adecuados sobre la sección transversal del canal son esenciales para la operación apropiada y precisa del modelo. Se necesita de secciones transversales donde se presentan cambios significativos en la geometría del canal o en sus características hidráulicas. Los cambios cruciales de geometría por lo común implican contracciones o expansiones naturales o artificiales, mientras que los cambios de pendiente, rugosidad, o gasto del canal se pueden considerar como cambios significativos de las características hidráulicas del canal. En general, las secciones transversales estipuladas deben ser perpendiculares a la dirección del flujo y extenderse completamente a través del canal hasta el terreno superior que se encuentra a ambos lados del canal. En algunos casos donde se tienen cambios muy significativos en la geometría o las características hidráulicas del canal, se requerirán varias secciones transversales. Debe tenerse la seguridad que sólo se incluya el área efectiva del flujo del canal.

3. La distancia entre las secciones transversales, también conocida como longitud de tramo, está en función del grado de detalle hidráulico requerido

TABLA 6.11 Modelos recomendados para la pendiente de fricción

Tipo de perfil	Modelo de la pendiente de fricción recomendado por Reed y Wolfkill (1976)	Modelo de pendiente de fricción empleado por el HEC-2
M1	(6.3.55)	(6.3.55)
M2	(6.3.57)	(6.3.57)
M3	(6.3.58)	(6.3.56)
S1	(6.3.57)	(6.3.55)
S2	(6.3.55)	(6.3.55)
S3	(6.3.56)	(6.3.56)

y los recursos humanos, temporales y financieros disponibles. Canales pequeños, no uniformes o de pendientes pronunciadas pueden requerir longitudes de tramo muy pequeñas, p.ej., 200 ft (60 m), mientras que en canales, largos, uniformes con pendientes leves, longitudes de tramo de hasta 2 millas (3 km) pueden ser apropiadas. Adicionalmente, el tipo de estudio que se esté efectuando puede dictar el grado de detalle y por ende la longitud de tramo. Por ejemplo, un estudio de navegación del río Missouri requirió de longitudes de tramo de 500 ft (150 m) (Feldman, 1981). Las longitudes de tramo se pueden optimizar adaptando una ecuación apropiada para la pendiente de fricción (tabla 6.11). El modelo HEC-2 requiere de longitudes de tramo para ambas bermas del canal, si es que existen éstas, y del canal principal. En el canal principal, la distancia se mide ya sea sobre la línea central en un canal artificial o sobre la línea de corriente en un canal natural, mientras que en las bermas la longitud del tramo representaría la longitud del paso del flujo del centro de masa del agua que se mueve en esa área. Dado que para una longitud dada del canal estas tres longitudes pueden variar, a veces es necesario calcular una longitud hipotética de tramo con la ecuación (6.3.52).

Detalles adicionales sobre la operación del modelo HEC-2 pueden encontrarse en un estudio anónimo (1979) o Feldman (1981).

En general, el modelo del U.S. Geological Survey para el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado, en especial el programa E431, es teóricamente similar al modelo HEC-2; esto es, ambos modelos resuelven la ecuación (6.3.53) por la técnica estándar de paso directo. Las diferencias notorias entre los dos modelos son:

1. En el E431 la pendiente media de fricción se calcula con

$$\overline{S}_f = \frac{Q^2}{K_1 + K_2} \tag{6.3.63}$$

   donde Q es el gasto medio en el tramo, y no se dispone de otras opciones para el empleo de otras ecuaciones.

2. El proceso iterativo empleado por el E431 para estimar la elevación de la superficie del agua z_2 es bastante diferente de la metodología empleada por el modelo HEC-2. El usuario debe especificar el valor de cuatro variables: *a*) h_o, la elevación mínima de importancia en cada sección transversal; *b*) h_M, la elevación máxima en cada sección transversal; *c*) Δh, un incremento de elevación; y *d*) ϵ, una medida de la precisión requerida en los cómputos. La estimación inicial de z_2 es el mayor de $(z_1 + 0.5\ \Delta h)$ donde Δh puede ser positiva o negativa y el h_0 en la estación 2. Si la diferencia en las energías totales entre las dos secciones transversales es mayor que ϵ, entonces, se requiere de tanteos adicionales. Nótese que si entre dos tanteos la diferencia entre las energías totales cambia de signo, esto demues-

tra que se tiene una raíz válida de la ecuación (6.3.53) en el rango de separación vertical entre los dos tanteos. Una vez que se ha identificado un intervalo vertical que contiene una raíz válida de la ecuación (6.3.53), se encuentra la solución por el método de la regla falsa. Si no se identifica una raíz en el primer tanteo, la estimación de z_2 se incrementa por Δh, y se continúa este proceso hasta que se llega a la elevación h_M. Si todavía no se encuentra el intervalo de solución al llegar a la elevación h_M, se supone entonces que el incremento de elevación fue demasiado grande para detectar el intervalo de solución y se requiere de un incremento más pequeño. En este caso, se repite nuevamente el proceso iterativo con incremento vertical de 0.25 Δh entre las elevaciones (h_o + 0.5 Δh) y h_M. Si todavía no se encuentra una raíz válida para la ecuación (6.3.53), entonces se suspende el cómputo y se le notifica al usuario de la situación.

3. Cada raíz válida de la ecuación (6.3.53) se verifica por validez hidráulica; i.e., el usuario especifica el número de Froude cuyo valor no se puede exceder, y se compara este valor con el número de Froude computado empleando la elevación de la superficie del agua. La consideración crucial en este cálculo es el método empleado para estimar el número de Froude en un canal de sección compuesta cuando se especifica la elevación de la superficie del agua. En el E431, el número de Froude se estima en canales de sección compuesta por

$$\mathbf{F} = \frac{K_M}{KA_M} \frac{Q}{\sqrt{g(A_M/T_M)}} \qquad (6.3.64)$$

donde el subíndice M designa a las variables asociadas con la subsección del canal con el mayor factor de forma. En general, este método de cómputo de los números de Froude de canales de sección compuesta no es más preciso que los métodos empleados por el modelo HEC-2 (véase capítulo 2, Fig. 2.12*b*).

Aunque con la llegada de "grandes" computadoras digitales de alta velocidad (*mainframe*), minicomputadoras, y calculadoras de mano, se ha prescindido en gran medida de la necesidad de soluciones gráficas de la ecuación de flujo gradualmente variado, todavía existen situaciones en que las soluciones gráficas pueden ser efectivas. Por ejemplo, en canales prismáticos los métodos de paso directo en y y de integración directa predicen la distancia longitudinal para un tirante especificado. En muchos casos sería más conveniente que el tirante se pudiese estimar para una distancia longitudinal especificada.

En el caso de canales prismáticos, la relación entre la energía disponible en la estación de aguas arriba, estación 1, y la estación de aguas abajo, estación 2, es

$$E_1 - E_2 = (S_o - \tfrac{1}{2}S_{f1} - \tfrac{1}{2}S_{f2})\,\Delta x \qquad (6.3.65)$$

Si el cómputo de flujo gradualmente variado procede aguas arriba, entonces se tiene definidas todas las variables en la estación 2, pero no se tienen definidas en la estación 1. Reordénese la ecuación (6.3.65) para obtener

$$E_2 + 0.5S_{f2}\,\Delta x + (S_o - S_{f2})\,\Delta x = E_1 + ½S_{f1}\,\Delta x \qquad (6.3.66)$$

Por conveniencia notacional, se define

$$U = E + 0.5S_f\,\Delta x \qquad (6.3.67)$$

con lo que la ecuación (6.3.66) puede reordenarse para dar

$$U_2 - U_1 = (S_{f2} - S_o)\,\Delta x \qquad (6.3.68)$$

donde U es sólo función de y y Δx.

Las ecuaciones (6.3.66) a (6.3.68) se aplican a situaciones en las que los cálculos se dirigen hacia aguas arriba. Si los cálculos se dirigen hacia aguas abajo, entonces se conocen las condiciones en la estación 1 y se desconocen en la estación 2. En este caso la ecuación (6.3.65) se reordena para dar

$$E_1 - 0.5S_{f1}\,\Delta x + (S_{f1} - S_o)\,\Delta x = E_2 - ½S_{f2}\,\Delta x \qquad (6.3.69)$$

Definiendo

$$V = E = ½S_f\,\Delta x \qquad (6.3.70)$$

y reordenando la ecuación (6.3.69) se obtiene

$$V_1 - V_2 = (S_o - S_{f1})\,\Delta x \qquad (6.3.71)$$

Nótese que la diferencia entre los parámetros U y V es esencialmente una diferencia en el signo de Δx; i.e., si el cálculo se dirige hacia aguas arriba, Δx es negativa, mientras que si se dirige hacia aguas abajo Δx es positiva. Aunque U y V son en esencia el mismo parámetro, por lo general es conveniente tratarlos como si fueran diferentes.

Las ecuaciones (6.3.66) a (6.3.68) o las ecuaciones (6.3.69) a (6.3.71) pueden emplearse para lograr una solución híbrida gráfica-tabular del problema de flujo gradualmente variado. En la tabla 6.12 se presenta una metodología sugerida de solución para cuando el cálculo se dirige hacia aguas arriba, y la técnica se demuestra en el siguiente ejemplo, que, exceptuada la técnica de solución es idéntico al ejemplo 6.1.

EJEMPLO 6.6

Un canal trapecial con b = 20 ft (6.1 m), n = 0.025, z = 2, y S_o = 0.001 tiene un gasto de 1000 ft³/s (28 m³/s). Si este canal acaba en una caída libre, determínese el perfil de flujo gradualmente variado.

TABLA 6.12 Solución mixta o híbrida gráfica-tabular de problemas de flujo gradualmente variado en canales prismáticos en los cuales el cálculo procede en la dirección de aguas arriba

Paso	Proceso
1	Grafíquese $(S_f - S_o)$, E, y U, para una Δx constante, contra y, figura 6.5
2	Grafíquese U contra y, figura 6.5
3	Obténgase U_2 y $(S_f - S_o)$ en la estación 2 de la figura 6.5
4	Utilícense los resultados del paso 3 para calcular U con la ecuación (6.3.67)
5	Con la U_1 obtenida en el paso 4 utilícense la figura 6.5 para estimar y_1

Solución

Empleando los resultados del ejemplo 6.1, se grafican los parámetros $(S_f - S_o)$, E, y U para $\Delta x = 50$ y 100 pies (15 y 30 m respectivamente) en la figura 6.5. Se emplean dos valores de Δx para obtener suficiente detalle de la forma del perfil cerca de la caída libre y que a la vez no sea excesivo el número de cálculos requeridos para definir el perfil completo. Los cálculos proceden como se muestra en la tabla 6.13.

Esta solución no continúa hasta el final, pero una comparación de los resultados de la tabla 6.12 con los derivados en el ejemplo 6.1 demuestra que son casi idénticos.

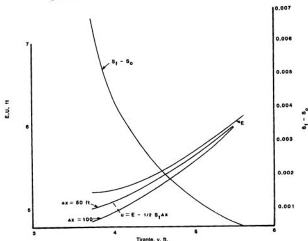


FIGURA 6.5 Solución mixta o híbrida del ejemplo 6.6.

TABLA 6.13 Solución mixta del ejemplo 6.6

x, ft	Δx, ft	y, ft	U	$S_f - S_o$	$\Delta U = (S_{f1} - S_o)\Delta x$
0		3.74 (1)	5.05 (2)	0.00535	(3)
	−50	(5)		(4)	0.268
−50		4.46	5.32	(6) 0.00260	(7)
	−50				0.130
−100		(9) 4.70	5.45	(8)	
−100		(10) 4.70	(11) 5.36	(12) 0.00195	(13)
	−100				0.195
−200		4.98	5.56	0.00135	
	−100				0.135
−300		5.18	5.70	0.00100	
	−100				0.100
−400		5.30	5.80	0.00085	
	−100				0.085
−500		5.48	5.88		

1. De la condición de control y_c= 3.85 ft. utilícese la figura 6.5 para encontrar $U(\Delta x = 50) = 5.05$
2. Para y = 3.85 ft. y $U(\Delta x = 50)$ utilícese la figura 6.5 para encontrar $(S_f - S_o) = 0.00535$.
3. Calcúlese $(S_f - S_o)\ \Delta x = 50(0.00535) = 0.268$
4. Calcúlese $U + \Delta x(S_f - S_o) = 5.05 + 0.268 = 5.32$
5. Para $U(\Delta x = 50) - 5.32$ utilícese la figura 6.5 para encontrar en $x = 50$, $y = 4.46$ ft.
6. Repítase el paso 2.
7. Repítase el paso 3.
8. Repítase el paso 4.
9. Repítase el paso 5.
10. En este paso Δx se cambia de 50 a 100.
11. Para y = 4.70 ft encuéntrese con la figura 6.5 el $U(\Delta x = 100)$ correspondiente.
12. Repítase el paso 2.
13. Repítase el paso 3.

El método descrito en el material anterior es un método híbrido o mixto con componentes tabulares y gráficas. Este método puede convertirse en uno completamente gráfico para ello se grafica otra curva a una distancia $(S_f - S_o)\ \Delta x$ sobre la curva U-y para la U a una Δx especificada. Esto es lo que se muestra en la figura 6.6 para los datos del ejemplo 6.5 y Δx = 100 ft (30 m). Respecto a la figura 6.6, la solución procede como sigue:

1. Desde el punto inicial en la curva U-y, se traza una línea vertical para intersectar la segunda curva.
2. Desde el punto encontrado en el paso 1, se dibuja una línea horizontal hasta que intersecte la curva U-y.
3. Se repite el paso 1 desde el punto determinado en el paso 2.

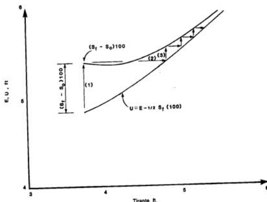


FIGURA 6.6 Solución gráfica del ejemplo 6.6.

Por ende, esta solución consiste en trazar un conjunto de líneas en zig-zag entre las curvas mostradas en la figura 6.6. Nótese que en algún punto se intersectan ambas curvas. Este es el punto donde $S_o = S_f$ y por definición se presenta el flujo uniforme. Algunos de los resultados de este tipo de solución gráfica del ejemplo 6.6 se resumen en la tabla 6.14. Una comparación de estos resultados con los resultados tabulares obtenidos en el ejemplo 6.1 muestra concordancia.

Aunque los métodos híbridos y gráficos descritos en el material anterior para canales prismáticos proporcionan un método rápido y conveniente para resolver las ecuaciones de flujo gradualmente variado, una vez que se han construido las curvas necesarias, la preparación de estas curvas requiere de una cantidad significativa de esfuerzo. Por ende, estos métodos son valiosos sólo cuando deben graficarse varios perfiles del perfil de la superficie del agua para el mismo gasto. En la mayor parte de los casos, estos métodos no son tan económicos como los que emplean computadoras o calculadoras de mano.

TABLA 6.14 Resumen de los resultados de la figura 6.6

x, ft	*y*, ft
0	3.74
−100	4.80
−200	5.00
−300	5.16
−400	5.30

Los métodos gráficos también pueden emplearse para estimar los perfiles de flujo gradualmente variado en canales no prismáticos. El método de Ezra (1954) está basado en la siguiente ordenación de la ecuación (6.3.65)

$$z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{u}_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{u}_2^2}{2g} + ½\, \Delta x(S_{f1} + S_{f2}) \tag{6.3.72}$$

donde, como antes, la estación 1 se encuentra aguas arriba de la estación 2 y z_1 = elevación de la superficie del agua sobre un plano de comparación. La introducción de la elevación de la superficie del agua en la ecuación de energía causa la desaparición de la pendiente del canal como variable en la ecuación (6.3.72). Al aplicar esta ecuación, normalmente se supone que las pérdidas locales se pueden incorporar en el término de fricción. La ecuación (6.3.72) se puede prescribir como

$$z_1 + F(z_1) = z_2 + F(z_2) \tag{6.3.73}$$

donde

$$F(z_1) = \alpha_1 \frac{\bar{u}_1^2}{2g} - ½ S_f\, \Delta x_u \tag{6.3.74}$$

y

$$F(z_2) = \alpha_2 \frac{\bar{u}_2^2}{2g} + ½ S_f\, \Delta x_D \tag{6.3.75}$$

Las funciones $F(z_1)$ y $F(z_2)$ corresponden a las funciones U y V de la solución gráfica descrita anteriormente para canales prismáticos. Eso sí, el método de Ezra difiere de la técnica descrita antes en que el valor de Δx cambia de tramo en tramo. Como se demostrará en el ejemplo que sigue, el método de Ezra se basa en graficar $z_1 + F(z_1)$ y $z_2 + F(z_2)$ en función de z. Al hacer esto, α se calcula con la ecuación (6.3.50) y S_f con la ecuación (6.3.51). El valor de Δx empleado para calcular $F(z_1)$ es la longitud del siguiente subtramo aguas arriba de la estación mientras que la Δx asociada con $F(z_2)$ es la longitud del siguiente subtramo aguas abajo. La aplicación de esta técnica gráfica se ilustra mejor con la ayuda de un ejemplo. Por conveniencia, se emplean los datos del ejemplo 6.5 cambiándose ligeramente el enunciado del problema.

EJEMPLO 6.7

Se desea estimar el perfil de flujo gradualmente variado para Q = 100 000 ft³/s (2800 m³/s) en un tramo de 1 milla (1600 m) cuya sección transversal y características se definen en la figura 6.4 y tabla 6.9. En este tramo, se tiene una canal distinto principal de la sección de la berma siendo ambos aproximadamente de forma rectangular. Entre las millas 10 y 10.5, el canal es curvo, y no tiene pérdidas locales. Entre las millas 10.5 y 11, el canal es curvo de tal forma que la sección de berma o lateral por dentro de la curva tiene una longitud de 1920 ft (585 m). Para evitar complicaciones se supone que no se presentan pérdidas locales en este tramo. Estímese la elevación de la

superficie del agua en la milla 11 si la elevación del río es de 70 ft (21 m) en la milla 10.

Solución

Los valores de $z_1 + F(z_1)$ y $z_2 + F(z_2)$ empleados en este cálculo se resumen en la tabla 6.15. Respecto a estos datos, se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. Los datos de elevaciones de la columna 2 se seleccionaron examinando las respuestas correctas del ejemplo 6.5. En el caso general, estas selecciones serían más difíciles de discernir.

2. En la columna 3, las longitudes con asterisco se calcularon con la ecuación (6.3.52). Aunque estos números varían en el subtramo en función de la elevación; esta variación no es significativa sobre un rango limitado de elevaciones.

Después de tabular los datos puede graficarse la figura 6.7. La solución procede entonces como sigue:

1. En la milla 10 la elevación es de 70 ft (21 m) (punto A, figura 6.7). Se localiza este punto, y se determina el valor correspondiente de $z_2 + F(z_2)$ que es de 72.9 ft (22.2 m).

2. El valor de 72.9 ft (22.2 m) se localiza en la curva $z_1 + F(z_1)$ para la milla 10.15 (punto B). La elevación correspondiente a este valor de $z_1 + F(z_1)$ es de 72.4 ft (22.1 m) que es exactamente igual al valor encontrado para esta ubicación en el ejemplo 6.5.

3. Se encuentra el punto C en la figura 6.7 extendiendo una línea horizontal desde el punto B hasta que intersecta la curva $z_2 + F(z_2)$ para la milla 10.25 del río.

4. El punto C corresponde al valor 75.1 ft (22.9 m) de $z_2 + F(z_2)$.

5. Se ubica el valor de 75.1 ft en la curva $z_1 + F(z_1)$ para la milla 10.5 (punto D).

6. Se estima entonces la elevación del río en la milla 10.5 que es de 74.6 ft (22.7 m), la cual corresponde al valor de 74.5 ft (22.7 m) del ejemplo 6.5.

La solución prosigue en esta forma hasta que se determina que la elevación en la milla 11 del río es de 78 ft (23.8 m).

Deben mencionarse los siguientes comentarios generales sobre esta metodología:

1. Las curvas de z contra $z + F(z)$ son esencialmente curvas de energía específica, p.ej., la curva $z_2 + F(z_2)$ para la milla 10 del río en la figura 6.7.

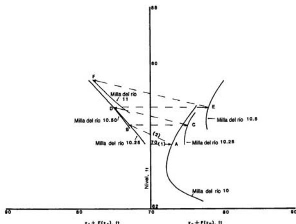


FIGURA 6.7 Solución gráfica del ejemplo 6.7.

2. Las curvas $z_1 + F(z_1)$ para las millas 10.25 y 10.5 son casi idénticas.
3. En este ejemplo, se despreciaron las pérdidas locales; aunque, debieron haberse considerado implementando los siguientes pasos:
   a. Se construye una curva $\alpha\overline{u}^2/2g$ contra z para cada subtramo.
   b. El valor

$$k\left(\alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{\overline{u}_2^2}{2g}\right)$$

   se le adiciona a $z_2 + F(z_2)$ y se encuentra un valor corregido para $z_1 + F(Z_1)$.

Una ventaja distintiva del método de Ezra sobre otras técnicas, ya sea digitales o gráficas, es que con una modificación menor puede emplearse para determinar perfiles de flujo gradualmente variado para una escala de gastos en un canal con geometría especificada. Siguiendo a Henderson (1966), defínase

$$k_i = \frac{Q_o^2}{Q^2} F(z_i) \tag{6.3.76}$$

o

$$F(z_i) = \frac{Q^2}{Q_o^2} k_i = rk_i \tag{6.3.77}$$

donde Q_o = un gasto de referencia que se elige cerca de la mitad del rango de gastos que se van a considerar. Las curvas k_1 y k_2 son graficadas a partir del

cálculo de $F(z_1)$ y $F(z_2)$ para el gasto Q_o. Por ejemplo, en la figura 6.8, se grafican las curvas k_1 y k_2 en función de las elevaciones en el canal definidas en el ejemplo 6.5 y 6.7 empleando los datos resumidos en la tabla 6.15. Al construir estas figuras, es esencial que se emplee la misma escala para la abscisa y la ordenada. La aplicación de este método se ilustra mejor mediante un ejemplo.

EJEMPLO 6.8

Para los datos del ejemplo 6.7, determínese la elevación en la milla 11 del río con las curvas de la figura 6.8.

Solución

La solución procede como sigue:

1. La elevación del agua en la milla 10 del río, esto es, 70 ft (21.3 m). se localiza para esta milla del río en k_2, punto A.

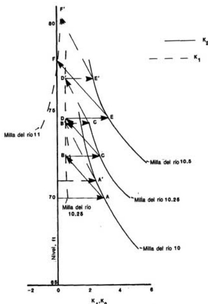


FIGURA 6.8 Solución por el método modificado de Ezra del perfil de flujo gradualmente variado.

TABLA 6.15 Datos tabulados para el ejemplo 6.7

Milla del río (1)	Elevación, ft (2)	Δx_D Δx_u, ft (3)	A, ft^2 (4)	P, ft (5)	R, ft (6)	$R^{2/3}$ (7)	n (8)	$K \times 10^{-5}$ (9)	$\frac{K^3}{A^2} \times 10^{-10}$ (10)
10	63	—	1300	118	11.0	4.96	0.03	3.2	1.9
		1320	4800	608	7.89	3.97	0.05	5.7	0.8
			6100					8.9	2.7
	65	—	1500	120	12.5	5.39	0.03	4.0	2.9
		1320	6000	610	9.84	4.59	0.05	8.2	1.5
			7500					12.2	4.4
	67	—	1700	122	13.9	5.80	0.03	4.9	4.1
		1320	7200	612	11.8	5.18	0.05	11.0	2.6
			8900					15.9	6.7
	69	—	1900	124	15.3	6.17	0.03	5.8	5.5
		1320	8400	614	13.7	5.72	0.05	14.0	4.2
			10300					19.8	9.7
	71	—	2100	126	16.7	6.53	0.03	6.8	7.2
		1320	9600	616	15.6	6.24	0.05	18.0	6.2
			11700					24.8	13.4
	73	—	2300	128	18.0	6.87	0.03	7.8	9.1
		1320	10800	618	17.5	6.74	0.05	22.0	8.8
			13100					29.8	17.9
	75	—	2500	130	19.2	7.18	0.03	8.9	11.0
		1320	12000	620	19.4	7.22	0.05	26.0	12.0
			14500					34.9	23.0
10.25	70	1320	2625	172	15.2	6.15	0.03	8.0	7.5
		1320	6875	562	12.2	5.31	0.05	10.9	2.7
			9500					18.9	10.2
	72	1320	2925	174	16.8	6.56	0.03	9.5	10.1
		1320	7975	564	14.1	5.85	0.05	14.0	4.2
			10900					23.5	14.3
	74	1320	3225	176	18.3	6.95	0.03	11.0	13.0
		1320	9075	566	16.0	6.36	0.05	17.0	6.2
			12300					28.0	19.2
10.5	72	1320	3400	222	15.3	6.17	0.03	10.0	9.8
		2295*	6000	512	11.7	5.16	0.05	9.2	2.2
			9400					19.2	12.0
	74	1320	3800	224	17.0	6.61	0.03	12.0	12.0
		2280*	7000	514	13.6	5.71	0.05	12.0	3.4
			10800					24.0	15.4
	76	1320	4200	226	18.6	7.02	0.03	15.0	18.0
		2280*	8000	516	15.5	6.22	0.05	15.0	5.1
			12200					30.0	23.1
	78	1320	4600	228	20.2	7.41	0.03	16.9	23.0
		2255*	9000	518	17.4	6.71	0.05	18.0	7.2
			13600					34.9	30.2

α (11)	$\overline{u}$, ft/s (12)	$\frac{\alpha \overline{u}^2}{2g}$ (13)	S_f (14)	$-\frac{1}{2} S_f \Delta x_D$ (15)	$-\frac{1}{2} S_f \Delta x_u$ (16)	$F(z_1)$ (17)	$F(z_2)$ (18)	$z_1 + F(z_1)$ (19)	$z_2 + F(z_2)$ (20)
1.43	16.4	5.97	0.0126	—	8.33	—	14.3	—	77.3
1.36	13.3	3.75	0.00672	—	4.43	—	8.19	—	73.2
1.32	11.2	2.59	0.0040	—	2.61	—	5.20	—	72.2
1.32	9.71	1.93	0.00255	—	1.68	—	3.61	—	72.6
1.20	8.55	1.36	0.00163	—	1.07	—	2.43	—	73.4
1.16	7.63	1.05	0.00113	—	0.74	—	1.79	—	74.8
1.14	6.90	0.84	0.00082	—	0.54	—	1.38	—	76.4
1.36	10.5	2.33	0.00280	−1.85	1.85	0.48	4.18	70.5	74.2
1.33	9.17	1.74	0.00183	−1.20	1.20	0.54	2.94	72.5	74.9
1.30	8.13	1.33	0.00125	−0.82	0.82	0.51	2.15	74.5	76.1
1.50	10.6	2.64	0.00271	−1.79	3.11	0.85	5.75	72.8	77.8
1.30	9.26	1.73	0.00174	−1.14	1.98	0.58	3.71	74.5	77.7
1.27	8.20	1.32	0.00111	−0.73	1.27	0.59	2.59	76.6	78.6
1.31	7.35	1.10	0.00082	−0.54	0.92	0.56	2.09	78.6	80.1

TABLA 6.15 Datos tabulados para el ejemplo 6.7 (*Continuación*)

Milla del río (1)	Elevación, ft (2)	Δx_D Δx_u, ft (3)	A, ft² (4)	P, ft (5)	R, ft (6)	$R^{2/3}$ (7)	n (8)	$K \times 10^{-5}$ (9)	$\frac{K^3}{A^2} \times 10^{-10}$ (10)
11	74	2435*	4200	319	13.2	5.58	0.03	11.6	8.9
		—	3600	409	8.80	4.27	0.05	4.6	0.8
			7800					16.2	9.7
	76	2418*	4800	321	14.9	6.08	0.03	14.4	13.1
		—	4400	411	10.7	4.86	0.05	6.4	1.3
			9200					20.8	14.4
	78	2406*	5400	323	16.7	6.54	0.03	17.5	18.5
		—	5200	413	12.6	5.42	0.05	8.4	2.2
			10600					25.9	20.7
	80	2400	6000	325	18.5	6.99	0.03	20.8	25.1
		—	6000	415	14.5	5.94	0.05	10.6	3.3
			12000					31.4	28.4

* Longitudes calculadas a partir de la ecuación (6.3.52).

2. En este caso, dado que $Q = Q_o$, $r = 1$ y la elevación en la milla 10.25 se determina mediante la construcción de una línea con pendiente de −1 a través del punto A y extendiéndola hasta que intersecte la curva k_1 para la milla 10.25 (punto B). De aquí, se obtiene que la elevación en esta ubicación es de 72.4 ft (22.1 m).

3. Se extiende una línea horizontal desde el punto B hasta que se intersecte la curva k_2 para la milla 10.25.

Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que se llegue al punto del extremo especificado, en este caso el punto F. Por ende, la elevación en la milla 11 es de aproximadamente 77.6 ft (23.7 m), y esta estimación concuerda bastante bien con la elevación estimada en el ejemplo 6.5.

Se concluye que el ejemplo 6.5 pudo haberse resuelto por las técnicas gráficas descritas arriba. Se asevera ahora que la pendiente de las líneas que conectan las curvas k_2 con las k_1 se determina por

$$\tan \theta = r = \frac{Q^2}{Q_o^2} \tag{6.3.78}$$

De aquí, que para gastos diferentes a Q_o, los perfiles de flujo gradualmente variado para este canal se determinan simplemente modificando la pendiente de las líneas que conectan las curvas k_1 y k_2.

α (11)	$\bar{u}$, ft/s (12)	$\frac{\alpha \bar{u}^2}{2g}$ (13)	S_f (14)	$-\frac{1}{2} S_f \Delta x_D$ (15)	$-\frac{1}{2} S_f \Delta x_u$ (16)	$F(z_1)$ (17)	$F(z_2)$ (18)	$z_1 + F(z_1)$ (19)	$z_2 + F(z_2)$ (20)
1.39	12.8	3.55	0.00381	−4.64	—	−1.09	—	72.9	—
1.35	10.9	2.48	0.00231	−2.79	—	−0.31	—	75.7	—
1.34	9.43	1.85	0.00149	−1.79	—	0.06	—	78.1	—
1.32	8.33	1.42	0.00101	−1.22	—	0.20	—	80.2	—

EJEMPLO 6.9

Para el canal descrito en los ejemplos 6.5 y 6.7, determínese la elevación en la milla 11 si el gasto es de 132 000 ft³/s (3740 m³/s), siendo la elevación en la milla 10 de 71 ft (21.6 m), y despreciando las pérdidas locales.

Solución

Las pendientes de las líneas que conectan las curvas k_1 y k_2 se encuentran con la ecuación (6.3.78) o

$$\tan \theta = r = \frac{Q^2}{Q_o^2} = \frac{(132\,000)^2}{(100\,000)^2} = 1.74$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.74) = 60.1°$$

Entonces, con referencia a la figura 6.8, la solución procede como sigue:

1. Se ubica la elevación de la milla 10, esto es, 71 ft, en la curva k_2 para esta milla en el río, punto A'.
2. Se construye una línea a 60° con la horizontal a través de A' y se extiende hasta que intersecte con la curva k_1 para la milla 10.25 (punto B'). La elevación en esta ubicación es de 74.3 ft (22.6 m).
3. Se extiende una línea a través del punto B' hasta que intersecte la curva k_2 para la milla 10.25, punto C'.

Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que se llegue al punto especificado, en este caso el punto F'. La elevación en la milla 11 del río se estima que es de 80.5 ft (24.5 m).

Todos los métodos descritos en las secciones anteriores, los cuales son aplicables a secciones no prismáticas o canales naturales, requieren de que se conozca en forma completa la sección transversal en intervalos frecuentes a lo largo de éste. En muchas aplicaciones prácticas, el ingeniero debe estimar el perfil de flujo gradualmente variado a partir de datos numéricos de campo. Se puede emplear una técnica conocida como el *método de Grimm* para estimar el perfil requerido en esta situación. Si se supone que la pendiente de fricción S_f es igual a la de la superficie del agua S_w o en efecto que la carga de velocidad es despreciable, entonces

$$Q \sim \sqrt{S_w} \tag{6.3.79}$$

La pendiente de la superficie del agua se puede encontrar para diferentes gastos empleando los datos de elevaciones-gastos en dos estaciones sobre el canal. Supóngase que en una estación del canal, la pendiente de la superficie del agua correspondiente al gasto Q_o es S_{wo}; se tendría entonces, que la pendiente de la superficie del agua correspondiente a un gasto Q sería de

$$S_w = S_{wo}\left(\frac{Q}{Q_o}\right)^2 \tag{6.3.80}$$

donde S_w es la pendiente de la superficie del agua correspondiente al gasto Q. La pendiente de la superficie del agua para el gasto Q se encuentra en una serie de estaciones a lo largo del canal, y se dibuja el perfil. Esta técnica esta sujeta a las siguientes restricciones:

1. El método es aplicable sólo cuando los datos de elevaciones-gastos son todavía válidos. Por ejemplo, si se construye una presa, el método es válido; aunque si se hacen mejoras al canal, el método no sería válido, ya que cambiarían las relaciones elevaciones-gasto.
2. La técnica falla para cargas de velocidad significativas, debido a que la suposición en la que se basaba la ecuación (6.3.79) no es válida.
3. El método dará estimaciones satisfactorias sólo si se tienen registros para elevaciones que son comparables con los del perfil estimado. Por ende, generalmente, las condiciones que producen modificaciones del perfil pueden causar sólo variaciones pequeñas en la elevación.

Es común el caso en que la velocidad es pequeña y que la pendiente de fricción es igual a la elevación de la superficie del agua, pero las elevaciones predecidas son mayores a las que componen el registro histórico. En estos casos el método de Grimm no es aplicable; aunque se puede emplear una técnica desarrollada por Escoffier (1946). En cada sección a lo largo del canal, se grafica el parámetro $1/K^2 = S_f/Q^2$ como la abscisa con la elevación como la ordenada donde K es el factor de forma. Se grafican las curvas para las siguientes estaciones del canal en forma alterna a la derecha e izquierda del eje vertical.

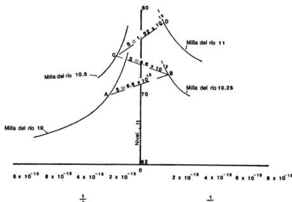


FIGURA 6.9 Estimación del perfil de flujo gradualmente variado por el método de Escoffier.

Por ejemplo, en la figura 6.9 se encuentran graficados los datos de los ejemplos 6.5, 6.8. Entonces, para $Q = 100\,000$ ft³/s (2800 m³/s) y una elevación de 70 ft (21.3 m) en la estación de la milla 10 la solución procede como sigue. Se estima la elevación en la milla 10.25 construyendo una línea a través del punto A con una pendiente de

$$\frac{\Delta x\ Q^2}{2} = \frac{1320(100\,000)^2}{2} = 6.6 \times 10^{12}$$

y extendiéndola hasta que intersecte a la curva para la milla 10.25 (punto B). Δx es la distancia entre dos estaciones consecutivas. La elevación en la milla 10.5 se encuentra en forma análoga construyendo una línea con pendiente $-\Delta x Q^2/2$ a través del punto B y estendiéndola hasta que intersecte la curva de la milla 10.5 (punto C). Nótese que las respuestas obtenidas en la figura 6.9 concurdan con las determinadas en los ejemplos anteriores; aunque este método tiene varias limitaciones. Primero, la carga de velocidad debe ser despreciable. Segundo, no hay forma de tomar en cuenta las pérdidas locales. Tercero, aunque se pueden tomar en cuenta las diferencias de longitudes entre la sección principal y las laterales, esto complica mucho la solución. En la figura 6.9, se calculó la pendiente de la línea que conecta los puntos C y D suponiendo que $\Delta x = 2640$ ft (800 m) aunque se tiene una diferencia significativa entre las longitudes de la sección principal y lateral. El efecto en la estimación de la elevación en la milla 11 es pequeño. La técnica tiene la ventaja de requerir de sólo un juego de curvas para una gama amplia de gastos.

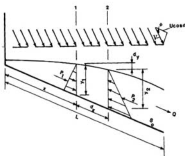


FIGURA 6.10 Análisis del flujo espacial y gradualmente variado para gasto creciente.

6.4 FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

El flujo permanente, espacialmente variado se define como un flujo en el cual el gasto varía en la dirección del flujo y se presenta en situaciones que involucran vertedores de canal lateral, canales con fronteras permeables, alcantarillas de aguas pluviales, y estructuras de caída en el fondo de canales. Debido a que los principios que rigen el flujo cuando aumenta el gasto con la distancia son diferentes de los que rigen el flujo cuando disminuye el gasto con la distancia, se deben considerar en forma separada estos dos tipos de flujo.

Gasto Creciente

En el caso de flujo espacialmente variado, que se ejemplifica por un vertedor de canal lateral, una parte importante de la pérdida de energía resulta del mezclado del agua que entra al canal con la que fluye en éste. Debido a que esta pérdida no se puede cuantificar en forma precisa, se ha empleado tradicionalmente el principio de conservación de cantidad de movimiento para desarrollar las ecuaciones de régimen.

Dado un canal con gasto de entrada lateral (Fig. 6.10), la ecuación de continuidad para el volumen de control mostrado es

$$\frac{dQ}{dx} = q^* \tag{6.4.1}$$

donde Q = al gasto en el canal y q^* = al gasto lateral por unidad de longitud. El lado izquierdo de la ecuación (6.4.1) puede expandirse para dar

$$\overline{u}\,\frac{dA}{dx} + A\,\frac{d\overline{u}}{dx} = q^* \tag{6.4.2}$$

donde A = área de la sección transversal y $\bar{u}$ = velocidad media del flujo en la dirección longitudinal. Para este mismo volumen de control, el transporte de cantidad de movimiento en la dirección x es

$$\Delta M = M_2 - (M_1 + M_L) \tag{6.4.3}$$

donde

$$M_2 - M_1 = \int\int_A \rho u_x^2 \, dA \tag{6.4.4}$$

y

$$M_L = \rho q^* \Delta x \; V \cos \phi \tag{6.4.5}$$

En las ecuaciones (6.4.4) y (6.4.5), ρ = densidad del fluido, y V velocidad media del flujo lateral (Fig. 6.10).

Si se desprecian los efectos de tensión superficial y turbulencia, las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son la componente del peso del fluido dentro del volumen de control en la dirección longitudinal, el cortante de la frontera, y las fuerzas de presión en las estaciones 1 y 2. Si se iguala el cambio total de transporte de cantidad de movimiento, ecuación (6.4.3), con la suma de las fuerzas actuantes, entonces

$$\frac{d}{dx}\int\int_A \rho u_x^2 \, dA - \rho q^* V \cos \phi = \gamma S_0 A - \tau_b P - \frac{d}{dx}\int\int_A p \, dA \tag{6.4.6}$$

donde S_o = sen θ = pendiente del fondo
p = presión
P = perímetro mojado
γ = peso específico del fluido
τ_b = cortante medio de frontera actuando en la dirección x sobre toda la sección transversal

La ecuación (6.4.6) puede simplificarse introduciendo expresiones estándar para el primer término en el lado izquierdo de la ecuación y en el último término del lado derecho de la ecuación. Se combina luego este resultado con la ecuación (6.4.2) para dar una ecuación para la pendiente de la superficie del agua (véase Yen y Wenzel, 1970), o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f + (q^*/gA)(V \cos \phi - 2\beta\bar{u}) - (\bar{u}^2/g)(dB/dx) - y[d(\alpha' \cos \theta)/dx]}{\alpha' \cos \theta(1 + y/D) - \beta\bar{u}^2/gD} \tag{6.4.7}$$

donde β = coeficiente de corrección de cantidad de movimiento
α' = coeficiente de corrección de presión
D = tirante hidráulico
S_f = pendiente de fricción

Si θ es constante, la ecuación (6.4.7) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f + (q^*/gA)(V\cos\phi - 2\beta\bar{u}) - (\bar{u}^2/g)(d\beta/dx)}{\cos\theta[\alpha'(1 + y/D) + y(d\alpha'/dy)] - (\beta\bar{u}^2/gD)} \qquad (6.4.8)$$

Si se supone que la distribución de presiones es hidrostática, $V\cos\phi = 0$, $\cos\theta = 1$, y $\beta = 1$, quedando la ecuación (6.4.8) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - (2q^*V/gA)}{1 - (\bar{u}^2/gD)} = \frac{S_o - S_f - (2Q/gA^2)(dQ/dx)}{1 - (Q^2/gA^2D)} \qquad (6.4.9)$$

la cual es la forma más común para la ecuación de flujo gradualmente variado con gasto lateral de entrada (véase, Chow 1959, o Henderson, 1966).

La ecuación (6.4.9) puede resolverse con varias técnicas, pero como sucedió en el caso para el cómputo de perfiles de flujo gradualmente variado regulares, el procedimiento de solución debe empezar en un control. Por lo tanto, para un canal dado, con un gasto lateral de entrada especificado, se debe examinar la situación para determinar si se presenta una sección de flujo crítico. Siguiendo el razonamiento de Henderson (1966), el flujo crítico se presenta o $dy/dx = 0$ cuando el numerador de la ecuación (6.4.9) es cero o

$$S_o - S_f - \frac{2Q}{gA^2}\frac{dQ}{dx} = 0 \qquad (6.4.10)$$

Si el gasto de entrada lateral es constante, como lo es en la mayor parte de los casos de interés práctico.

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{Q}{x} \qquad (6.4.11)$$

donde x = distancia longitudinal desde el inicio del canal. Nota: Este planteamiento supone que el gasto al inicio del canal es cero. La pendiente de fricción del canal se puede estimar con la ecuación de Manning o la de Chezy, y por conveniencia notacional se empleará la de Chezy o

$$S_f = \frac{Q^2P}{C^2A^3} \qquad (6.4.12)$$

La sustitución de las ecuaciones (6.4.11) y (6.4.12) en la ecuación (6.4.10) da

$$S_o = \frac{Q^2P}{C^2A^3} + \frac{2Q^2}{gA^2x} = \mathbf{F}^2\left(\frac{gP}{C^2T} + \frac{2A}{Tx}\right) \qquad (6.4.13)$$

donde T = ancho superficial del canal. Como en el capítulo 2, se excluye ahora la posibilidad de que $dy/dx = 0$, y se considera ahora la posibilidad alternativa de que

$$\mathbf{F}^2 = \frac{Q^2T}{gA^3} = 1$$

Empleando esta definición para estimar A en la ecuación (6.4.13) se obtiene después de algo de reordenamiento,

$$x = \frac{8Q_x^2}{gT^2[S_o - (gP/C^2T)]^3} \tag{6.4.14}$$

donde $Q_x = dQ/dx$. La ecuación (6.4.14) puede usarse para estimar la ubicación de la sección de flujo crítico, si ésta existe. Respecto a la ecuación (6.4.14), se deben hacer las siguientes observaciones. Primero, este tipo de desarrollo fue presentado por primera vez por Keulegan (1952). Segundo, si la estimación de x es mayor que la longitud del canal, no se presenta una sección de flujo crítico. Tercero, si se tiene una sección de flujo crítico y más allá de ésta se encuentra una sección de control, es posible que la sección crítica se ahogue si el tirante de agua es lo suficientemente grande. Cuarto, como lo demostró Keulegan (1952), las soluciones explícitas para esta ecuación son posibles solamente para algunos casos especiales, e.g., un canal rectangular ancho. En general, se debe resolver por tanteos la ecuación (6.4.14) dado que no se conocen ni P ni T y C puede variar. Quinto, aunque en este momento no es posible justificar la posibilidad de que se presente una sección crítica cuando $dy/dx = 0$ y $F \neq 0$, esta alternativa debe quedarse como un tema para estudio. Sexto, en el caso de un canal rectangular con C constante, la ecuación (6.4.14) queda como

$$x = \frac{8q_{x*}^2}{g(S_o - g/C^2)^3} \tag{6.4.15}$$

donde $q = Qx/b$ y b = ancho del canal.

Aunque se pueden determinar perfiles de flujo espacialmente variado por varias técnicas de cómputo de tanteos, la técnica más efectiva es la integración numérica combinada con tanteos. Para este procedimiento, la segunda ley de movimiento de Newton se puede escribir como

$$\frac{\gamma}{g}[Q\,\Delta\overline{u} + (\overline{u} + \Delta\overline{u})\,\Delta Q] = -\gamma\overline{A}\,\Delta y + \gamma S_o\overline{A}\,\Delta x - \gamma S_f\overline{A}\,\Delta x$$

donde $\overline{A}$ área media de flujo entre las estaciones 1 y 2 (Fig. 6.10), las cuales están separadadas por una distancia Δx. El área media se puede expresar como

$$\overline{A} = \frac{Q_1 + Q_2}{\overline{u}_1 + \overline{u}_2}$$

donde Q_1 y Q_2 son los gastos en las estaciones 1 y 2, respectivamente, y $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son las velocidades medias del flujo en estas estaciones, respectivamente. Sea

$$Q = Q_1$$

y

$$\overline{u}_2 = \overline{u} + \Delta\overline{u}$$

La sustitución de estas relaciones en la ecuación de cantidad de movimiento da, después de reordenarse,

$$\Delta y = -\frac{Q_1(\overline{u}_1 + \overline{u}_2)}{g(Q_1 + Q_2)}\left(\Delta\overline{u} + \frac{\overline{u}_2}{Q_1}\Delta Q\right) + S_o\,\Delta x - S_f\,\Delta x \qquad (6.4.16)$$

Respecto a la figura 6.10, el desnivel entre la superficie del agua en la estación 1 y 2 está dado por

$$\Delta y' = -\Delta y + S_o\,\Delta x \qquad (6.4.17)$$

Al sustituir la ecuación (6.4.16) en la ecuación (6.4.17) se obtiene

$$\Delta y' = \frac{Q_1(\overline{u}_1 + \overline{u}_2)}{g(Q_1 + Q_2)}\left(\Delta\overline{u} + \frac{\overline{u}_2}{Q_1}\Delta Q\right) + S_f\,\Delta x \qquad (6.4.18)$$

la cual puede emplearse para determinar el perfil del flujo espacialmente variado para el caso de gasto creciente.

EJEMPLO 6.10

Un canal colector trapecial de un vertedor lateral con 400 ft (122 m) de largo se diseña para un gasto de 40 (ft^3/s)/pie [(3.72 m^3/s)/m]. La sección transversal tiene un ancho de plantilla de 10 ft (3.0 m) y taludes laterales de 0.5:1. La pendiente de fondo del canal es de 0.015 y empieza con una elevación de fondo aguas arriba de 73.7 ft (22.5 m). Si $n = 0.1505$ y la distribución de velocidades es uniforme, estímese el perfil de la superficie del agua para el gasto de diseño. Nota: Este ejemplo lo presentó por primera vez Hinds (1926).

Solución

El primer paso para la solución de este problema es el de determinar si existe una sección de flujo crítico, y si existiera, el segundo paso es determinar su posición longitudinal. Esta determinación requiere de una solución por tanteos de la ecuación (6.4.14) (Tabla 6.16). En esta tabla deben señalarse los siguientes puntos:

Columna 1: Una ubicación longitudinal supuesta.

Columna 2: El gasto total en la sección supuesta se determina como el producto de la columna 1 y el gasto lateral de 40 (ft^3/s)/pie [3.72 (m^3/s)/m].

Columna 3: El tirante crítico correspondiente a la distancia longitudinal supuesta en la columna 1 y el gasto de la columna 2, la ecuación (2.2.3), y la tabla 2.1.

TABLA 6.16 Ubicación de la sección de flujo crítico para el ejemplo 6.10

Tanteo x, ft (1)	Q, ft³/s (2)	y_c, ft (3)	A, ft² (4)	P, ft (5)	T, ft (6)	R, ft (7)	C (8)	x, ft (9)
200	8000	20.8	425	56.6	30.8	7.51	139	131
131	5240	16.4	299	46.7	26.4	6.40	135	178
178	7120	19.5	385	53.7	29.5	7.17	138	142
142	5680	17.2	320	48.5	27.2	6.59	136	168
168	6720	18.9	368	52.3	28.9	7.03	137	149
149	5960	17.7	333	49.6	27.7	6.71	136	162
162	6480	18.5	356	51.4	28.5	6.92	137	153
153	6120	17.9	340	50.1	27.9	6.79	137	159
159	6360	18.3	351	51.0	28.3	6.88	137	155
155	6200	18.1	345	50.5	28.1	6.83	137	157
157	6280	18.2	348	50.8	28.2	6.85	137	156
156	6240	18.1	345	50.5	28.1	6.83	137	157

Columnas 4 a 8: El área, perímetro mojado, ancho de superficie libre, radio hidráulico, y coeficiente de Chezy, respectivamente correspondientes al tirante de la columna 3 o

$$A = (b + zy) = (10 + 0.5y)y$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 10 + 2.24y$$

$$T = b + 2zy = 10 + y$$

y

$$C = \frac{\phi}{n} R^{1/6} = \frac{1.49}{0.015} R^{1/6}$$

Columna 9: La distancia calculada a la sección crítica con la ecuación (6.4.14).

Cuando el valor en la columna 9 de la tabla 6.16 concuerda con el estimado en la columna 1, se acaba el cálculo. De la tabla 6.16 se estima que aproximadamente a 156 ft (48 m) aguas abajo del inicio del canal se presenta la sección crítica.

Teniéndose ubicada la sección crítica, se puede estimar el perfil de la superficie líquida aguas arriba y abajo desde este punto con la ecuación (6.4.18). Los cálculos del perfil de aguas arriba se encuentran en la tabla 6.17*a* mientras que los del perfil de aguas abajo de esta sección se encuentran en la tabla 6.17*b*. En estas tablas las columnas contienen los siguientes datos.

Columna 1: Ésta es la distancia longitudinal entre el punto de cómputo y el inicio del canal.

Columna 2: Representa la distancia del incremento longitudinal entre dos puntos adyacentes de cómputo.

Columna 3: Contiene la elevación del fondo del canal y se obtiene sustituyendo el producto de la columna 1 por la pendiente longitudinal del canal a partir de la elevación del fondo al inicio del canal; e.g., en la sección de flujo crítico.

$$z_0 = 73.7 - 156(0.1505) = 50..2 \text{ ft } (15.3 \text{ m})$$

Columna 4: Éste es el tirante supuesto.

Columna 5: Representa la elevación de la superficie del agua y se obtiene sumando las columnas 3 y 4.

Columna 6: Éste es el cambio de la elevación de la superficie del agua y se calcula a partir de

$$\Delta y' = -\Delta y + S_0\,\Delta x$$

Columna 7 a 13: Representan respectivamente, el área de flujo para el tirante supuesto, el gasto, la velocidad media, la suma de los gastos, la suma de las velocidades medias, la diferencia de gastos entre dos secciones adyacentes, y el cambio en la velocidad media.

Columna 14: Ésta es la caída de la superficie del agua debida a la pérdida por impacto o

$$\Delta y_m' = \frac{Q_1(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)}{g(Q_1 + Q_2)}\left(\Delta\bar{u} + \frac{\bar{u}_2}{Q_1}\Delta Q\right)$$

Columna 15: Contiene el radio hidráulico asociado con el tirante supuesto.

Columna 16: Ésta es la pédida de carga producida por la fricción y se calcula a partir de

$$h_f = S_f\,\Delta x = \left(\frac{nQ}{1.49AR^{2/3}}\right)^2 \Delta x$$

Columna 17: Representa la caída en la elevación de la superficie del agua entre dos estaciones adyacentes estimada con la ecuación (6.4.18).

Se emplea un procedimiento de tanteos en cada estación longitudinal hasta que los valores de las columnas 6 y 17 coincidan. Este procedimiento se aplica a perfiles aguas arriba y abajo de la sección crítica (Tabla 6.17*a* y *b*).

TABLA 6.17 Datos para el ejemplo 6.10

x, ft (1)	Δx, ft (2)	Z_o, ft (3)	y, ft (4)	Z, ft (5)	$\Delta y'$, ft (6)	A, ft² (7)	Q, ft³/s (8)	$\bar{u}$, ft/s (9)	$Q_1 + Q_2$, ft³/s (10)	$\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, ft/s (11)	ΔQ, ft³/s (12)	$\Delta \bar{u}$, ft/s (13)	$\Delta y'_m$, ft (14)	R, ft (15)	h_f, ft (16)	$\Delta y'$, ft (17)
(*a*) Cómputo del perfil subcrítico de la superficie líquida aguas arriba para el ejemplo 6.9																
156		50.20	18.10	68.30		345	6240	18.09								
100	56	58.70	16.00	74.70	6.33	288	4000	13.89	10 240	31.98	2240	4.20	5.56	6.28	0.09	5.65
			15.50	74.20	5.80	275	4000	14.54	10 240	32.63	2240	3.55	5.42	6.15	0.11	5.53
			15.0	73.70	5.33	262	4000	15.24	10 240	33.33	2240	2.85	5.25	6.02	0.12	5.37
50	50	66.20	12.80	79.00	5.33	210	2000	9.52	6 000	24.76	2000	5.72	5.37	5.43	0.05	5.42
			12.90	79.10	5.42	212	2000	9.42	6 000	24.66	2000	5.82	5.38	5.45	0.05	5.43
25	25	69.90	11.30	81.20	2.16	177	1000	5.65	3 000	15.07	1000	3.77	2.06	5.01	0.01	2.07
			11.20	81.10	2.06	175	1000	5.72	3 000	15.14	1000	3.70	2.06	4.98	0.01	2.07
10	15	72.20	9.90	82.10	0.96	148	400	2.70	1 400	8.42	600	3.02	0.87	4.60	0	0.87
			9.80	82.00	0.86	146	400	2.74	1 400	8.46	600	2.98	0.87	4.57	0	0.87
0	10	73.70	8.61	82.31	$\Delta y' = 2\bar{u}^2/2g$ para $x = 10$ ft (supuesto)											
(*b*) Cómputo del perfil de la superficie líquida aguas abajo para el ejemplo 6.10																
156		50.20	18.10			345	6 240	18.09								
200	44	43.60	18.60	62.20	6.12	359	8 000	22.28	14 240	40.37	1760	4.19	5.75	6.95	0.17	5.92
			18.50	62.10	6.22	356	8 000	22.46	14 240	40.55	1760	4.37	5.91	6.92	0.17	6.08
			18.40	62.00	6.32	353	8 000	22.64	14 240	40.73	1760	4.55	6.06	6.89	0.17	6.23
250	50	36.07	19.70	55.77	6.22	391	10 000	25.57	18 000	48.21	2000	2.93	6.20	7.22	0.24	6.44
			19.90	55.97	6.02	397	10 000	25.19	18 000	47.83	2000	2.55	5.84	7.27	0.23	6.07
300	50	28.55	21.00	49.55	6.42	430	12 000	27.91	22 000	53.10	2000	2.72	6.22	7.54	0.27	6.49
350	50	21.02	21.20	42.22	7.32	437	14 000	32.04	26 000	59.95	2000	4.13	8.13	7.60	0.35	8.48
			22.00	43.02	6.53	462	14 000	30.30	26 000	58.21	2000	2.39	6.21	7.79	0.30	6.51
400	50	13.50	23.00	36.50	6.53	495	16 000	32.32	30 000	62.62	2000	2.02	6.02	8.05	0.33	6.35
			22.90	36.40	6.63	491	16 000	32.57	30 000	62.87	2000	2.27	6.31	8.01	0.33	6.64

Gasto decreciente

En este tipo de flujo espacialmente variado que se ejemplifica por vertedores laterales y rejillas de fondo, no se tiene una pérdida significativa de energía, y se puede estimar la superficie del agua con el principio de energía. La energía total en una sección del canal relativa a un plano horizontal de comparación es

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{6.4.19}$$

Derivando esta ecuación respecto a la coordenada longitudinal x

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2g}\left(\frac{2Q}{A^2}\frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^3}\frac{dA}{dx}\right) \tag{6.4.20}$$

En esta ecuación, $dH/dx = -S_f$, $dz/dx = -S_o$, y

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx} = T\frac{dy}{dx}$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación (6.4.20) y reordenando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - (Q/gA^2)(dQ/dx)}{1 - (Q^2/gA^2D)} \tag{6.4.21}$$

Si se presenta una distribución no uniforme de velocidades, se emplea el coeficiente de corrección de energía y la ecuación (6.4.21) queda como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - (\alpha Q/gA^2)(dQ/dx)}{1 - (\alpha Q^2/gA^2D)} \tag{6.4.22}$$

Las ecuaciones (6.4.21) y (6.4.22) se conocen como las ecuaciones dinámicas para flujo espacialmente variado con gasto decreciente. Nótese que la única diferencia entre las ecuaciones (6.4.9) y (6.4.21) es el coeficiente del tercer término del numerador.

En el caso de la toma de agua por una rejilla en el fondo de un canal rectangular (Fig. 6.11), se puede derivar una ecuación para el perfil de la superficie del agua. Supóngase que $\alpha = 1$ y $\theta = 0$; entonces la energía específica para cualquier sección del canal es

$$E = y + \frac{Q^2}{2gb^2y^2} \tag{6.4.23}$$

donde b = ancho del canal. Según Chow (1959), puede suponerse que la energía específica a lo largo del canal es constante. Al emplear esta suposición y diferenciar la ecuación (6.4.23) respecto a la distancia longitudinal se obtiene.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Qy(dQ/dx)}{gb^2y^3 - Q^2} \tag{6.4.24}$$

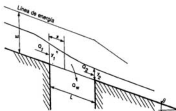


FIGURA 6.11 Análisis del flujo espacial y gradualmente variado con toma de fondo.

donde dQ/dx es el gasto tomado en una distancia Δx de la rejilla. A diferencia del problema de flujo espacialmente variado de gasto creciente, dQ/dx no puede suponerse constante debido a que este término depende del efecto de la carga sobre la rejilla.

Para el caso de una rejilla donde la dirección de flujo a través de ésta es casi vertical, e.g., en el caso de una rejilla compuesta de barras verticales, la carga efectiva es aproximadamente igual a la energía específica, y la pérdida de energía es despreciable. En esta situación

$$-\frac{dQ}{dx} = \epsilon C_D b\sqrt{2gE} \tag{6.4.25}$$

donde ϵ = razón entre el área abierta de la rejilla contra el área total de la rejilla y C_D = el coeficiente de gasto. Según Chow (1959), C_D varía para este caso desde 0.435 para una inclinación de 1 a 5 hasta 0.497 para un canal horizontal. Entonces según la ecuación (6.4.23), el gasto es

$$Q = by\sqrt{2g(E-y)} \tag{6.4.26}$$

Al sustituir las ecuaciones (6.4.25) y (6.4.26) en la ecuación (6.4.24) se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para el perfil de la superficie del agua o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\epsilon C_D\sqrt{E(E-y)}}{3y-2E}$$

e integrando esta ecuación y evaluando la constante de integración con la condición de que para $x = 0$, $y = y_1$ da

$$x = \frac{E}{\epsilon C_D}\left(\frac{y_1}{E}\sqrt{1-\frac{y_1}{E}} - \frac{y}{E}\sqrt{1-\frac{y}{E}}\right) \tag{6.4.27}$$

La longitud de rejilla requerida para sacar todo el gasto en la toma se ubica por

$$L = \frac{E}{\epsilon C_D}\left(\frac{y_1}{E}\sqrt{1 - \frac{y_1}{E}}\right) \qquad (6.4.28)$$

dado que en este punto $y = 0$.

En el caso de que las aberturas en la rejilla tengan un ángulo apreciable respecto a la vertical, e.g., en el caso de una rejilla compuesta de una pantalla perforada, la pérdida de energía a través de la rejilla no es despreciable, y se supone que la carga efectiva es igual al tirante. En este caso, el gasto a través de la rejilla por un incremento de distancia dx es

$$-\frac{dQ}{dx} = \epsilon C_D b\sqrt{2gy} \qquad (6.4.29)$$

Entonces en una forma análoga a la descrita arriba

$$x = \frac{E}{\epsilon C_D}\left[0.5\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{y}{E}}\right) - 1.5\sqrt{\frac{y}{E}\left(1 - \frac{y}{E}\right)}\right] + \Gamma \qquad (6.4.30)$$

donde

$$\Gamma = \frac{E}{\epsilon C_D}\left[1.5\sqrt{\frac{y_1}{E}\left(1 - \frac{y_1}{E}\right)} - 0.5\cos^{-1}\left(\frac{y_1}{E}\right)\right]$$

La longitud de la rejilla requerida para sacar todo el gasto es

$$L = \frac{E}{\epsilon C_D}\left[1.5\sqrt{\frac{y_1}{E}\left(1 - \frac{y_1}{E}\right)} - 0.25\text{sen}^{-1}\left(1 - \frac{2y_1}{E}\right) + \frac{\pi}{8}\right] \qquad (6.4.31)$$

En el caso de rejillas de pantallas perforadas, Chow (1959) notó que C_D, el coeficiente de gasto, variaba desde 0.75 para inclinaciones de 1 a 5 a 0.8 para canales horizontales.

Debe aclararse que el concepto de toma de agua por medio de una estructura de caída vertical es particularmente importante debido a que esta situación se presenta en la mayor parte de los sistemas recolectores de aguas pluviales por canales.

6.5 APLICACIONES PRÁCTICAS

En las secciones anteriores, el tema de la estimación de perfil gradualmente variado ha sido tratado desde un punto de vista abstracto al analizar técnicas de cómputo. En esta sección, se consideran un número de situaciones en las cuales los perfiles de flujo gradualmente variado interactúan con otros aspectos del flujo en canales abiertos.

Perfil aguas arriba de una presa

Uno de los problemas mas comunes de flujo gradualmente variado es la estimación de los efectos aguas arriba de una presa. Aunque teóricamente el perfil de flujo gradualmente variado aguas arriba de una presa sobre una pendiente suave se extiende en forma indefinida, comúnmente se supone que termina en el punto donde la elevación de la superficie del agua es 1% mayor que la elevación bajo condiciones normales de flujo. En la mayor parte de las investigaciones, se busca una envolvente del remanso; i.e., se determina la terminación de la curva de remanso para varios gastos.

La envolvente del remanso empieza en el punto donde la superficie estática del vaso intersecta el fondo del canal —como sucede cuando el gasto es cero—. A medida que aumenta el gasto en la presa, el punto final de la curva de remanso puede moverse aguas arriba o abajo dependiendo de muchos factores. Por ejemplo:

1. Si el nivel en el vaso es constante y el canal es prismático con una sección transversal simple, entonces el final de la curva de remanso se moverá hacia aguas abajo al aumentar el gasto.
2. Un aumento en la rugosidad del canal produce un acortamiento de la longitud del perfil de flujo gradualmente variado y, por lo tanto, un desplazamiento hacia abajo, arriba del punto terminal del remanso.
3. La presencia de llanuras de inundación produce un acortamiento en las longitudes de los perfiles y un desplazamiento hacia aguas abajo del punto terminal del remanso.

En muchos casos, es conveniente definir el punto terminal del remanso en términos de los requerimientos del problema dado. Por ejemplo, el punto terminal puede definirse como el punto en el cual la sobreelevación de la superficie del agua empieza a causar daños.

Cálculo de gastos

Cuando un canal abierto se emplea para conectar dos vasos, se debe considerar la posibilidad de que el gasto en este canal se vea afectado por la interacción de fenómenos locales y el perfil de flujo gradualmente variado. Nótese que este problema ha sido tratado previamente por Bakhmeteff (1932), Chow (1959), y Henderson (1966), y que el sistema de clasificación desarrollado por Bakhmeteff es el que se empleará aquí. El sistema de clasificación se basa en el comportamiento de tres variables críticas: 1) el tirante en la entrada del canal, y_1, 2) el tirante en la salida del canal y_2, y 3) el gasto en el canal Q. Estas variables se describen esquemáticamente en la figura 6.12. Basándose en el comportamiento de estas tres variables, se pueden identificar los siguientes casos:

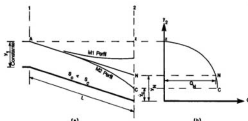


FIGURA 6.12 Gasto en el canal para y_1 = constante, pendiente suave.

Caso I (y_1 = *constante*)

Para y_1 constante, se pueden presentar varias condiciones de gasto. Primero, si $y_1 = y_N = y_2$, el flujo en el canal es uniforme y el gasto se puede calcular con la fórmula de Manning. Esta situación se representa en la figura 6.12*a* por la línea *AN*, y el gasto correspondiente se representa en la figura 6.12*b* por el punto *N*.

Segundo, si $y_2 = y_c$, el gasto del canal es el máximo posible (línea *AC* en la figura 6.12*a* y el punto *C* en la figura 6.12*b*). Nótese que si $y_2 < y_c$, entonces el canal termina en una caída libre, pero el gasto no excede el valor representado por el punto *C* en la figura 6.12*b*.

Tercero, si $y_2 > y_N$, entonces el perfil es una curva M1. Para que se presente esta situación, se deben satisfacer la siguiente condición: $y_N < y_2 < y_z$. En este momento la longitud del perfil M1 es de crucial importancia. Si y_1 es constante, la longitud del perfil M 1, L', no puede exceder a L; aunque si puede ser menor a L. En este último caso se le denomina al canal como largo y se dice que la curva M1 se ha "agotado"; *i.e.*, el gasto en la estación de aguas arriba no se afecta por y_2 y el tirante en la sección inicial es el normal. Si $L' = L$, entonces el gasto en el canal es menor que el gasto normal.

Cuarto, si $y_c < y_2 < y_N$, se tiene un perfil M2 en el canal y las relaciones para el gasto se pueden tratar en la misma forma que se hizo para el caso del perfil M1.

Caso II (y_2 = *constante*)

Para una y_2 constante, se pueden presentar las mismas situaciones que las estudiadas para el caso I. Primero, si $y_1 = y_N = y_2$, el flujo se presenta con el tirante normal y el gasto es el gasto normal (Fig. 6.13*a* y *b*).

Segundo, el gasto máximo se presenta cuando el tirante y_1 corresponde al gasto crítico de la sección 2. Nótese que este valor de y_1 es el tirante máximo que puede presentarse dado que cualquier aumento de y_1 necesitaría de un aumento correspondiente de y_2.

Tercero, cuando $y_1 < y_N$ se presenta un perfil M1, y el gasto es menor que el que se tendría para un tirante normal.

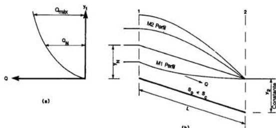


FIGURA 6.13 Gasto en el canal para y_2 = constante, pendiente suave.

Cuarto, para $y_1 > y_N$ pero menor que el tirante que causaría el gasto crítico, se presenta un perfil M2. En este caso el gasto sería mayor que el normal pero menor que el máximo.

Caso III (Q = *constante*)

Para un canal con gasto constante, se permite que fluctúen los tirantes y_1 y y_2. La primera posibilidad es que $y_2 = y_N = y_1$, y el gasto se puede encontrar con la ecuación de Manning, línea *AN* en la figura 6.14.

Segundo, para posiciones de la superficie del agua sobre la línea *AN*, se presenta un perfil M1. El límite superior obvio ocurre cuando $y_2 = y_1 + S_oL$. Nótese que a medida que se llega a esta situación límite, disminuyen conjuntamente las diferencias de elevación entre los vasos y las velocidades; aunque, debido a que las áreas de flujo aumenta, el gasto se puede mantener constante.

Tercero, para posiciones de las superficies del agua debajo de *AB* se presenta un perfil M2. El tirante mínimo ocurre cuando $y_2 = y_c$.

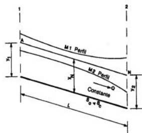


FIGURA 6.14 Descarga en el canal para Q = constante, pendiente suave.

La aplicación de estos principios bastantes abstractos se examina mejor a través de un ejemplo.

EJEMPLO 6.11

Un canal rectangular de 12.0 m (39 ft) lleva agua desde un vaso cuya elevación superficial es de 3.0 m (9.8 ft) sobre el fondo del canal en la salida del vaso. A una distancia de 1000 m (3280 ft) aguas abajo del vaso el canal se contrae a un ancho de 7.3 m (24 ft). Si $n = 0.02$ y $S = 0.001$, determínese el gasto que se extrae del vaso.

Solución

La solución de este problema requiere de un número de suposiciones que serán aceptadas o rechazadas basándose en los cálculos. Por ende:

1. Supóngase que la contracción no es lo bastante fuerte para producir una reducción en el gasto. Bajo este supuesto, el flujo en el canal es uniforme, y la solución se encuentra calculando las condiciones de flujo uniforme sobre un rango de tirantes hasta que la energía específica en el canal coincida con la del inicio del canal. Los cálculos se resumen en la tabla 6.18 donde

$$\overline{u} = \frac{\phi\sqrt{s}}{n} R^{2/3} = \frac{\sqrt{0.001}}{0.020} R^{2/3} = 1.58R^{2/3}$$

A partir de los resultados resumidos en esta tabla, se determina que el gasto sin restricciones del canal es de 75.8 m³/s (2680 ft³/s). Entonces con esta limitante

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{75.8}{7.3} = 10.4 \text{ (m}^3\text{/s)/m [112 (ft}^3\text{/s)/ft]}$$

y para este valor de q el tirante crítico es, de la ecuación (2.2.6),

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{10.4^2}{9.8}\right)^{1/3} = 2.22 \text{ m (7.28 ft)}$$

y la energía específica crítica de la ecuación (2.2.8) es

$$E_c = 1.5y_c = 1.5(2.22) = 3.33 \text{ m (10.9 ft)}$$

la cual es mayor que la disponible aguas arriba si el flujo fuese uniforme. Por lo tanto, se concluye que la contracción estrangula el gasto y el gasto en el canal no puede ser uniforme. La pregunta que se presenta ahora es si el perfil M1 causado por la contracción influye en el gasto.

2. Si se supone que el gasto del vaso no se ve afectado por la contracción, entonces el tirante aguas arriba de la contracción se encuentra a partir de

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = y + \frac{(75.8/12)^2}{2(9.8)y^2} = y + \frac{2.04}{y^2} = 3.33 \text{ m (10.9 ft)}$$

donde se supone que no se tiene ninguna pérdida de energía en la entrada a la contracción. Al resolver esta ecuación por tanteos resulta que $y = 3.15$ m (10.3 ft). Con esto se puede estimar el perfil de flujo gradualmente variado aguas arriba a partir de un tirante inicial, *e.g.*, ejemplo 6.1. Los resultados de este análisis se resumen en la tabla 6.18*a*. Este análisis demuestra que para $Q = 75.8$ m³/s (2680 ft³/s) el perfil de flujo gradualmente variado se extiende más de 1500 m (4920 ft) aguas arriba de la entrada al canal. Por ende, se concluye que la contracción de aguas abajo controla el flujo en el canal.

3. Debido a que la contracción a 1000 m (3280 ft) aguas abajo del vaso afecta el gasto, se debe determinar un nuevo gasto de tanteo; *i.e.*, se debe determinar un valor de Q que produzca un valor de E en el vaso de 3.0 m (9.8 ft). Por interpolación en la tabla 6.18, se estima que el valor de E en el vaso es de 3.12 m (10.2 ft) para $Q = 75.8$ m³/s (2680 ft³/s); por lo que, el valor correcto se erró por 0.12 m (0.39 ft). El valor obvio de Q para un segundo tanteo es el que produzca una $E = 0.12$ m (0.39 ft) menor que la dada por el gasto estimado en la entrada de la contracción o

$$E_c = 3.33 - 0.12 = 3.21 \text{ m (10.5 ft)}$$

Con este valor de E_c

$$y_c = \tfrac{2}{3}E_c = \tfrac{2}{3}(3.21) = 2.14 \text{ m (7.02 ft)}$$

y $$u_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9.8(2.14)} = 4.58 \text{ m/s (15.0 ft)}$$

Entonces

$$Q = u_c y_c b = 4.58(2.14)(7.3) = 71.6 \simeq 72 \text{ m}^3\text{/s (2540 ft}^3\text{/s)}$$

El tirante inmediatamente aguas arriba de la contracción se estima con una solución por tanteos de

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = y + \frac{1.84}{y^2} = 3.21 \text{ m (10.5 ft)}$$

o $y = 3.0$ m (9.8 ft). El perfil de flujo gradualmente variado para $Q = 72.0$ m³/s (2540 ft³/s) se estima en la tabla 6.18*b*. En este caso el perfil se termina o "agota" antes de que se llegue al vaso. Por lo tanto, se concluye que el gasto correcto para este caso se presenta entre los 75.8 m³/s (2680 ft³/s) y 72.0 m³/s (2540 ft³/s). Se obtiene

TABLA 6.18 Datos para el ejemplo 6.11

Resumen de los cálculos para la determinación del tirante normal en el ejemplo 6.11

y, m (1)	A, m² (2)	P, m (3)	R, m (4)	$\bar{u}$, m/s (5)	F (6)	Q, m³/s (7)	$\bar{u}^2/2g$, m (8)	E, m (9)
2	24	16	1.5	2.1	0.47	50.4	0.22	2.22
3	36	18	2.0	2.5	0.46	90.0	0.32	3.32
2.5	30	17	1.8	2.3	0.46	69.0	0.27	2.77
2.7	32	17.4	1.84	2.47	0.46	75.8	0.29	2.99

(a) Cálculo del perfil de flujo gradualmente variado, ejemplo 6.11, Q = 75.8 m³/s

y, m (1)	A, m² (2)	P, m (3)	R, m (4)	$\bar{u}$, m/s (5)	$\frac{\bar{u}^2}{2g}$, m (6)	E, m (7)	$\frac{n^2\bar{u}^2}{R^{4/3}}$ (8)	$\left(\frac{n^2\bar{u}^2}{R^{4/3}}\right)_m$ (9)	$S_o - \left(\frac{n^2\bar{u}^2}{R^{4/3}}\right)_m$ (10)	ΔE, m (11)	Δx, m (12)	$\Sigma\Delta x$, m (13)
3.15	37.8	18.3	2.07	2.01	0.21	3.36	0.000614					
								0.000661	0.000339	0.13	383	
3.0	36.0	18.0	2.00	2.11	0.23	3.23	0.000708					383
								0.000807	0.000193	0.21	1090	
2.75	33.0	17.5	1.89	2.30	0.27	3.02	0.000906					1470

(b) **Cálculo del perfil de flujo gradualmente variado, ejemplo 6.11, $Q = 72\ m^3/s$**												
3.0	36.0	18.0	2.00	2.00	0.20	3.20	0.000635					
								0.000667	0.000333	0.08	240	
2.9	34.8	17.8	1.96	2.07	0.22	3.12	0.000699					240
								0.000736	0.000264	0.09	341	
2.8	33.6	17.6	1.91	2.14	0.23	3.03	0.000773					581
								0.000794	0.000206	0.04	194	
2.75	33.0	17.5	1.89	2.18	0.24	2.99	0.000814					775
(c) **Cálculo del perfil de flujo gradualmente variado, ejemplo 6.11, $Q = 73.3\ m^3/s$**												
3.09	37.1	18.1	1.98	1.98	0.20	3.29	0.000614					
								0.000670	0.000330	0.16	485	
2.90	34.8	17.8	1.96	2.11	0.23	3.13	0.000726					485
								0.000765	0.000235	0.09	382	
2.80	33.6	17.6	1.91	2.18	0.24	3.04	0.000804					867
								0.000825	0.000175	0.04	224	
2.75	33.0	17.5	1.89	2.22	0.25	3.00	0.000845					1090

una nueva estimación para el gasto interpolando en las tablas 6.18*a* y *b* de 73.3 m³/s (2590 ft³/s). Entonces

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{73.3}{7.3} = 10.0\ (\text{m}^3/\text{s})/\text{m}\ [108\ (\text{ft}^3/\text{s})/\text{ft}]$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{10.0^2}{9.8}\right)^{1/3} = 2.17\ \text{m}\ (7.12\ \text{ft})$$

$$E_c = 1.5y_c = 1.5(2.17) = 3.26\ \text{m}\ (10.7\ \text{ft})$$

y se estima el tirante justo aguas arriba de la contracción con

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = y + \frac{(73.3/12)^2}{2(9.8)y^2} = y + \frac{1.90}{y^2} = 3.26\ \text{m}\ (10.7\ \text{ft})$$

por tanteos o $y = 3.09$ m (10.0 ft). La validez de este conjunto de parámetros se confirma en la tabla 6.18*c*.

El problema del gasto también puede presentarse en canales con pendientes pronunciadas; i.e., canales con pendientes supercríticas. Si la pendiente no es lo suficientemente pronunciada para que el flujo sea no permanente, entonces el gasto se rige por la sección crítica de aguas arriba y puede calcularse fácilmente. El perfil de la superficie del agua en este canal está regido por la elevación de esta superficie aguas abajo. Primero si la elevación del líquido aguas abajo es menor que el tirante en la estación 2, se tiene una caída libre (Fig. 6.15). En esta situación, el flujo atraviesa el tirante crítico en el punto *C* y se aproxima al tirante normal por medio de un perfil S2. Segundo, si la elevación aguas abajo del agua es mayor que el tirante en la estación 2, la curva S2 termina en un salto hidráulico. El flujo aguas arriba del salto no se ve afectado por la elevación de la superficie del líquido aguas abajo. Tercero, a medida que aumenta la elevación de la superficie líquida de aguas abajo, la ubicación del salto se mueve hacia aguas arriba hasta que se llega al punto

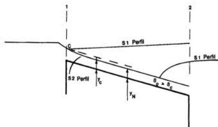


FIGURA 6.15 Descarga en el canal para gasto supercrítico.

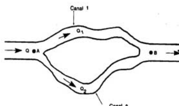


FIGURA 6.16 Esquema del flujo a través de una isla.

C. Si la elevación de la superficie del líquido aguas abajo aumenta sobre esta elevación, el flujo se ve afectado por la elevación de aguas abajo debido a que se presentaría un salto hidráulico ahogado.

Flujo a través de islas

En canales naturales, pueden existir tramos en los cuales una isla larga divide el flujo en dos canales (Fig. 6.16). Si el flujo es normal, entonces se pueden estimar Q_1 y Q_2 a partir de las siguientes ecuaciones:

$$Q = Q_1 + Q_2$$
$$Q_1 = K_1\sqrt{S_1}$$
$$Q_2 = K_2\sqrt{S_2}$$

Aunque, si el flujo es gradualmente variado, el procedimiento de solución es más complejo.

Si el flujo es gradualmente variado y subcrítico, el cálculo empieza en la sección *B*. Por conveniencia, se define a E_1^A = elevación de la superficie del agua en el punto *A* estimándola a partir del punto *B* y procediendo hacia el punto *A* por medio del canal 1 y E_2^A = elevación de la superficie del agua en el punto *A* por medio del canal 2. Los gastos Q_1 y Q_2, se suponen de tal manera que su suma total sea *Q*.

Entonces empleando los métodos de la sección 6.3, se estiman E_1^A y E_2^A para los gastos Q_1 y Q_2 respectivamente. Si $E_1^A = E_2^A$, como debería de ser si son correctos los valores supuestos de Q_1 y Q_2, entonces la solución ha sido determinada. En general se requiere de varios tanteos. Se pueden emplear dos gráficas para hacer más expedita la solución (Fig. 6.17). En la figura 6.17*a*, se grafica a E_1^A en función de E_2^A. En esta figura, se traza una línea a 45°, y se estima la elevación correcta del punto *A* con la intersección de esta línea con la curva de E_1^A contra E_2^A (punto *C*). Después se emplea una curva auxiliar (Fig. 6.17*b*) de E_1^A contra *Q* para estimar Q_1.

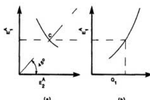


FIGURA 6.17 Solución gráfica del flujo a través de una isla.

Si el flujo en el canal es supercrítico, entonces la solución procede de la misma forma pero empieza en el punto A. Además nótese que este procedimiento también sirve para extender el perfil de flujo gradualmente a través de la isla.

Aunque el procedimiento descrito arriba provee de un método adecuado para la determinación del flujo alrededor de una sola isla, no es una técnica que pueda extenderse para determinar el flujo alrededor de un grupo de islas. Además la técnica anterior no toma en cuenta los cambios de forma en el canal a medida que éste da vuelta por la isla ni las pérdidas menores asociadas con estos cambios. Wylie (1972) notó que el flujo alrededor de las islas puede determinarse eficientemente utilizando un sistema de nodos conectados. Por ejemplo, la situación descrita en la figura 6.16 se muestra con la notación de nodos y conectores en la figura 6.18. La solución del sistema de nodos y conectores descansa sobre dos principios:

1. Cada nodo tiene una energía total asociada a éste la cual es común a cada elemento o conector que termina en el nodo.
2. Se debe satisfacer la ecuación de continuidad en cada nodo.

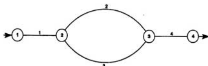


FIGURA 6.18 Representación por nodos y conectores del flujo a través de una isla (véase Fig. 6.16).

El tipo más común de conector es un canal sin pérdidas menores. En este caso, la ecuación de energía para el conector del nodo de aguas arriba i con el de aguas abajo j es

$$E_i = E_j + \overline{S}_f L_k$$

donde L_k = longitud del conector k, $\bar{S}_f$ = pendiente media de la línea de energía entre los nodos i y j,

$$E = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{6.5.1}$$

y z = elevación del fondo del canal sobre un plano horizontal de comparación. Aunque se puede emplear cualquiera de las definiciones anteriores para $\bar{S}_f$ [ecuaciones (6.3.55) a (6.3.62)], la expresión para la pendiente media de fricción, la ecuación (6.3.35), es la que se empleará aquí o

$$E_i = E_j + \left(\frac{S_{ki} + S_{kj}}{2}\right) L_k \tag{6.5.2}$$

La pendiente de la línea de energía comúnmente se determina con la ecuación de Manning [ecuación (4.2.6)] o

$$S = \frac{Q^2 n^2 P^{4/3}}{\phi^2 A^{10/3}}$$

Al combinar esta expresión para S y la ecuación (6.5.2) se obtiene una ecuación para el gasto en conector k o

$$Q_k = \frac{\phi}{n}\left[\frac{2(E_i - E_j)}{L_k}\right]^{1/2}\left[\frac{P_{ki}^{4/3}}{A_{ki}^{10/3}} + \frac{P_{ji}^{4/3}}{A_{ki}^{10/3}}\right]^{-1/2} \tag{6.5.3}$$

Aunque la ecuación (6.5.3) teóricamente es aplicable sólo a canales prismáticos, puede aplicarse con seguridad a canales moderadamente no prismáticos. Aunque, si se presentase un cambio abrupto en la sección transversal del canal, puede ser necesario incluir un conector que tome en cuenta las pérdidas locales o menores asociadas con el cambio. King y Brater (1963) sugieren que la ecuación de energía de una pérdida local en flujo subcrítico es

$$E_i = E_j + \frac{K_k Q_k^2}{2g}\left(\frac{1}{A_{ki}^2} - \frac{1}{A_{kj}^2}\right) \tag{6.5.4}$$

donde K = un coeficiente de pérdida. Reordenando esta ecuación se obtiene

$$Q_k = [2g(E_i - E_j)]^{1/2}\left[K_k\left(\frac{1}{A_{ki}^2} - \frac{1}{A_{kj}^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{6.5.5}$$

Cuando las ecuaciones del elemento definidas arriba se combinan con la continuidad escrita en cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas no lineales que debe resolverse. La ecuación de continuidad en cada nodo está dada por

$$F_i = \sum_{k=1}^{M} Q_k + Q_{Ni} = 0 \tag{6.5.6}$$

donde M es el número de conectores para el nodo i y Q_{Ni} = gasto adicionado en el nodo. Al aplicar la ecuación (6.5.6) al nodo 2 en la figura 6.18 se obtiene

$$F_2 = Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_{N2} = 0 \tag{6.5.7}$$

Entonces, dado que $Q_{N2} = 0$, al sustituir las ecuaciones de gasto de los conectores en la ecuación (6.5.7) resulta

$$\begin{aligned} F_2 = \frac{\phi}{n_1}\left[\frac{2(E_1 - E_2)}{L_1} \Big/ \left(\frac{P_{11}^{4/3}}{A_{11}^{10/3}} + \frac{P_{12}^{4/3}}{A_{12}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \\ - \frac{\phi}{n_2}\left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_2} \Big/ \left(\frac{P_{22}^{4/3}}{A_{22}^{10/3}} + \frac{P_{23}^{4/3}}{A_{23}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \\ - \frac{\phi}{n_3}\left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_3} \Big/ \left(\frac{P_{33}^{4/3}}{A_{33}^{10/3}} + \frac{P_{32}^{4/3}}{A_{32}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{6.5.8}$$

En este momento debe aclararse que los subíndices de las variables F y E se refieren al nodo, los subíndices de n y L al conector, y en P y A el primer subíndice se refiere al conector mientras que el segundo se refiere al nodo. Para los otros nodos del sistema mostrado en la figura 6.18, las ecuaciones correspondientes son

Nodo 1

$$F_1 = Q_{N1} - Q_1 = 0$$

En este caso, $Q_{N1} \neq 0$ y sustituyendo la ecuación (6.5.3) se obtiene

$$F_1 = Q_{N1} - \frac{\phi}{n_1}\left[\frac{2(E_1 - E_2)}{L_1} \Big/ \left(\frac{P_{11}^{4/3}}{A_{11}^{10/3}} + \frac{P_{12}^{4/3}}{A_{12}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \tag{6.5.9}$$

Nodo 3

$$F_3 = Q_2 + Q_3 - Q_4 + Q_{N3} = 0$$

y $Q_{N3} = 0$. Por ende,

$$\begin{aligned} F_3 = \frac{\phi}{n_2}\left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_2} \Big/ \left(\frac{P_{22}^{4/3}}{A_{22}^{10/3}} + \frac{P_{23}^{4/3}}{A_{23}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \\ + \frac{\phi}{n_3}\left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_3} \Big/ \left(\frac{P_{33}^{4/3}}{A_{33}^{10/3}} + \frac{P_{32}^{4/3}}{A_{32}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \\ - \frac{\phi}{n_4}\left[\frac{2(E_3 - E_4)}{L_4} \Big/ \left(\frac{P_{44}^{4/3}}{A_{44}^{10/3}} + \frac{P_{43}^{4/3}}{A_{43}^{10/3}}\right)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

En un problema típico de flujo gradualmente variado, las incógnitas serían con seguridad Q_2, Q_1, E_1, E_2, y E_3. El tirante y el gasto en el nodo 4 serían generalmente conocidos y, por ende, E_4. También, dado que por definición el

flujo es peramenente, $Q_{N1} = Q_{N2}$. Ya que el sistema de ecuaciones que rigen este problema es no lineal, no es posible encontrar una solución directa; aunque, se puede llevar a cabo una solución por tanteos. Los pasos para obtener una solución son:

1. Se suponen valores de tanteo de E_3, E_2, y E_1. La velocidad de convergencia del procedimiento de solución por tanteos depende de la precisión de los valores supuestos inicialmente. Wylie (1972) empezó sus soluciones suponiendo una energía constante en todo el sistema.
2. Con los valores supuestos de E_3, E_2, y E_1, se emplean las ecuaciones (6.5.1) y (6.5.3) para determinar los valores correspondientes de los tirantes y gastos de cada elemento.
3. Se emplean ahora las ecuaciones (6.5.8) a (6.5.10) para calcular los valores de F_1, F_2, y F_3. Si los valores de estas funciones con cero o cumplen con un criterio predeterminado de error, entonces se ha completado la solución y los valores supuestos de E_1, E_2, y E_3 son los correctos. Si este no fuera el caso, los valores de E_1, E_2, y E_3 se corrigen y se repiten los pasos 2 y 3 hasta que se cumpla el criterio de error.

Wylie (1972) empleó una técnica de iteración tipo Newton-Raphson para lograr la solución.

Es obvio que el método del nodo-y-conector para determinar el flujo alrededor de una isla solitaria es no sólo un procedimiento eficiente comparado con el método descrito previamente a no ser de que se disponga de programas de computadoras para lograr la solución. La fuerza de esta técnica resulta más evidente cuando se consideran problemas más complicados. En la figura 6.19*a*, se muestra un sistema que consiste de dos islas, dos fuentes de gasto, y una sola salida de gasto. En la figura 6.19*b*, el sistema se muestra como una serie de conectores y nodos. Aunque se necesitan mucho más ecuaciones para describir este sistema, la metodología desarrollada por Wylie es aplicable. Sería también erróneo suponer que esta técnica de nodos-y-conectores es aplicable sólo a flujo alrededor de islas. Esta técnica también puede aplicarse a el flujo en canales abiertos en un sistema de alcantarillas pluviales.

BIBLIOGRAFÍA

Anonymous, "HEC-2, Water Surface Profiles, Computer Program 723-X6-L202A, Users Manual," U.S. Hydrologic Engineering Center, Davis, Calif., August 1979.

Bakhmeteff, B. A., *Hydraulics for Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1932, pp. 143–215

Chow, V. T., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

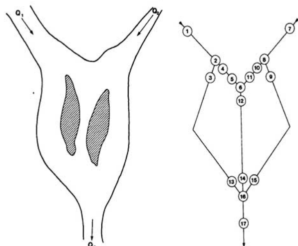


FIGURA 6.19 (*a*) Flujo a través de dos islas. (*b*) Diagrama esquemático de (*a*) con inclusión de pérdidas locales en los cruces.

Escoffier, F. F., "Graphic Calculation of Backwater Eliminates Solution by Trial," *Engineering News-Record*, vol. 136, no. 26, June 27, 1946, p. 71.

Ezra, A. A., "A Direct Step Method for Computing Water Surface Profiles," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 119, 1954, pp. 453–462.

Feldman, A. D., "HEC Models for Water Resources Simulation: Theory and Experience," *Advances in Hydroscience*, vol. 12, 1981, pp. 297–423.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, The Macmillan Company, New York, 1966.

Hinds, J., "Side Channel Spillways: Hydraulic Theory, Economic Factors, and Experimental Determination of Losses," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 89, 1926, pp. 881–927.

Keulegan, G. H., "Determination of Critical Depth in Spatially Variable Flow," *Proceedings of the 2d Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, Ohio State University, Columbus, 1952.

Kiefer, C. J., and Chu, H. H., "Backwater Functions by Numerical Integration," *Transactions, American Society of Civil Engineers*, vol. 120, 1955, pp. 429–442.

King, H. W., and Brater, E. F., "Open Channels with Nonuniform Flow," *Handbook of Hydraulics*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

Reed, J. R., and Wolfkill, A. J., "Evaluation of Friction Slope Models," *Rivers '76 Symposium on Inland Waterways for Navigation, Flood Control, and Water Diversions*, Colorado State University, Ft. Collins, 1976, pp. 1159–1178.

Shearman, J. O., "Computer Applications for Step Backwater and Floodway Analyses," U.S. Geological Survey, Open File Report 76-499, Washington, 1976.

Shearman, J. O., "User's Guide, Step Backwater and Floodway Analyses, Computer Program J635," U.S. Geological Survey, Water Resources Division, Reston, Va., May 1977.

Wylie, E. B., "Water Surface Profiles in Divided Channels," *Journal of Hydraulic Research* (International Association for Hydraulic Research), vol. 10, no. 3, 1972, pp. 325–341.

Yen, B. C., and Wenzel, H. G., Jr., "Dynamic Equations for Steady Spatially Varied Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY3, March 1970, pp. 801–814.

SIETE



Diseño de Canales

SINOPSIS

En este capítulo se considera y demuestra el diseño de canales revestidos, no revestidos y revestidos con pasto junto con los procedimientos de cálculo para cada tipo de canal.

Se presenta, para los canales revestidos, rectangulares, trapeciales y triangulares una técnica para minimizar los costos del material de revestimiento. Esta técnica es particularmente útil para canales con secciones muy alargadas donde los procedimientos de construcción se pueden orientar hacia la minimización de los costos de material o en situaciones en las que los costos de mano de obra son pequeños en relación a los de los materiales de revestimientos.

Se analiza, para el caso de los canales no revestidos, técnicas basadas en los principios de velocidad máxima y del inicio del movimiento de fondo, pero se recomienda un procedimiento basado en el principio de la fuerza tractiva. Usando el principio de la fuerza tractiva, se desarrollan las ecuaciones que definen la sección hidráulicamente estable y se demuestra su aplicación con un ejemplo. Por último, se tratan métodos empíricos y teóricos para la estimación de la infiltración en un canal no revestido.

En la última sección de este capítulo, se estudia el método del U.S. Soil Conservation Service (Servicio de Conversión de Suelos de Estados Unidos) para el diseño de canales revestidos con pasto. Además se analiza un procedimiento para el diseño de canales revestidos con pasto con su centro revestido por grava.

7.1 INTRODUCCIÓN

Un tema de capital importancia en el área de la hidráulica de canales es el diseño de canales capaces de transportar agua entre dos puntos de una forma segura a un costo óptimo. Aunque economía, seguridad y estética siempre se deben considerar, en este capítulo sólo se tratarán los aspectos hidráulicos del diseño de canales. Además, este estudio se limitará al diseño de canales para flujo uniforme, y de éstos sólo tres serán tratados: 1) revestidos o no erosionables; 2) no revestidos, de tierra o erosionables; y 3) revestidos, por pasto. Al examinar los procedimientos de diseño para éstos tipos de canales, se encuentran algunos conceptos básicos comunes a los tres, los cuales se tratarán primero.

A partir de la ecuación de Manning y Chezy, se desprende que la capacidad de gasto de un canal aumenta al incrementarse el radio hidráulico o disminuir el perímetro mojado. Por lo tanto, desde el punto de vista de la hidráulica, hay para todas las secciones transversales de una forma geométrica determinada un área óptima para el conjunto de dimensiones de la forma dada. De todas las posibles secciones transversales, la mejor sección hidráulica dada por el semicírculo, ya que, para un área dada, tiene el menor perímetro moja-

do. Las proporciones de la sección hidráulica óptima para una forma geométrica dada se pueden derivar fácilmente (véase a Streeter y Wylie, 1975; los elementos geométricos de éstas secciones se encuentran en la tabla 7.1). Nótese, que desde el punto de vista práctico la sección óptima hidráulica no es necesariamente la más económica. En la práctica se deben considerar los siguientes factores:

1. La óptima sección hidráulica minimiza el área requerida para pasar un gasto dado; aunque a veces, el área de excavación necesaria para lograr el área de flujo requerida por la óptima sección hidráulica puede ser significativamente mayor si se considera la remoción del volumen sobrante.
2. Puede resultar imposible la construcción de una óptima sección hidráulica estable con el material natural disponible. Al tener que revestir el canal el costo del revestimiento puede ser comparable al de la excavación.
3. El costo de la excavación no depende solamente de la cantidad de material que se debe remover, sino también de la facilidad de acceso al sitio y el costo del material desechado producto de la excavación.
4. La pendiente del canal en muchos casos también se debe considerar como una variable ya que no está determinada completamente por las condiciones topográficas. Por ejemplo, aunque una pendiente suave pueda requerir de mayor sección transversal para pasar un gasto dado, el costo de la excavación del sobrante se puede reducir.

El término *velocidad mínima permisible* se refiere a la menor velocidad que no permite la sedimentación y crecimiento vegetal. Generalmente una velocidad de 2 a 3 ft./s (0.61 a 0.91 m/s) previene la sedimentación cuando la concen-

TABLA 7.1 Elementos geométricos de las secciones hidráulicas óptimas

Sección transversal	Área A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superficial T	Tirante hidráulico D
Trapecial: medio hexágono	$1.73\ y^2$	$3.46\ y$	$0.500\ y$	$2.31\ y$	$0.750\ y$
Rectángulo: medio cuadrado	$2\ y^2$	$4\ y$	$0.500\ y$	$2y$	y
Triángulo: medio cuadrado	y^2	$2.83\ y$	$0.354\ y$	$2y$	$0.500\ y$
Semicírculo	$0.500\ \pi y^2$	πy	$0.500\ y$	$2y$	$0.250\ \pi y$
Párabola: $T = 2\sqrt{2}y$	$1.89\ y^2$	$3.77\ y$	$0.500\ y$	$2.83\ y$	$0.667\ y$
Catenaria hidráulica	$1.40\ y^2$	$2.98\ y$	$0.468\ y$	$1.92\ y$	$0.728\ y$

TABLA 7.2 Taludes recomendados para canales de varios tipos de materiales (Chow, 1959)

Material	Talud
Roca	casi vertical
Suelos orgánicos	¼:1
Arcilla dura o tierra con revestimiento de concreto	½:1 to 1:1
Tierra con revestimiento de piedra o tierra para grandes canales	1:1
Arcilla firme o tierra para pequeñas zanjas	1½:1
Tierra arenosa suelta	2:1
Limos arenosos o arcilla porosa	3:1

tración de finos es pequeña. Una velocidad de 2.5 ft./s (0.76 m/s) es por lo general suficiente para prevenir el crecimiento de vegetación que podría afectar en forma significativa el flujo del canal. Se debe tomar en cuenta que estos valores son en el mejor de los casos generalizados y que en algunos casos sólo son muy malas estimaciones de las velocidades mínimas permisibles reales. Por ejemplo, desde hace tiempo, Fortier y Scobey (1926) observaron que los canales de aguas turbias casi nunca se ven afectados por crecimiento vegetal mientras que en los canales con aguas claras, algunas especies de plantas se desarrollan a velocidades superiores a las que producen erosión en el canal. El diseñador que obtiene la mayor velocidad permisible con la que el canal no se erosiona habrá hecho todo lo que puede para prevenir la sedimentación y crecimiento vegetal.

En la mayor parte de los problemas de diseño, la pendiente del canal se determina por la topografía, la carga requerida para pasar el gasto y el propósito a que se destina el canal. Por ejemplo, en un canal para una planta hidroeléctrica, es deseable obtener una carga alta en el punto de descarga, por lo que se debe usar una pendiente mínima.

Los taludes del canal dependen principalmente de las propiedades mecánicas a través de los cuales se excava el canal. Desde un punto de vista práctico, los taludes deben ser lo más pronunciado posible para minimizar la cantidad de tierra requerida. En la tabla 7.2 se sugieren los taludes para canales excavados de varios tipos de materiales. Estos valores se deben usar para un diseño preliminar. En cortes profundos, los taludes son normalmente más pronunciados sobre la superficie del agua que debajo de ésta. En zanjas pequeñas de drenaje, los taludes son mayores que los de un canal de irrigación del mismo material. En muchos casos, los taludes quedan determinados por factores económicos de la construcción. Respecto a esto último, los siguientes comentarios generales son pertinentes:

1. En muchos canales de tierra no revestidos en proyectos de irrigación federal, los taludes son de 1.5:1; aunque taludes hasta de 1:1 se han usado cuando el recorrido del canal es en material cohesivo.
2. En canales revestidos, los taludes son generalmente mayores que en uno no revestido. Si se reviste con concreto taludes mayores de 1:1 requieren comúnmente de cimbras, y con taludes mayores que 0.75:1 los revestimientos deben diseñarse para aguantar el empuje del suelo. Algunos tipos de revestimientos requieren de taludes igual de suaves que los usados para canales no revestidos.
3. Taludes en material de rocas pueden ser verticales si se desea.

El término *bordo libre* se refiere a la distancia vertical entre la parte superior del canal o de su recubrimiento y la de la superficie libre del agua prevaleciente cuando el canal trabaja con el gasto de diseño en flujo normal. Su propósito es prevenir el derrame sobre el revestimiento o el canal por fluctuaciones en la superficie del agua causadas por: 1) oleaje producido por el viento, 2) mareas, 3) saltos hidráulicos, 4) sobreelevación del agua ocasionada por su paso por curvas a alta velocidad, 5) la intercepción del escurrimiento debido a tormentas por el canal, 6) la ocurrencia de tirantes mayores que los de diseño debidos a la sedimentación o a un aumento en el factor de fricción, o 7) no operación temporal del sistema de canales

El bordo libre asociado al revestimiento y a la parte superior del canal se puede estimar con las curvas empíricas dadas en la figura 7.1. En general, estas curvas son aplicables a canales revestidos con una superficie dura, una membrana, o tierra compacta con un bajo coeficiente de permeabilidad. Para canales no revestidos, el bordo libre generalmente fluctúa entre 1 ft. (0.30 m) para pequeños canales laterales a 4 ft. (1.2 m) para canales con gasto de 3000 ft³/s (85 m³/s) con tirantes relativamente grandes (Chow 1959). Una estimación preliminar para estimar el bordo libre de canales no revestidos puede obtenerse mediante.

$$F = \sqrt{Cy} \tag{7.1.1}$$

donde F = bordo libre en ft.
y = tirante de diseño en ft.
C = un coeficiente que varía de 1.5 para Q = 20 ft.³/s (0.57 m³/s) a 2.5 para Q = 3000 ft³/s (85 m³/s)

Cuando se tiene flujo en una curva, se produce una sobreelevación en el talud exterior de ésta con una subelevación correspondiente en la parte interior. Al diseñar el canal se deben de estimar estos cambios en elevaciones. Si se supone que todo el flujo se mueve alrededor de la curva con una velocidad promedio $\bar{u}$, entonces

$$\Delta h = \frac{\bar{u}^2 b}{gR} \tag{7.1.2}$$

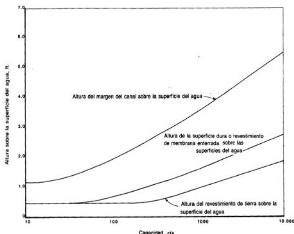


FIGURA 7.1 Bordo libre para las márgenes del canal y para superficies duras, membranas enterradas y revestimientos de tierra, U.S. Bureau of Reclamation *(Anónimo, 1963.)*

donde Δh = cambio de la elevación de la superficie libre a través del canal
b = ancho del canal
R = radio de giro de la curva al centro del canal

La ecuación (7.1.2) siempre subestima el valor de Δh debido a su suposición sobre la velocidad media. En algunos casos, esta ecuación puede subestimar por hasta un 50% (Houk, 1956). Si se aplica la segunda ley del movimiento de Newton a cada línea de corriente en su paso alrededor de la curva, se puede demostrar que el perfil transversal de la superficie del agua está dado por una curva con la siguiente forma

$$h = 2.3\frac{\overline{u}^2}{g}\log\frac{R_o}{R_i} \tag{7.1.3}$$

donde R_0 y R_i son los radios exteriores e interiores de la curva. Woodward (1920, 1941) supuso que la velocidad del flujo era cero en los taludes y que tenía una máxima u_M al centro del canal. Entre los taludes y el centro, la velocidad variaba en forma parabólica. Al aplicar la segunda ley de Newton a estas suposiciones se tiene,

$$h = \frac{u_M^2}{g}\left[\frac{20}{3}\frac{R}{b} - \frac{16R^3}{b^3} + \left(\frac{4R^2}{b^2} - 1\right)^2 \ln\left(\frac{2R+b}{2R-b}\right)\right] \tag{7.1.4}$$

De estas tres ecuaciones, la (7.1.4) da la mejor estimación del valor de Δh. Se tratará en una sección posterior del capítulo el tema de la sobreelevación en curvas con más detalle pero las ecuaciones anteriores son una buena base para diseñar preliminares.

No hay reglas fijas que determinen el máximo radio de curvatura en canales. Shurky (1950), encontró, usando resultados experimentales, que el efecto de las curvas es despreciable cuando el radio de curvatura al centro del canal era mayor que tres veces el ancho del fondo del canal. En la India, los radios mínimos de curvatura son por lo general mayores que los usados en Estados Unidos. Por ejemplo, algunos ingenieros hindues recomiendan un radio mínimo de 300 ft. (91 m) para canales con gastos menores de 10 ft.^{3}/s (0.30 m^3/s) a 5000 ft. (1500 m) para canales con gastos mayores a los 3000 ft.^{3}/s (85 m^3/s) (Houk, 1956).

El ancho de los taludes del canal por lo común se determinan con base en varias consideraciones que incluyen el tamaño del canal, la cantidad de material de excavación disponible para la construcción de los taludes, y la necesidad de caminos de mantenimiento. Cuando se necesitan caminos, los anchos superiores para canales revestidos y no revestidos son de 16 ft. (5 m) o más. A parte superior del talud se le da una pendiente hacia afuera del canal para que la lluvia no fluya hacia el canal. Los anchos de los taludes deben ser lo suficientemente grandes para proveer de estabilidad contra la presión del agua que conduce el canal y no permitir la infiltración del agua debajo del nivel del suelo a la pared exterior de los taludes.

7.2 DISEÑO DE CANALES REVESTIDOS

Los canales revestidos se construyen por las siguientes cinco razones primordiales:

1. Permitir el transporte de agua a altas velocidades a través de terreno con excavaciones profundas o difíciles en forma económica.
2. Permitir el transporte de agua a alta velocidad con un costo reducido de construcción.
3. Disminuir la infiltración, conservando el agua y reduciendo la sobrecarga en los terrenos adyacentes al canal.
4. Reducir el costo anual de operación y mantenimiento.
5. Asegurar la estabilidad de la sección transversal del canal.

El diseño de canales revestidos desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica es un proceso bastante elemental que consiste generalmente en dimensionar un tipo supuesto de sección transversal del canal. Algunas

TABLA 7.3 Secciones tipo de canales revestidos, seleccionados del oeste de Estados Unidos (Houk, 1956)

Canal	Proyecto	taludes	Tirante ft.	Ancho de de fondo (plantilla) ft.	Razón ancho/tirante	Velocidad media ft.	Gasto ft.³/s	Bordo libre ft.*
			Secciones revestidas de tierra					
Contra Costa	Central Valley	1¼:1	1.84	3	1.63	2.33	26	1.16
South Branch	Yakima	1¼:1	3.80	5	1.32	5.94	220	1.00
Ridge	Yakima	1¼:1	7.46	7	0.94	4.93	600	1.04
Heart Mountain	Shoshone	1¼:1	7.51	8	1.06	7.00	914	1.49
Kittitas Main	Yakima	1¼:1	8.99	11	1.22	6.63	1320	1.25
Black Canyon	Boise	1¼:1	9.39	12	1.28	4.86	1089	1.61
Ridge	Yakima	1¼:1	11.20	14	1.25	7.02	2200	1.80
All-American	All-American	1⅜:1	10.64	22	2.07	6.62	2800	2.25
Delta-Mendota	Central Valley	1½:1	16.56*	48	2.9	—	4600	—
			Secciones revestidas de roca					
Kittitas Main	Yakima	¼:1	9.00	14	1.56	7.65	1275	1.25
Main (gravity extension)	Minidoka	¼:1	13.80	20	1.45	8.20	2695	1.50
Gravity Main	Gila	¾:1	21.07	32	1.52	5.96	6000	—

* Hasta el borde superior del revestimiento

TABLA 7.4 Un procedimiento de diseño de canales revestidos

Paso	Procedimiento
1	Estímense el valor de n o C para el material de revestimiento dado
2	Calcúlese el factor de sección $AR^{2/3} = \frac{nQ}{\phi\sqrt{S}}$ $\phi = 1.49$ en unidades inglesas y 1 en unidades SI
3	Resuélvase la ecuación del factor de sección para y_N usando las expresiones para A y R (Tabla 1.1). En la figura 5.2 se encuentra un procedimiento de cálculo para la solución de la ecuación del factor de sección. *Nota:* este paso *puede* requerir suposiciones sobre los taludes, ancho de fondo, etc.
4	Si se requiere de la sección hidráulica óptima, calcúlese los parámetros del canal con la tabla 7.1; de otra forma calcúlese con la tabla 1.1 usando el y_N del paso 3.
5	Verifíquese: 1. La velocidad mínima permisible para agua que transporta sedimentos y para vegetación. 2. El número de Froude.
6	Estímese: 1. La altura requerida del revestimiento sobre la superficie del agua, figura 7.1. 2. El bordo libre requerido, figura 7.1.
7	Resuma sus resultados con un bosquejo dimensionado.

secciones típicas de canales revestidos usados en proyectos de irrigación en Estados Unidos se encuentran en la tabla 7.3 y una sección tipo del canal "All-American" se muestra en la figura 7.2. En Willison (1958) y anónimo (1963) se puede encontrar información sobre revestimientos. En la tabla 7.4

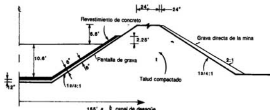


FIGURA 7.2 Sección tipo de revestimiento de concreto usada en el All-American Canal.

se recomienda un procedimiento en forma resumida. En esta tabla, se supone que el gasto de diseño Q_D, la pendiente S, el tipo de sección transversal, *e.g.*, trapecial, y el material de revestimiento fueron seleccionados con anterioridad al proceso de diseño.

EJEMPLO 7.1

Un canal trapecial se debe diseñar para un gasto de 400 ft.³/s (11 m³/s). El revestimiento del canal es de concreto acabado con llana de madera, y la pendiente es de 0.0016. Determínense las dimensiones adecuadas del canal.

Solución

Paso 1 Estímese la n de Manning.

$$n = 0.015 \qquad \text{(Tabla 4.8)}$$

Paso 2 Calcúlese el factor de sección.

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3}\sqrt{S}$$

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{1.49\sqrt{S}} = \frac{(0.015)400}{1.49\sqrt{0.0016}} = 100.7$$

Paso 3 Supóngase que $b = 20$ ft. (6.1 m) y $z = 2$. Resuélvase la ecuación del factor de sección (paso 2) para y_n.

$$y_n = 2.5 \text{ ft } (0.76 \text{ m})$$

Paso 4 Dado que no se requiere la sección hidráulica óptima, se omite este paso en la tabla 7.4.

Paso 5 Verifíquese la velocidad mínima permisible y el número de Froude.

$$A = (b + zy)y = [20 + 2(2.5)]2.5 = 62.5 \text{ ft}^2 \ (5.8 \text{ m}^2)$$

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{400}{62.5} = 6.4 \text{ ft/s } (2.0 \text{ m/s})$$

Esta velocidad debe prevenir el crecimiento vegetal y la sedimentación.

$$\mathbf{F} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gD}} = 0.78$$

Por consiguiente, es un flujo subcrítico.

Paso 6 a) Estímese la altura del revestimiento sobre la superficie libre del agua (Fig. 7.1) = 1.2 ft (0.37) m).

b) Estímese la altura del talud del canal sobre la superficie del agua (Fig. 7.1) = 2.9 ft (0.88 m).

Los resultados de este diseño se resumen en la figura 7.3

Un punto primordial en el diseño de canales revestidos es el costo del material de revestimiento y el desarrollo de las dimensiones del canal que minimicen este costo. El costo del revestimiento está en función del volumen de material de revestimiento el cual es a su vez función del espesor del revestimiento y de la magnitud del perímetro mojado. Si el canal se reviste con un material de espesor uniforme, entonces la solución que minimiza el costo de revestimiento para un canal con sección transversal de forma arbitraria está dada por la sección óptima hidráulica (Tabla 7.1). Aunque, si el espesor del revestimiento cambia con el perímetro, entonces este problema se complica bastante. Trout (1982) examinó el problema de la optimización del costo del revestimiento cuando éste no era el mismo en el fondo que en los taludes para canales triangulares, trapeciales y rectangulares. Su metodología no considera los costos de colocación ni de construcción a no ser que éstos se puedan valuar en función de la superficie del canal. El procedimiento descrito a continuación es especialmente útil para largas secciones de canal donde los procedimientos de construcción se pueden orientar hacia la minimización de costos o en los casos en que los costos de mano de obra son relativamente menores que los del material de revestimiento.

Como se notó previamente en esta sección, el parámetro de mayor importancia en el dimensionamiento de los canales revestidos es el factor de sección, (Ec. 5.1.5). Para secciones trapeciales, rectangulares y triangulares el factor de sección vale

$$AR^{2/3} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{(by + zy^2)^{5/3}}{[b + 2y\sqrt{1 + z^2}]^{2/3}} = \frac{Qn}{\phi\sqrt{S}} \tag{7.2.1}$$

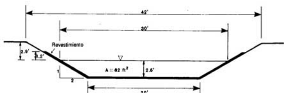


FIGURA 7.3 Resumen de los resultados del ejemplo 7.1

donde z = talud
b = ancho del fondo
y = tirante
S = pendiente del canal
n = coeficiente de Manning
Q = gasto de diseño
ϕ = una constante igual a 1.49 para el sistema inglés y 1.00 para el métrico

La ecuación (7.2.1) se puede reordenar dando una solución implícita para el tirante como sigue:

$$y = \frac{[(b/y) + z\sqrt{1 + z^2}]^{1/4}}{[(b/y) + z]^{5/8}} \left(\frac{Qn}{\phi\sqrt{S}} \right)^{3/8} \qquad (7.2.2)$$

En la ecuación (7.2.2) si b/y y el talud z son datos, entonces puede resolverse en forma explícita b y y.

El costo del material usado en el revestimiento por lo común se da como una función del volumen de material usado. Por ejemplo, si el espesor del revestimiento está especificado, el costo por unidad de largo del canal es sólo función del perímetro mojado más el bordo libre y el material usado en las esquinas (Fig. 7.4). Referente a la figura 7.4

$$C_b = \mu_b \left(\frac{\text{volumen}}{\text{unidad de longitud}} \right) = \mu_b t_b (b + b') = Bb + k \qquad (7.2.3)$$

$$C_s = \mu_s \left(\frac{\text{volumen}}{\text{unidad de longitud}} \right) = \mu_s t_s (2E + 2E') = 2\Gamma(y + F)\sqrt{1 + z^2} \qquad (7.2.4)$$

y

$$C = C_b + C_s = bB + k + 2\Gamma(y + F)\sqrt{z^2 + 1} \qquad (7.2.5)$$

donde C = Costo total del material por unidad de longitud
C_b = costo del material de fondo por unidad de largo
C_s = costo del material de los taludes por unidad de largo del canal
b' = ancho de la esquina de fondo
t_b = espesor del revestimiento de fondo

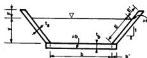


FIGURA 7.4 Definición de las dimensiones para la optimización de costos de canales trapeciales. *(Trout, 1982).*

t_s = espesor del revestimiento de los taludes
E = longitud del talud mojado
E' = longitud del bordo libre sobre los taludes
μ_b = costo del revestimiento de fondo por unidad de volumen
μ_s = costo del revestimiento de los taludes por unidad de volumen
B = costo del revestimiento de fondo para un espesor especificado por unidad de área
k = costo del material de las esquinas por unidad de largo
Γ = costo del revestimiento de los taludes para un espesor F especificado por unidad de área
F = requerimiento de bordo libre vertical

Para determinar las dimensiones de la sección de menor costo trapecial, rectangular o triangular, las ecuaciones (7.2.1) o (7.2.2) se deben resolver para que se minimice la ecuación (7.2.5) de costos. Como lo recalcó Trout (1982), el problema de la optimización de costos del canal es análogo al del problema clásico de microeconomía de minimizar costos de producción a través de sustitución de entradas. En este caso, la salida del sistema es la capacidad hidráulica; las entradas son las variables que definen la geometría del canal; y la función de producción es la ecuación para el factor de sección. En la terminología usada en administración, la solución a este problema de optimización requiere de una mezcla de entrada tal que la razón de los productos marginales sea igual a la razón de los costos marginados. Si el talud z se supone constante, se puede usar el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar una solución algebraica explícita a este problema.

Como se dijo arriba, la combinación dimensional en la cual razón entre los cambios marginales en el factor de sección es igual a los cambios en los costos, o,

$$\frac{\partial(AR^{2/3})/\partial b}{\partial(AR^{2/3})/\partial y} = \frac{\partial C/\partial b}{\partial C/\partial y} \tag{7.2.6}$$

sujeta a la ecuación (7.2.1) representa la solución óptima o de mínimo costo al problema. Si las ecuaciones (7.2.1) y (7.2.5) se sustituyen en la (7.2.6) y se simplifica el resultado, se obtiene la siguiente solución óptima,

$$K_1\left(\frac{y}{b}\right)^2 + K_2\left(\frac{y}{b}\right) + K_3 = 0 \tag{7.2.7}$$

donde

$$K_1 = 20(z^2+1) - \left[1 + 4\left(\frac{B}{\Gamma}\right)\right]4z\sqrt{z^2+1} \tag{7.2.8}$$

$$K_2 = \left(1 - \frac{B}{\Gamma}\right)6\sqrt{z^2+1} - 10z\left(\frac{B}{\Gamma}\right) \tag{7.2.9}$$

y

$$K_3 = -5\left(\frac{B}{\Gamma}\right) \tag{7.2.10}$$

Entonces la razón de b/y para resolver la ecuación (7.2.2) es

$$\frac{b}{y} = \frac{2K_1}{-K_2 + \left[K_2^2 + 20\left(\frac{B}{\Gamma}\right)K_1\right]^{1/2}} \tag{7.2.11}$$

la cual es función de z y la razón entre los costos unitarios del material de fondo y de los taludes. Un procedimiento típico de solución es el siguiente:

1. Dados los valores de S, Q, n, z, B, y Γ se determinan los valores de K_1, K_2 y K_3 con las ecuaciones (7.2.8) a (7.2.10).
2. Se estima la menor razón de costos b/y con la ecuación (7.2.11).
3. El tirante que produce el menor costo se obtiene con la ecuación (7.2.2).
4. El ancho de fondo para el menor costo se obtiene multiplicando y por la razón b/y.

EJEMPLO 7.2

Un canal trapecial se debe diseñar para un gasto de 0.08 m^3/s (2.8 $ft.^3/s$) con una pendiente de 0.001. Si $n = 0.014$, $B = \$3.20$ por metro cuadrado (\$0.30 por $ft.^2$), $\Gamma = \$2.00$ por metro cuadrado (\$0.19 por $ft.^2$), $z = 0.5$, el bordo libre vertical requerido es de 0.15 m (0.5 ft.), y el costo de material para las esquinas es de \$0.35 por metro (0.11 por ft.), determínese el tirante y ancho de fondo para minimizar el costo del revestimiento. Este ejemplo fue presentado por primera vez por Trout (1982).

Solución

Este ejemplo puede resolverse algebraicamente o gráficamente. Como se demostrará, el procedimiento algebraico es más rápido, pero el gráfico se puede usar para dar respuesta a otras interrogantes importantes.

El primer paso en el procedimiento algebraico directo es el de determinar los valores K_1 y K_2 a partir de los datos. De la ecuación (7.2.8)

$$K_1 = 20(z^2 + 1) - \left[1 + 4\left(\frac{B}{\Gamma}\right)\right] 4z(z^2 + 1)^{1/2}$$

$$= 20(0.5^2 + 1) - \left[1 + 4\left(\frac{3.2}{2}\right)\right] (4)(0.5)(0.5^2 + 1)^{1/2}$$

$$= 8.45$$

y de la ecuación (7.2.9)

$$K_2 = 6\left(1 - \frac{B}{\Gamma}\right)(z^2 + 1)^{1/2} - 10z\,\frac{B}{\Gamma}$$
$$= 6\left(1 - \frac{3.2}{2}\right)(0.5^2 + 1)^{1/2} - 10(0.5)\left(\frac{3.2}{2}\right)$$
$$= -12.0$$

Entonces, la razón b/y para la sección revestida de costo óptimo está dada por la ecuación (7.2.11) o

$$\frac{b}{y} = \frac{2K_1}{-K_2 + \left[K_2^2 + 20\left(\frac{B}{\Gamma}\right)K_1\right]^{1/2}}$$
$$= \frac{2(8.45)}{-(-12.0) + \left[(-12.0)^2 + 20\left(\frac{3.2}{2}\right)(8.45)\right]^{1/2}}$$
$$= 0.522$$

Con el valor óptimo de b/y establecido, la ecuación (7.2.2) puede emplearse para encontrar el tirante óptimo o

$$y = \frac{[(b/y) + 2(z^2 + 1)^{1/2}]^{1/4}}{[(b/y) + z]^{5/8}}\left(\frac{Qn}{\phi\sqrt{S}}\right)^{3/8}$$
$$= \frac{[0.522 + 2(0.5^2 + 1)^{1/2}]^{1/4}}{(0.522 + 0.5)^{5/8}}\left[\frac{0.08(0.014)}{1.0\sqrt{0.001}}\right]^{3/8}$$
$$= 0.36 \text{ m } (1.2 \text{ ft})$$

y entonces,

$$b = \frac{b}{y}\,y = 0.522(0.36) = 0.19 \text{ m } (0.62 \text{ ft})$$

El costo mínimo del revestimiento por unidad de largo del canal se puede calcular con la ecuación (7.2.5) o

$$C = 0.19(3.20) + 2(2)(0.36 + 0.15)(0.5^2 + 1)^{1/2} + 0.35$$
$$= \$3.24 \text{ por m } (\$0.99 \text{ por ft})$$

Otro método para resolver este problema es la representación gráfica de las ecuaciones (7.2.2) y (7.2.11). En la figura 7.5 se muestra una solución para el caso específico de $z = 0.5$. En esta figura, las curvas representan los valores del factor de sección y las rectas desde el

origen, soluciones a la ecuación (7.2.11) para varios valores de B/Γ. Nótese respecto a esta figura, primero que se necesita una nueva gráfica para cada valor del talud. Segundo, cualquier combinación de b y y que caiga sobre la línea del sector de sección cumple con los requerimientos hidráulicos del diseño. Tercero, los valores de b y y en el punto donde la línea B/Γ cruza la línea correspondiente al factor de sección, representan los costos óptimo de revestimiento. Al usar la figura 7.5 con

$$\frac{nQ}{\phi\sqrt{S}} = 0.035$$

y

$$\frac{B}{\Gamma} = 1.6$$

se tiene que

$$y = 0.36 \text{ m } (1.2 \text{ ft})$$

y

$$b = 0.19 \text{ m } (0.62 \text{ ft})$$

Con estos valores el costo mínimo de revestimiento se puede calcular de la misma forma que antes.

Una vez que una figura como la 7.5 se ha construido para un talud dado, pueden responderse otras importantes y pertinentes preguntas. Por ejemplo, ¿cuál sería el costo adicional con los datos especificados si las únicas secciones constructivas disponibles tienen un espesor de 0.4 m (1.3 ft.)? El tirante entonces queda como $y = 0.25$ m (0.82 ft.), y el costo por unidad de largo del canal dado por la ecuación (7.2.5) es

$$C = bB + 2\Gamma(y + F)(z^2 + 1)^{1/2} + k$$

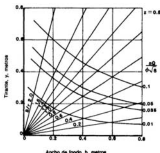


FIGURA 7.5 Minimización de costos de revestimiento para canales trapeciales con $z = 0.5$ *(Trout, 1982.)*

o $$C = 0.4(3.20) + 2(2)(0.25 + 0.15)(0.5^2 + 1)^{1/2} + 0.35$$
$$= \$3.42 \text{ por m } (\$1.04 \text{ por ft})$$

Por lo que, usando las secciones disponibles, se tiene

$$\text{Porcentaje de aumento} = \frac{3.42 - 3.24}{3.24}(100) = 5.6\%$$

sobre el costo mínimo de material incurrido.

Otra cuestión que se debe examinar es la sensibilidad del costo del material de revestimiento en función de los valores de los taludes. En la figura 7.6 se muestra la variación del costo en función del talud para los datos de costo y gasto de este ejemplo. El costo mínimo de revestimiento se tiene para $z \simeq 0.65$. Para un talud de 0.92, el ancho óptimo de fondo del canal se hace cero, y la sección óptima se convierte en un triángulo. De las figuras 7.5 y 7.6 se concluye que los costos de revestimiento son poco sensibles a variaciones en las dimensiones de la sección transversal si éstas no se desvían excesivamente de las dimensiones óptimas.

7.3 DISEÑO DE CANALES NO REVESTIDOS, ESTABLES DE TIERRA: UN DISEÑO GENERAL BASADO EN EL MÉTODO DE LA FUERZA TRACTIVA

En comparación con el diseño de canales revestidos el diseño de canales no revestidos o erosionables, estables de tierra es un proceso complejo que involucra muchos parámetros, la mayor parte de los cuales no son cuantificables en forma precisa.

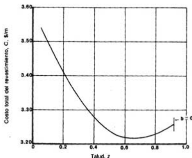


FIGURA 7.6 Costo total del revestimiento en función del talud

La complejidad del diseño de canales erosionables se debe a que la estabilidad de estos canales no sólo depende de los parámetros hidráulicos sino también de las propiedades de los materiales que forman el fondo y las paredes o taludes del canal. En este contexto, una sección estable del canal es aquella en la cual no ocurre una socavación o sedimentación objetable. Hay tres tipos de secciones inestables. En el primer tipo, los taludes y el fondo son socavados pero no ocurre sedimentación. Este caso puede ocurrir cuando el canal lleva agua sin sedimento o agua con muy poco sedimento pero con suficiente energía para erosionar el canal. El segundo tipo de canal inestable es el que tiene sedimentación sin erosión. Esta situación resulta cuando el agua lleva una carga alta de sedimentos a una velocidad que permite la sedimentación. El tercer tipo es el caso en el cual se presenta sedimentación y erosión. Este caso ocurre cuando el material de excavación es suceptible a la erosión y el agua acarrea una carga significativa de sedimento.

A mediados de la década de 1920, se comprendió que debía existir una relación entre el gasto o la velocidad media, las propiedades mecánicas del material de fondo y taludes, la cantidad y tipo de material acarreado por el flujo, y la estabilidad de la sección del canal. El Comité Especial de Riego Hidráulico de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles encuestó a varios ingenieros cuya experiencia los calificaba para producir opiniones autorizadas sobre la estabilidad de canales construidos con varios tipos de materiales. La hipótesis de este estudio era que sí había una relación entre la velocidad media del flujo, el material del perímetro del canal, y la estabilidad de éste. El resultado de esta encuesta se publicó en 1926 (Fortier y Scobey, 1926) y se convirtió en la base teórica de un método de diseño conocido como el *método de velocidad máxima permisible.* Los principales resultados del informe de Fortier y Scobey (1926) se encuentran resumidos en las columnas (1), (3), (5), (7), y (10) de la tabla 7.5. Con respecto a estos datos, debe notarse lo siguiente. Primero, las cifras dadas son para canales con tangentes largas recomendándose una reducción del 25% en la velocidad máxima permisible para canales con un alineamiento sinuoso. Segundo, estas cifras son para tirantes menores de 3 ft. (0.91 m). Para tirantes mayores, la velocidad máxima permisible debe aumentarse por 0.5 ft./s (0.15 m/s). Tercero, la velocidad de flujo en canales que acarrean abrasivos, como pedazos de basalto, debe reducirse en 0.5 ft./s (0.15 m/s). Cuarto, los canales de derivación de ríos con alta carga de arcillas como el río Colorado deben diseñarse para velocidades medias 1 a 2 ft./s (0.30 a 0.61 m/s) mayores a las permitidas para el mismo material perimetral si el agua no transportara sedimento.

El trabajo precursor de Fortier y Scobey (1926) sirvió como base del diseño de canales por muchos años; aunque, es una metodología basada primordialmente en observación y experiencia más que en principios físicos. El primer paso para desarrollar un método racional de diseño para canales no revestidos, estables de tierra, es el examinar las fuerzas que provocan la erosión. La erosión perimetral del canal ocurre cuando las partículas del perímetro son sometidas a fuerzas con magnitud suficiente para producir el movimiento de

TABLA 7.5 Velocidades máximas permisibles recomendadas por Fortier y Scobey (1926) para canales rectos con pendientes pequeñas y añejados

		Agua limpia				Agua con limos coloidales			
Material (1)	n^2 (2)	$\bar{u}$, ft/s (3)	τ_o, lb/ft² (4)	$\bar{u}$, m/s (5)	τ_o, N/m² (6)	$\bar{u}$, ft/s (7)	τ_o, lb/ft² (8)	$\bar{u}$, m/s (9)	τ_o, N/m² (10)
Arenas finas, no coloidales	0.020	1.50	0.027	0.457	1.29	2.50	0.075	0.762	3.59
Franco arenoso, no coloidal	0.020	1.75	0.037	0.533	1.77	2.50	0.075	0.762	3.59
Franco limoso, no coloidal	0.020	2.00	0.048	0.610	2.30	3.00	0.11	0.914	5.27
Limos aluviales, no coloidales	0.020	2.00	0.048	0.610	2.30	3.50	0.15	1.07	7.18
Tierra negra firme común	0.020	2.50	0.075	0.762	3.59	3.50	0.15	1.07	7.18
Ceniza volcánica	0.020	2.50	0.075	0.762	3.59	3.50	0.15	1.07	7.18
Arcilla dura, muy coloidal	0.025	3.75	0.26	1.14	12.4	5.00	0.46	1.52	22.0
Limos aluviales, coloidales	0.025	3.75	0.26	1.14	12.4	5.00	0.46	1.52	22.0
Pizarra y tepetate	0.025	6.00	0.67	1.83	32.1	6.00	0.67	1.83	32.1
Grava fina	0.020	2.50	0.075	0.762	3.59	5.00	0.32	1.52	15.3
Tierra negra graduada a piedritas cuando no es coloidal	0.030	3.75	0.38	1.14	18.2	5.00	0.66	1.52	31.6
Limos graduados a piedritas cuando es coloidal	0.030	4.00	0.43	1.22	20.6	5.50	0.80	1.68	38.3
Grava gruesa no coloidal	0.025	4.00	0.30	1.22	14.4	6.00	0.67	1.83	32.1
Piedritas y ripio	0.035	5.00	0.91	1.52	43.6	5.50	1.10	1.68	52.7

la partícula. Cuando una partícula descansa en el fondo plano del canal, la fuerza actuante que causa su movimiento es el resultado del flujo del agua sobre la partícula. Sobre una partícula que descansa sobre el talud del canal no sólo actúa la fuerza generada por el flujo, sino también la componente de gravedad que tiende a hacer que la partícula ruede o se deslize por el talud. Si la resultante de estas dos fuerzas es mayor que las fuerzas que resisten el movimiento, gravedad y cohesión, entonces se presenta la erosión perimetral del canal. Por definición, la fuerza tractiva* es la fuerza que actúa sobre las partículas que componen el perímetro del canal y es producida por el flujo del agua sobre estas partículas. En la práctica, la fuerza tractiva no es la fuerza sobre una partícula individual, sino la fuerza ejercida sobre un área perimetral del canal. Este concepto aparentemente fue planteado por primera vez por duBoys (1879) y replanteado por Lane (1955).

Recuérdese que para flujo uniforme la fuerza tractiva debe aproximarse a la fuerza gravitacional efectiva que actúa sobre el agua dentro del volumen de control (Fig. 4.1) y paralela al fondo del canal, o

$$F_T = \gamma ALS \tag{7.3.1}$$

donde A = área transversal del canal
L = longitud del volumen de control
S = pendiente del canal

La fuerza tractiva unitaria es

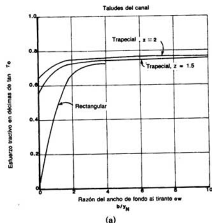
$$\tau_o = \frac{\gamma ALS}{PL} = \gamma RS \tag{7.3.2}$$

donde τ_0 = valor medio de la fuerza tractiva por unidad de área o el esfuerzo tractivo. En un canal ancho $y_N \approx R$ y la ecuación (7.3.2) se convierte en $\tau_0 = \gamma y_N S$.

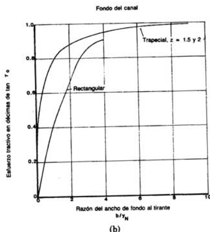
En la mayor parte de los canales, la fuerza tractiva no está uniformemente distribuida en el perímetro, y, por lo tanto, antes de desarrollar una metodología precisa de diseño, debe estimarse la distribución del esfuerzo tractivo sobre el perímetro del canal.

Aunque se han hecho numerosos intentos para determinar la distribución del esfuerzo tractivo sobre el perímetro de un canal usando datos de campo y laboratorio éstos no han sido exitosos (Chow, 1959). En la figura 7.7 se muestran los valores de los esfuerzos tractivos máximos en los taludes y fondo del canal, que fueron determinados por estudios matemáticos, como una función de la razón del ancho de fondo y del tirante. Nótese que para la sección trapecial, la más común en canales no revestidos, el esfuerzo tractivo máximo en el fondo es aproximadamente $\gamma y_N S$ y en los taludes $0.76\gamma y_N S$ (Lane, 1955).

* Ésta es también conocida como fuerza cortante, fuerza de arrastre o fuerza tangencial.



(a)



(b)

FIGURA 7.7 (*a*) **Esfuerzo cortante tractivo máximo en función de $\gamma y_N s$ para los taludes del canal,** (*b*) **Esfuerzo tractivo máximo en función de $\gamma y_N s$ para el fondo del canal.**

Cuando una partícula en el perímetro del canal está a punto de moverse, las fuerzas que producen el movimiento están en equilibrio con las que resisten el movimiento. Una partícula en el fondo nivelado del canal está sujeta a la fuerza tractiva $A_e \tau_L$ donde τ_L = esfuerzo tractivo sobre la superficie nivelada y A_e = área efectiva. El movimiento es resistido por la fuerza gravitacional W_s multiplicada por un coeficiente de fricción que se aproxima por $\tan \alpha$ donde W_s = peso de la partícula sumergida y α = ángulo de reposo de la partícula. Cuando el movimiento está a punto de iniciarse,

$$A_e \tau_L = W_s \tan \alpha \tag{7.3.3}$$

o

$$\tau_L = \frac{W_s}{A_e} \tan \alpha \tag{7.3.4}$$

Una partícula que se encuentra en el talud del canal está sujeta a una fuerza tractiva $\tau_s A_e$ y a una componente hacia abajo del talud W_s sen Γ donde τ_s = cortante del talud y Γ = ángulo del talud. Estas fuerzas y su resultante $\sqrt{(W_s \ sen\ \Gamma)^2 + (\tau_s A_e)^2}$ se muestran en forma esquemática en la figura 7.8. La fuerza que resiste el movimiento es la componente gravitacional multiplicada por el coeficiente de fricción $W_s \cos \Gamma \tan \alpha$. Al igualar las fuerzas que producen el movimiento con las que lo resisten,

$$W_s \cos \Gamma \tan \alpha = \sqrt{(W_s \tan \Gamma)^2 + (A_e \tau_s)^2} \tag{7.3.5}$$

o

$$\tau_s = \frac{W_s}{A_e} \cos \Gamma \tan \alpha \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \Gamma}{\tan^2 \alpha}} \tag{7.3.6}$$

Las ecuaciones (7.3.4) y (7.3.6) por lo común se combinan para formar la razón de fuerza tractiva

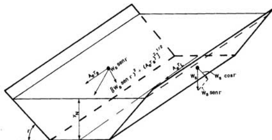


FIGURA 7.8 Análisis de las fuerzas que actúan sobre una partícula que se resiste al movimiento en el perímetro del canal.

$$K = \frac{\tau_s}{\tau_L} = \cos \Gamma \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \Gamma}{\tan^2 \alpha}} = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \Gamma}{\text{sen}^2 \alpha}} \qquad (7.3.7)$$

donde K = razón de fuerza tractiva.

Nótese que la razón de fuerza tractiva está en función del ángulo del talud y del ángulo de reposo del material perimetral. En el caso de materiales cohesivos o finos no cohesivos, el ángulo de reposo es muy pequeño por lo que se puede tomar como cero; *i.e.,* para estos materiales las fuerzas de cohesión son significativamente mayores que la componente gravitacional que tiende a hacer rodar las partículas por el talud. Lane (1955) encontró que, en general, el ángulo de reposo es directamente proporcional al tamaño y angulosidad de la partícula. Los datos de laboratorio disponibles a Lane (1955) se resumen en la figura 7.9. En esta figura, el tamaño de la partícula está dado por el diámetro en el cual 25% de todas las partículas, medidas por peso, son mayores a éste. Con respecto a los datos resumidos en esta figura, se debe notar lo siguiente. Primero, no se dispuso de suficiente tiempo para llevar a cabo un número suficiente de experimentos; esto produjo una gran dispersión de los datos. Segundo, los ángulos de reposo están limitados por 41° para material angular y por 39° para material muy redondeado debido a la dispersión de los datos en el material más grande.

Para material grueso, no cohesivo, los datos de laboratorio de Lane (1955) indican que el esfuerzo tractivo permisible máximo en libras por ft.² es de 0.4 veces el 25% del diámetro de las partículas en pulgadas. Reconociendo el hecho de que canales reales pueden aguantar fuerzas tractivas mayores

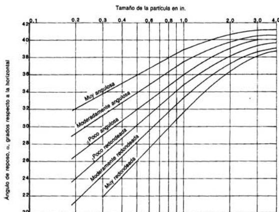


FIGURA 7.9 Ángulos de reposo para materiales no cohesivos. *(Lane, 1955.)*

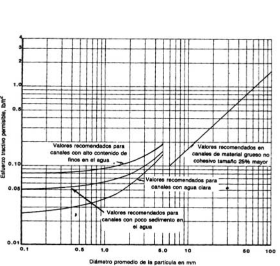
que las proyectadas por los experimentos, Lane (1955) también recabó información sobre canales reales. Estos datos de campo se encontraban como velocidades máximas permisibles y tuvieron que ser transformados a datos de cortantes— un procedimiento que requirió de numerosas suposiciones sobre el tamaño del canal y el tirante de flujo. Por ejemplo, en las columnas (4), (6), (8), y (10) de la tabla 7.5 los datos de Fortier y Scobey (1926) se convirtieron en datos de fuerza tractiva. Los resultados de la recabación de datos de campo de Lane se resumen en la figura 7.10*a*. En esta figura, para el material *fino* no cohesivo, *i.e.*, diámetros medios menores de 5 mm (0.254 in), el tamaño especificado es el diámetro mediano de una partícula de la cual 50% fue mayor en peso. Los datos sobre el esfuerzo tractivo permisible para canales construidos con material cohesivo fueron presentados por Chow (1959) y se encuentran resumidos en la figura 7.10*b*. Se cree que estas tablas dan información conservadora para el diseño, y que ya traen incorporadas un factor de seguridad.

Lane (1955) reconoció que los canales sinuosos socavan más fácilmente que los alineados. Para tomar en cuenta esta observación en el método de la fuerza tractiva, Lane desarrolló las siguientes definiciones. Los canales rectos, tienen alineaciones rectas o ligeramente curvas y por lo común son canales construidos en planicies horizontales. Los canales ligeramente sinuosos tienen grados de curvatura típicos de canales sobre topografía ligeramente ondulante. Los canales moderadamente sinuosos tienen un grado de curvatura típico de topografía moderadamente ondulosa. Los canales muy sinuosos tienen un grado de curvatura típico de canales al pie de cerros o en montañas. Usando estas definiciones, pueden precisarse los coeficientes de corrección (véase tabla 7.6).

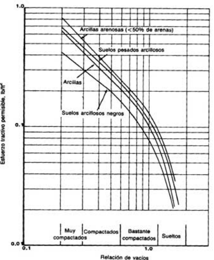
Aun con las limitaciones de los datos disponibles sobre las fuerzas tractivas, esta metodología es superior a la del método de velocidad máxima permisible. En esencia, al nivel de principios básicos, los dos métodos son análogos. Por ejemplo, el método de la velocidad máxima permisible reconoce que si el tirante es significativamente diferente a 3 ft. (0.91 m), se necesita de un factor de corrección (Chow 1959). Mehrotra (1983) demostró que el coeficiente de corrección requerido puede desarrollarse a partir de principios "básicos". De la ecuación (7.3.1) la fuerza tractiva crítica en la frontera del canal

TABLA 7.6 Comparación de las fuerzas tractivas máximas para canales con diversos grados de sinuosidad (Lane 1955)

Grado de sinuosidad	Fuerza tractiva limitante relativa
Canales rectos	1.00
Canales poco sinuosos	0.90
Canales moderadamente sinuosos	0.75
Canales muy sinuosos	0.60



(a)



(b)

FIGURA 7.10 (*a*) Esfuerzos tractivos permisibles recomendados para canales construidos en material no cohesivo. *(Lane, 1955.)* (*b*) Esfuerzo tractivo permisible en canales de material cohesivo. *(Chow, 1959)*

para un tirante y_1 es

$$\tau_c = \gamma R_1 S_1 \tag{7.3.8}$$

Donde R_1 y S_1 son el radio hidráulico y la pendiente, respectivamente, correspondiente al tirante y_1. Por lo que, para cualquier tirante normal y_2 en un canal cuyo fondo se compone del mismo tipo de suelo, la fuerza tractiva crítica es

$$\tau_c = \gamma R_2 S_2 \tag{7.3.9}$$

Dado que se trata del mismo material perimetral en ambos casos, las fuerzas tractivas deben ser iguales, por lo que

$$R_1 S_1 = R_1 S_2$$

o

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{7.3.10}$$

Empleando la ecuación de Manning de flujo uniforme en ambos casos, se puede demostrar que

$$\frac{\overline{u}_2}{\overline{u}_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2/3}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{1/2}$$

y sustituyendo la ecuación (7.3.10),

$$\frac{\overline{u}_2}{\overline{u}_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{1/6} = k \tag{7.3.11}$$

El parámetro k en la ecuación (7.3.11) se puede tomar como un factor de corrección aplicable a la velocidad máxima permisible (Tabla 7.5), si el tirante uniforme y_2 difiere del correspondiente a la velocidad máxima permisible. Si $y_1 = 3$ ft. (0.91 m) y se tiene un canal ancho, la ecuación (7.3.11) queda como

$$k = \left(\frac{y_2}{3}\right)^{1/6} \tag{7.3.12}$$

Aun con estos ajustes, debe reconocerse que el método de la velocidad máxima permisible no toma en cuenta la tendencia de las partículas de los taludes de rodar hacia abajo de éste bajo la influencia de la gravedad. Muchas de las primeras investigaciones de estabilidad de canales notaron estas limitaciones de diseño. Por ejemplo, Fortier y Scobey (1926) daban factores de corrección por tirante, y Houk (1926) notó que la velocidad máxima permisible parecía ser directamente proporcional al tirante.

Ahora es pertinente tomar en cuenta que los canales no revestidos de tierra sufren un proceso conocido como envejecimiento; *i.e.*, el material que compone el perímetro del canal puede modificarse con el paso del tiempo. Dos ejemplos de este proceso fueron vistos por Fortier y Scobey (1926). En el Valle Imperial

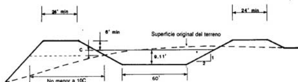


FIGURA 7.11 Sección tipo de tierra usado en el canal, Coachella del proyecto All-American Canal.

de California muchos de los grandes canales de irrigación fueron en un principio excavados en suelos arenosos que se erosionarían con una velocidad de 2.5 ft./s (0.76 m/s). Las partículas de arcilla extremadamente finas que se encontraban en el agua que fluía por estos canales han compactado y cementado estas arenas no cohesivas con una capa de barro coloidal que puede aguantar velocidades mayores a los 5.0 pies/s (1.5 m/s). El recubrimiento de los materiales originales del perímetro no sólo redujo el potencial de socavación sino que también redujo la infiltración al producir un perímetro menos permeable. En los canales de los valles en montañas de Colorado y Utah que fueron originalmente construidos en suelos limo gravosos ahora no quedan restos de limos. Sus fondos consisten ahora de grava bien graduada compactada y estratificada de una manera tal que forma un pavimento. Nótese que la interacción química entre el agua transportada, el material perimetral, y el sedimento puede también dar como resultado el acorazamiento del perímetro.

El metodo de la fuerza tractiva es el procedimiento recomendado para el diseño de canales no revestidos de tierra. La tabla 7.7. resume algunas secciones tipo de canales no revestidos de tierra usados en proyectos de irrigación en Estados Unidos, y una sección tipo del All-American Canal se muestra en la figura 7.11. En la tabla 7.8 se resume un procedimiento para el diseño de canales no revestidos, estables de tierra donde se supone que el gasto de diseño Q_D, la pendiente del canal, las propiedades físicas pertinentes del material perimetral, y la forma general de la sección se establecieron previamente al inicio del proceso de diseño.

EJEMPLO 7.3

Se debe excavar un canal que conducirá un gasto de 10 m³/s (350 ft.³/s) a través de una topografía moderadamente ondulada con una pendiente de 0.0016 en un terreno aluvial grueso con el 25% de las partículas con 3 cm (1.2 in.) o más de diámetro. El material del perímetro de este canal se puede describir como moderadamente redondeado. Suponiendo que el canal debe ser no revestido y de sección trapecial, encuéntrense los valores de b y z.

TABLA 7.7 Secciones tipo de canales no revestidos de tierra, seleccionados del oeste de Estados Unidos (Houk, 1956)

Canal	Proyecto	Taludes	Tirante ft.	Ancho de fondo (plantilla) ft.	Razón ancho/tirante	Velocidad media ft./s	Gasto ft^3/s	Bordo libre ft*
			Secciones de tierra					
Lateral	Altus	1½:1	1.66	4	2.41	1.86	20	1.3
C Line East	Boise	1½:1	4.00	8	2.00	1.89	106	3.5
C Line East	Boise	1½:1	7.14	14	1.96	2.25	397	3.4
Altus	Altus	1½:1	6.20	20	3.23	2.48	450	3.5
Conchas	Tucumcari	1½:1	8.65	24	2.77	2.19	700	4.3
Kittitas Main	Yakima	1½:1	11.35	30	2.64	2.47	1 320	5.0
Ridge	Yakima	1½:1	9.57	40	4.18	2.50	1 300	4.0
Main (gravity extension)	Minidoka	1½:1	5.60	60	10.71	3.00	1 149	3.0
Coachella	All-American	2:1	10.33	60	5.81	3.00	2 500	6.0
Gravity Main	Gila	2:1	13.54	100	7.38	3.49	6 000	6.0
All-American	All-American	2:1	16.59	130	7.84	3.75	10 155	6.0
All-American	All-American	1¾:1	20.61	160	7.76	3.75	15 155	6.0
			Secciones de Roca					
North Unit Main	Deschutes	¼:1	5.54	20	3.61	4.63	550	2.5
Gravity Main	Gila	¾:1	21.57	33	1.53	1.79	1 900	Corte profundo
Yuma	Yuma	¼:1	8.46	60	7.10	3.68	2 000	Corte profundo
All-American	All-American	¾:1	20.13	69	3.42	6.00	10 155	Corte profundo
All-American	All-American	¾:1	22.75	94	4.13	6.00	15 155	Corte profundo

* Hasta el borde superior del revestimiento

TABLA 7.8 Un procedimiento de diseño de canales no revestidos, estables de tierra

Paso	Procedimiento
1	Estímese n o C para el material perimetral dado.
2	Estímese el ángulo de reposo para el material perimetral (Fig. 7.9).
3	Estímese la sinuosidad del canal según la topografía que debe atravesar y determínese el factor de corrección de la fuerza tractiva (Tabla 7.6).
4	Supóngase un valor del ángulo de los taludes (Tabla 7.2) y (ancho de fondo)/(tirante normal).
5	Supóngase que los taludes son lo que limita el diseño del canal.
6	Calcúlese la fuerza tractiva máxima permisible en los taludes en función del esfuerzo cortante. Úsese el factor de corrección de la figura 7.7*a* y el factor de corrección por sinuosidad del paso 3.
7	Estímese la razón de fuerzas tractivas [Ec. (7.3.7)].
8	Estímese la fuerza tractiva permisible en el fondo (Fig. 7.10) y corríjase por sinuosidad (paso 3).
9	Combínese los resultados del paso 6 y 8 para determinar el tirante normal y_N.
10	Determínese el ancho de fondo con los resultados de los pasos 4 y 9.
11	Calcúlese Q y compárese con el gasto de diseño Q_D, retrocédase al paso 4, y repítase el procedimiento de diseño tanteando la razón b/y hasta que $Q = Q_D$.
12	Compárese la fuerza tractiva permisible en el fondo (paso 8) con la actuante dada por $\gamma y_N S$ y corríjase por forma (Fig. 7.7*a*).
13	Verifíquese: 1. La velocidad mínima permisible para agua que lleve finos y para vegetación. 2. El número de Froude.
14	Estímese el bordo libre requerido [Ec. (7.1.1)] o (Fig. 7.1).
15	Resúmase los resultados sobre un bosquejo dimensionado

Solución

Paso 1 Estímese n con la tabla 4.8.

$$n = 0.025$$

Paso 2 Estímese el ángulo de reposo.

$$d_{25} = 3 \text{ cm} = \frac{3}{2.54} \text{ in} = 1.18 \text{ in}$$

de la figura 7.9

$$\alpha = 34°$$

Paso 3 Estímese el factor de corrección por sinuosidad del canal (Tabla 7.6).

$$C_s = 0.75$$

Paso 4 Supóngase un talud de 2:1 y $b/y_N = 4$.

Paso 5 Supóngase que los taludes son un factor limitante.

Paso 6 Encuéntrese el máximo cortante permisible en los taludes (Fig. 7.7*a*).

$$\tau_s = 0.75\gamma y_N S$$

Paso 7 Estímese la razón de esfuerzos tractivos [Ec. (7.3.7)].

$$K = \frac{\tau_s}{\tau_b} = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \Gamma}{\text{sen}^2 \alpha}}$$

$$\Gamma = \tan^{-1} (\tfrac{1}{2}) = 26.6°$$

$$K = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 26.6°}{\text{sen}^2 34°}} = 0.60$$

Paso 8 Estímese el esfuerzo tractivo permisible de fondo (Fig. 7.10).

$$\tau_b = 0.47 \text{ lb/ft}^2 \text{ para } d_{25} = 1.18 \text{ in (30 mm)}$$

Corrección por sinuosidad

$$\tau_b = C_s \tau_b = 0.75(0.47) = 0.35 \text{ lb/ft}^2 \text{ (17 N/m}^2\text{)}$$

Paso 9 Estímese y_N.

$$\frac{\tau_s}{\tau_b} = K \qquad \tau_s = K\tau_b$$

$$0.75\gamma y_N S = K\tau_b$$

$$y_N = \frac{0.60(17)}{0.75(9658)(0.0016)} = 0.88 \text{ m } (2.9 \text{ ft})$$

Paso 10 $b/y_N = 4$.

$$b = 4(0.88) = 3.5 \text{ m } (11 \text{ ft})$$

Paso 11 Determínese Q.

$$A = (b + zy)y = [3.5 + 2(0.88)](0.88) = 4.6 \text{ m}^2 \ (50 \text{ ft}^2)$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 3.5 + 2(0.88)\sqrt{5} = 7.4 \text{ m } (24 \text{ ft})$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{4.6}{7.4} = 0.60 \text{ m } (2.0 \text{ ft})$$

$$Q = \frac{AR^{2/3}}{n}\sqrt{S} = \frac{4.6(0.60)^{2/3}}{0.025}\sqrt{0.0016} = 5.2 \text{ m}^3\text{/s } (180 \text{ ft}^3\text{/s})$$

Q es menor que Q_D y, por lo tanto, se necesitan cómputos adicionales en los cuales b/y_N varía y C_s, K, permisible, y z son constantes.

b/y_N	y_N, m	b, m	A, m²	P, m	R, m	Q, m³/s
5	0.88	4.4	5.4	8.3	0.65	6.5
8.25	0.88	7.3	8.0	11	0.71	10.2
8.15	0.88	7.2	7.9	11	0.71	10

Entonces, para $z = 2$ y $b/y_N = 8.15$, $y_N = 0.88$ m (2.9 ft), $b = 7.2$ m (24 ft), y $Q = 10$ m³/s (350 ft ³/s).

Paso 12 Verifíquese el esfuerzo tractivo de fondo.

τ_b permisible $= C_s\tau_b = 17$ N/m² (véase paso 8)

τ_b calculado $= 0.99\gamma y_N S$ (Fig. 7.7b)

$\tau b = 0.99(9658)(0.88)(0.0016) = 13\text{N/m}^2$ (0.27 lb/ft²)

Dado que éste es el verdadero, esfuerzo tractivo calculado, el diseño es aceptable.

Paso 13 Verifíquese la velocidad y el número de Froude.

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{10}{7.9} = 1.3 \text{ m/s } (4.3 \text{ ft/s})$$

Esta velocidad debe prevenir el crecimiento de plantas y la sedimentación.

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}} = 0.48$$

Por consiguiente, es un flujo subcrítico.

Paso 14 Estímese el bordo libre requerido con la ecuación (7.1.1)

Tirante de diseño = 0.88 m (2.9 ft)

Gasto de diseño = 10 m³/s (350 ft³/s).

Estímese C en la ecuación (7.1.1) como 1.6.

Entonces $F = \sqrt{Cy} = \sqrt{1.6(2.9)} = 0.66$ m (2.2 ft)

Los resultados de este diseño se resumen en la figura 7.12.

Debe recalcarse que el enfoque utilizado en la sección anterior no es la única metodología que puede emplearse para la solución de problemas de diseño de secciones estables. Por ejemplo, los principios básicos y resultados asociados al concepto de inicio de movimiento también pueden aplicarse a este problema. Shields (1936) usó un enfoque experimental para definir el inicio del movimiento, y sus resultados pueden expresarse en función de dos parámetros adimensionales:

$$\mathbf{R}_* = \frac{u_* d}{\nu} \tag{7.3.13}$$

y

$$F_s = \frac{\tau_o}{\gamma(S_s - 1)d} = \frac{u_*^2}{(S_s - 1)gd} \tag{7.3.14}$$

donde $\mathbf{R}_*$ = número de Reynolds basado en la velocidad cortante y el tamaño de la partícula (también se le conoce como el número de Reynolds de la partícula)

u_* = velocidad al cortante

ν = viscosidad cinemática del fluido

S_s = densidad específica de las partículas que componen el material perimetral tomado como 2.65

d = diámetro de las partículas del material perimetral

Para un diseño conservador d se puede tomar por lo general como el valor por el cual 25% de todas las partículas, medidas por peso, son mayores. Los resul-

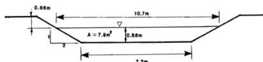


FIGURA 7.12 Resumen de los resultados del ejemplo 7.3

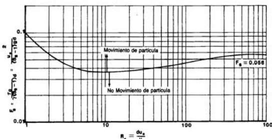


FIGURA 7.13 Inicio del movimiento en función del número de Reynolds. *(Shields, 1936.)*

tados de Shields se resumen en forma gráfica (Fig. 7.13) en donde la curva delimita el inicio del movimiento.

Estos resultados han sido confirmados, generalmente, por los resultados teóricos de White (1940) y los resultados de campo de Lane (1955) que se resumen en la figura 7.10*a*.

Si se supone que $S_s = 2.65$, entonces cuando $\mathbf{R}_*$ exceda un valor de 400, el diámetro de la partícula perimetral debe ser superior a 0.25 in. (0.006 m). En este caso, el material perimetral puede clasificarse como aluvión grueso, y la ecuación (7.3.14) se convierte en

$$\frac{\tau_o}{d\gamma(S_s - 1)} = 0.056 \tag{7.3.15}$$

donde $\tau_o = \gamma RS$

Por lo tanto,

$$\frac{\gamma RS}{d(S_s - 1)} = \frac{RS}{d(2.65 - 1)} = 0.056$$

y

$$d \simeq 11RS \tag{7.3.16}$$

La ecuación (7.3.16) da un método simple para estimar el tamaño del material que permanecerá quieto en un canal dado R y S. Nótese que, *para valores de d menores que 0.25 in. (0.006 m) la ecuación (7.3.16) no es válida*, pero usando la curva de la figura 7.9 se pueden encontrar los valores de F_s correspondientes y desarrollar relaciones análogas para estos tamaños.

EJEMPLO 7.4

En el ejemplo anterior, la pendiente era de 0.0016 y 25% del material perimetral estaba compuesto por partículas con más de 3 cm (1.2 in.)

de diámetro. Úsese los resultados resumidos en la figura 7.10 para demostrar que el diseño dado por este ejemplo es conservador.

Solución

Supóngase que $S_s = 2.65$ y que $R \simeq y_N$ para canales anchos. Con estas suposiciones, la ecuación (7.3.16) da para superficies horizontales

$$\tau = \frac{\gamma d}{11}$$

Del ejemplo anterior, se tiene que la razón de esfuerzos tractivos es

$$\frac{\tau_s}{\tau_b} = K = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2\,\Gamma}{\text{sen}^2\,\alpha}} = 0.60$$

Sustituyendo $\tau_b = C_s\left(\frac{\gamma d}{11}\right)$ y $\tau_s = 0.75\gamma y_N S$ en la ecuación anterior da

$$\frac{0.75\gamma y_N S}{C_s(\gamma d/11)} = 0.60$$

o sea, el valor máximo de y_N para un canal estable es

$$y_N = \frac{C_s d(0.60)}{11(0.75)S} = \frac{0.75(3/100)(0.60)}{11(0.75)(0.0016)} = 1.0 \text{ m (3.3 ft)}$$

Por lo tanto, se tiene un resultado conservador según los cálculos anteriores para y_N. Nótese que este resultado verifica la validez de la solución recomendada por la metodología de diseño.

La sección hidráulicamente estable

Las metodologías de diseño basadas en la fuerza tractiva permisible presentadas en la sección anterior dan secciones transversales en las cuales la fuerza tractiva es igual al valor permisible sólo en una parte del perímetro mojado, normalmente en los taludes. Parecería lógico tratar de definir una sección transversal en la cual las condiciones de movimiento incipiente de las partículas prevalecieran para todo el perímetro del canal. Las ecuaciones que definen esta sección fueron desarrolladas por el U.S. Bureau of Reclamation (Glover y Florey, 1951) para canales erosionables que acarrean aguas limpias de sedimento sobre materiales no cohesivos. Esta metodología produjo una sección hidráulicamente estable conocida como la sección hidráulicamente estable de mayor eficiencia hidráulica.

Las suposiciones que se usaron para el desarrollo de las ecuaciones que definen la sección hidráulicamente estable son:

1. La componente normal al fondo del canal del peso sumergido de las partículas es la fuerza que las mantiene en su lugar.
2. En y sobre el nivel de la superficie libre del agua, los taludes del canal tienen el mismo ángulo que el de reposo del material no cohesivo bajo la acción de la gravedad.
3. En la línea de centro del canal, el talud es cero, y la fuerza tractiva por sí sola es suficientemente grande para producir un estado de movimiento incipiente de la partícula.
4. En los puntos entre el centro y márgenes del canal, las partículas se mantienen en un estado incipiente de movimiento por la resultante de la fuerza tractiva y la componente de la gravedad del peso sumergido de las partículas.
5. La fuerza tractiva actuante sobre un área del canal es igual a la componente del peso del agua sobre el área actuando en la dirección del flujo. Si esta suposición es válida, entonces no hay transferencia lateral de fuerza tractiva.

   Nótese que con la excepción de las suposiciones 2 y 3, estas suposiciones son las mismas que se emplearon en la sección anterior.

Tómese un canal con una pendiente S con taludes definidos en cualquier punto (x, y) por el ángulo Γ (Fig. 7.14). Entonces, según la suposición 5, el esfuerzo tractivo crítico que actúa sobre un área AB por unidad de largo del canal está dado por

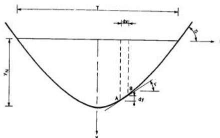


FIGURA 7.14 Definición esquemática de los parámetros de la sección hidráulica estable.

$$\tau_s = \frac{\gamma y S\, dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \gamma y S \cos \Gamma \tag{7.3.17}$$

A partir del desarrollo anterior, el esfuerzo tractivo crítico que actúa sobre los taludes del canal está dado por

$$\tau_s = K\tau_b = \gamma y_N S \cos \Gamma \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \Gamma}{\tan^2 \alpha}} \tag{7.3.18}$$

donde $\tau_b = \gamma y_N S$ es el esfuero tractivo en la línea central del canal donde el tirante es y_N. Combinando las ecuaciones (7.3.16) y (7.3.18) y resolviendo para y da

$$y = \frac{y_N}{\tan \alpha} \sqrt{\tan^2 \alpha - \tan^2 \Gamma} \tag{7.3.19}$$

Al sustituir $dy/dx = \tan \Gamma$ en la ecuación (7.3.19) se tiene una ecuación diferencial que define la forma de la sección transversal

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_N}\right)^2 \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 0 \tag{7.3.20}$$

Dada la condición que para $x = 0$, $y = y_N$, la solución de la ecuación (7.3.20) es

$$y = y_N \cos\left(\frac{x \tan \alpha}{y_N}\right) \tag{7.3.21}$$

Una forma alterna de la ecuación (7.3.21) puede obtenerse notando que para $x = T/2$, $y = 0$. Esta condición sólo se satisface si

$$\frac{T \tan \alpha}{2y_N} = \frac{\pi}{2} \tag{7.3.22}$$

o

$$y_N = \frac{T \tan \alpha}{\pi} \tag{7.3.23}$$

Entonces la ecuación (7.3.21) se convierte en

$$y = y_N \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) \tag{7.3.24}$$

Las ecuaciones (7.3.21) y (7.3.24) definen una sección en la cual para un área dada se tiene el menor ancho y el mayor radio hidráulico. Entonces, este canal tiene la mayor eficiencia hidráulica de todos los canales no revestidos y estables de tierra construidos en material no cohesivo con una pendiente S que conducen agua sin sedimentos.

El área del canal definida por las ecuaciones (7.3.21) y (7.3.24) es

$$A = 2\int_0^{T/2} y\,dx = 2y_N \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{x \tan\alpha}{y_N}\right) dx = \frac{2Ty_N}{\pi} \qquad (7.3.25)$$

y el perímetro mojado

$$P = 2\int_0^{T/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{2y_N}{\operatorname{sen}\alpha} E(\operatorname{sen}\alpha) \qquad (7.3.26)$$

donde $E(\operatorname{sen}\alpha)$ = integral elíptica completa del segundo tipo. $E(\operatorname{sen}\alpha)$ puede calcularse con tablas matemáticas o por

$$E(\operatorname{sen}\alpha) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^6\alpha}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{5} - \cdots\right] \qquad (7.3.27)$$

El gasto del canal puede calcularse con la ecuación de Manning

$$Q = \frac{2.98 y_N^{8/3} (\cos\alpha)^{2/3} \sqrt{S}}{n(\operatorname{sen}\alpha)[E(\operatorname{sen}\alpha)]^{2/3}} \qquad (7.3.28)$$

El gasto Q corresponde al obtenido en una sección hidráulica de mayor eficiencia dado un material no cohesivo y la pendiente del canal. Si el gasto de diseño Q_D es mayor o menor que Q, entonces la sección definida por las ecuaciones (7.3.21) y (7.3.24) debe modificarse. Si $Q_D > Q$, se debe aumentar el área de flujo; de todas maneras, el tirante máximo no puede ser mayor que el tirante estable y_N ya que un aumento de tirante produciría un aumento en la fuerza tractiva e inestabilidad. Por lo tanto, se debe agregar una sección rectangular en el centro de la sección teórica (Fig. 7.15). El aumento de ancho requerido, T', se encuentra resolviendo por tanteos la ecuación de Manning o

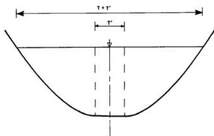


FIGURA 7.15 Dibujo esquemático de la sección hidráulica estable cuando $Q < Q_D$

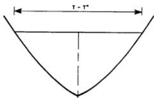


FIGURA 7.16 Dibujo esquemático de la sección hidráulica estable cuando $Q > Q_D$

$$Q_D = \frac{1.49}{n}\sqrt{S}\left\{\frac{[(2y_N^2/\tan\alpha) + T'y_N]^{5/3}}{[2y_N E(\operatorname{sen}\alpha)/(\operatorname{sen}\alpha) + T']^{2/3}}\right\} \tag{7.3.29}$$

Si $Q_D < Q$, por consideraciones económicas se debería remover una porción del canal (Fig. 7.16). El ancho de esta porción, T'', también se puede determinar por tanteos de la ecuación de Manning

$$Q = \frac{1.49}{n}\sqrt{S}\,\frac{\{(2y_N^2/\tan\alpha)[\operatorname{sen}(T\tan\alpha/2y_N) - \operatorname{sen}(T''\tan\alpha/2y_N)]\}^{5/3}}{(2y_N/\tan\alpha)E[\operatorname{sen}\alpha, (\pi/2)(1 - T''/T)]} \tag{7.3.30}$$

donde $E/\operatorname{sen}\alpha, (\pi/2)\,(1 - T''/T)]$ es un integral elíptica incompleta del tercer tipo. T'' puede estimarse suponiendo que la velocidad media en la sección teórica y en la ajustada son iguales y que por ende los gastos son proporcionales al área hidráulica o

$$Q = \frac{2y_N^2}{\tan\alpha}\,\overline{u} = \frac{2T^2\tan\alpha}{\pi^2}\,\overline{u} \tag{7.3.31}$$

y

$$Q_D = \frac{2(T - T'')^2\tan\alpha}{\pi^2}\,\overline{u} \tag{7.3.32}$$

Al combinar las ecuaciones (7.3.31) y (7.3.32) se obtiene una ecuación que puede emplearse para estimar T''

$$T'' = T\left(1 - \sqrt{\frac{Q_D}{Q}}\right) \tag{7.3.33}$$

EJEMPLO 7.5

Diséñese una sección hidráulica óptima para un canal que va a ser construido a través de material no cohesivo con una pendiente de 0.0004. Pruebas preliminares del material natural que compondrá el perímetro del canal indican que $\tau_0 = 0.10$ lb/ft.² (4.8 N/m²), $n = 0.2$, y $\alpha = 31°$. El gasto de diseño es de 300 ft.³/s (8.5 m³/s).

Solución

El tirante se puede determinar con la ecuación (7.3.2) donde se supone que $y_N = R$.

$$\tau_o = \gamma y_N S$$

$$y_N = \frac{\tau_o}{\gamma S} = \frac{0.10}{62.4(0.0004)} = 4.0 \text{ ft } (1.2 \text{ m})$$

La forma del canal se obtiene combinando las ecuaciones (7.3.23) y (7.3.24)

$$y_1 = y_N \cos\left(\frac{x \tan \alpha}{y_N}\right) = 4.0 \cos\left(\frac{x \tan 31°}{4}\right) = 4.0 \cos(0.15\, x)$$

y

$$T = \frac{\pi y_N}{\tan \alpha} = \frac{4\pi}{\tan 31°} = 21 \text{ ft } (6.4 \text{ m})$$

$$A = \frac{2Ty_N}{\pi} = \frac{2(21)(4)}{\pi} = 53 \text{ ft}^2 \ (4.9 \text{ m}^2)$$

El gasto en este canal se puede calcular con la ecuación (7.3.28).

$$Q = \frac{2.98 y_N^{8/3} (\cos \alpha)^{2/3} \sqrt{S}}{n \tan \alpha [E(\text{sen}\,\alpha)]^{2/3}} = \frac{2.98(4)^{8/3}(\cos 31°)^{2/3}\sqrt{0.0004}}{0.02(\tan 31°)(1.46)^{2/3}}$$

$$= 140 \text{ ft}^3/\text{s} \ (4.0 \text{ m}^3/\text{s})$$

Dado que $Q < Q_D$, se necesita de una solución por tanteos de la ecuación (7.3.29) para T',

$$Q_D = \frac{1.49}{n} \sqrt{S} \left\{ \frac{[(2y_N^2/\tan \alpha) + T'y_N]^{5/3}}{[(2y_N/\text{sen}\alpha)E(\text{sen}\alpha) + T']^{2/3}} \right\}$$

$$\frac{nQ_D}{1.49\sqrt{S}} = \frac{[(2y_N^2/\tan \alpha) + T'y_N]^{5/3}}{[(2y_N/\text{sen}\alpha)E(\text{sen}\alpha) + T']^{2/3}}$$

$$\frac{0.02(300)}{1.49\sqrt{0.0004}} = \frac{[2(4)^2/\tan 31° + 4T']^{5/3}}{\{[2(4)(1.46)/\text{sen}\,31°] + T'\}^{2/3}}$$

$$201 = \frac{(53.3 + 4T')^{5/3}}{(22.7 + T')^{2/3}}$$

Tanteo T', ft	$(53.3 + 4T')^{5/3}/(22.7 + T')^{2/3}$
5	140
10	188
11.5	203

Por lo que el ancho de superficie requerido para este gasto es de (21 + 11.5) = 32 ft. (9.8 m). Los resultados de este diseño se resumen en la figura 7.17.

Pérdidas por infiltración en canales

Aunque un canal puede necesitar revestimiento por muchas razones (Sección 7.2), una de las razones principales para revestir un canal que de otra forma no lo hubiera requerido son las pérdidas por infiltración. La pérdida de agua debido a la infiltración de un canal no revestido depende de una gama de factores incluyendo, pero no limitados a, las dimensiones del canal, la graduación del material perimetral, y las condiciones del agua subterránea. Aunque se han hecho varios intentos para estimar en forma teórica las pérdidas por infiltraciones en un canal (*e.g.*, Bouwer 1965), se sigue prefiriendo la medición directa de éstas. Se tienen básicamente tres métodos de medición directa de pérdidas por infiltración:

1. En un canal ya construido, revestido o no revestido, se pueden seleccionar tramos aislados con diques para formar vasos con volúmenes conocidos. Un balance de masa es suficiente para estimar las pérdidas por infiltración. Dado que este método requiere que se suspenda el funcionamiento del canal por periodos largos, estas pruebas se llevan a cabo "fuera de temporada". En este caso se debe cuidar que las pérdidas medidas correspondan a las de la temporada de interés.

2. Si se lleva un registro confiable de las entradas y salidas de flujo en un tramo del canal, las pérdidas por infiltración se pueden calcular a partir de este registro. Este método no requiere la suspensión del servicio en el canal, pero la precisión del método es menor que la del método anterior.

3. Para el caso de un canal por construir, se pueden hacer tramos de prueba y usar el primer método.

Un cuarto método que es muy simple pero confiable está basado en mediciones históricas. En la tabla 7.9, se resume un conjunto de valores desarrollados originalmente por Etcheverry y Harding en 1933 (Davis y Sorenson 1969). Los valores en esta tabla son el resultado de muchas mediciones de campo y

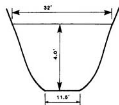


FIGURA 7.17 Resumen de los resultados del ejemplo 7.5.

TABLA 7.9 Pérdidas por infiltración en canales que no se ven afectados por el nivel freático (Davis y Sorenson, 1969)

Material perimetral	Pérdida por infiltración ($ft.^3$ de agua)/($ft.^2$ de perímetro) para un periodo de 24 hrs.
Franco arcilloso impermeable	0.25–0.35
Arcillas debajo de tepetates a una profundidad menor a 2–3 ft bajo el fondo	0.35–0.50
Franco arcilloso suelo fino, o ceniza de lava	0.50–0.75
Franco arcillo gravoso o franco arcillo arenoso, grava cementada, arena, y arcilla	0.75–1.00
Franco arenoso	1.00–1.50
Suelos arenosos sueltos	1.50–1.75
Suelos gravo-arenosos	2.00–2.50
Suelos porosos con gravas	2.50–3.00
Suelos con mucha grava	3.00–6.00

se ha encontrado que son razonablemente precisos; aunque, se recomienda que se usen sólo como una guía para el diseño de un sitio específico.

Un quinto método para estimar las pérdidas por infiltración de un canal revestido o parcialmente revestido implica la solución de las ecuaciones relevantes de flujo en medios porosos para un conjunto apropiado de condiciones de frontera. Subramanya *et al.* (1973) examinaron dos casos de infiltración en canales parcialmente revestidos. En esta investigación se usaron las siguientes suposiciones. Primero, el revestimiento se supuso impermeable y su espesor nulo. Segundo, el material poroso debajo del canal se supuso homogéneo, isotrópico, y de espesor infinito. Tercero, la suposición de no estar presente el efecto capilar.

El primer caso tratado por estos investigadores fue el de un canal con los taludes revestidos y el fondo no revestido (Fig. 7.18*a*). En la figura 7.19 los resultados se encuentran resumidos en forma gráfica. En esta figura, q = pérdida por infiltración por unidad de largo del canal, K = coeficiente de permeabilidad del material subyacente, β = ángulo entre los taludes del canal y la horizontal en radianes, y todas las otras variables se definen en la figura 7.15*a*. Respecto a la figura 7.19 se deben hacer las siguientes observaciones. Primero, para un valor dado de b/y, el efecto de β en la infiltración es insignificante. Segundo, la solución es aplicable para pérdidas por infiltración desde un vado somero.

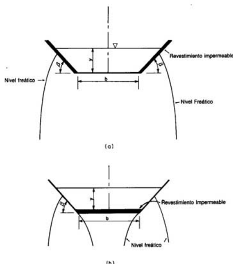


FIGURA 7.18 (*a*) Infiltración en un canal revestido en los taludes y sin revestimiento de fondo. (*b*) Infiltración en un canal revestido en el fondo y no revestido en los taludes.

El segundo caso tratado por Subramanya *et al.* (1973) fue un canal en el cual los lados no estaban revestidos y el fondo si (Fig. 7.18*b*). Se tienen en función del ancho relativo del fondo del canal tres casos: 1) El ancho relativo de fondo es tal que las dos líneas del nivel freático no se cruzan, 2) el ancho de fondo relativo es tal que las dos líneas freáticas se cruzan debajo del canal, y 3) el ancho de fondo relativo es tal que las dos líneas freáticas se cruzan en el fondo mismo del canal. De estos tres casos, Subramanya *et al.* (1973) resolvió sólo el primero, aunque debe notarse que los otros también se pueden resolver en forma analítica. La figura 7.20 es una gráfica de h/y contra β/π que permite clasificar un problema dado de infiltración como caso 1, 2 o 3. La figura 7.21 resume la solución para el caso 1 de infiltración. En esta figura, nótese que los taludes tienen una influencia significativa e importante sobre q.

La figura 7.22 muestra la variación en la reducción porcentual de la infiltración en función de b/y y β/π para un revestimiento parcial del canal. Al desarrollar esta figura, Subramanya *et al.* (1973) calcularon la pérdida por infiltración en la parte no revestida por el método de Vedernikov (véase, por ejemplo, (Polubarinova-Kochina, 1962). Las líneas punteadas en esta figura

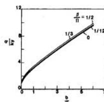


FIGURA 7.19 Variación de g/ky en función de b/y y β/π en canales con revestimiento de taludes. *(Subramanya et al., 1973.)*

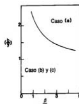


FIGURA 7.20 Gráfica para determinar el caso correspondiente para un canal con revestimiento de fondo. *(Subramanya et al., 1973.)*

indican la probable variación de la reducción porcentual de infiltración para los casos 2 y 3 cuando sólo se emplea un revestimiento de fondo. Nótese que para valores dados de β/π hay un valor de b/y que da una reducción de infiltración igual independientemente del tipo de revestimiento parcial. Para valores de b/y mayores a este valor, un revestimiento de fondo es más efectivo para reducir la infiltración, mientras que para valores de b/y menores a este valor un revestimiento de taludes es más efectivo.

7.4 DISEÑO DE CANALES REVESTIDOS CON PASTO

El revestimiento de un canal con pasto es un método común empleado para producir flujos intermitentes de irrigación y controlar la erosión en áreas

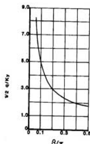


FIGURA 7.21 Variación de $1/2(g/ky)$ para el caso 1; taludes revestidos. *(Subramanya et al., 1973.)*

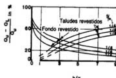


FIGURA 7.22 Variación en la reducción porcentual de infiltración debida al revestimiento de fondo o de taludes. *(Subramanya et al., 1973.)*

TABLA 7.10 Clasificación de grados de retraso para varios tipos de pastos (Coley, 1975)

Retraso	Cubierta	Condición
A	Pasto	Parado excelente, alto (promedio de 36 in.)
	Phalaris arundinacea "alpiste"	Parado excelente, alto (promedio de 36 in.)
B	*Bromas inernus* "bramo suave"	Parado bueno, podado (promedio 12 a 15 in.)
	Cyrodon dactylen "Zacate bermuda, pata de gallo"	Parado bueno, alto (promedio 12 in.)
	Schizachysium scoparium "Popotillo azul", *Bontelona gracilis* "navajita azul"	Parado bueno, sin podar
	Festuca arundinacea "Festuca alta"	Parado bueno, sin podar (promedio 18 in.)
	Lespedeza sericea	Parado bueno, no maderoso, alto (promedio 19 in.)
	Phleum prateuse "timothy"	Parado bueno, sin cortar (promedio 20 in.)
	Festuca arundinacea	Parado bueno, sin cortar (promedio 18 in.)
	Blue grama	Parado bueno, sin cortar (promedio 13 in.)
C	*Paspolum notalum* "zacate bahía"	Parado bueno, sin cortar (6 a 8 in.)
	Zacate bermuda, pata de gallo	Parado bueno, podado (promedio 6 in.)
	Agrostis alba	Parado bueno, cabeceado sin cortar, (15 a 20 in.)
	Mezcla de pastos, de verano (zacate orchard, *Agrostis alba*, ballico italiano y lespedeza común)	Parado bueno, sin cortar (6 a 8 in.)
	Centipede grass	Cubierta muy densa (promedio 6 in.)
	Poa pratensis zacate azul de Kentucky	Parado bueno, cabeceado (6 a 12 in.)
D	Zacate bermuda, pata de gallo	Parado bueno, cortado a 25 in.
	Festuca rubra, "festuca roja"	Parado bueno, cabeceado (12 a 18 in.)

TABLA 7.10 Clasificación de grados de retraso para varios tipos de pastos (Coley, 1975) ***(Continuación)***

Retraso	Cubierta	Condición
	Zacate búfalo, zacate chino	Parado bueno, sin cortar (3 a 6 in.)
	Mezcla de pastos de primavera (zacate orchord, ballico italiano, *Agrostis alba* lespedeza común)	Parado bueno, sin cortar (4 a 5 in.)
	Lespedeza sericea	Después de cortar 2 in.; Parado bueno, antes de cortar
E	Zacate bermuda, pata de gallo	Parado bueno, cortado a 1.5 in.
	Zacate bermuda, pata de gallo	rastrojo quemado

agrícolas. El pasto sirve para estabilizar el cuerpo del canal, consolidar el suelo que compone el perímetro del canal, y restringir el movimiento de partículas de suelo en el lecho de éste. Sin embargo los canales revestidos con pasto no pueden por lo general aguantar inundaciones prolongadas y humedad, y su diseño presenta un número de problemas que no se han encontrado en las secciones anteriores de este capítulo, *e.g.*, la variación estacional del coeficiente de fricción debido a la condición del revestimiento.

El coeficiente de rugosidad de Manning, que comúnmente se le llama el *coeficiente de retraso* en la literatura que trata los canales con revestimiento de pasto, se ha encontrado que está en función de la velocidad promedio, del radio hidráulico, y del tipo de vegetación (Coyle, 1975). Puede representarse a n por una serie de curvas empíricas de n versus $\bar{u}R$ para varios grados de retraso. Esta figura debe usarse junto con la tabla 7.10 lo que da una estimación del grado de retraso para varios tipos de pastos.

La selección del pasto para un uso específico depende principalmente del clima y las condiciones del suelo prevalecientes. Desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica, la consideración principal debe ser la estabilidad del canal. La tabla 7.11 resume las recomendaciones del U.S. Soil Conservation Service sobre las velocidades permisibles para varios tipos de cubiertas vegetales, pendientes del canal, y tipos de suelos. Además, se deben notar los siguientes lineamientos:

1. Donde sólo se pueda establecer o mantener una cubierta vegetal escasa, las velocidades no deben exceder los 3 ft./s (0.91 m/s).

2. Donde la vegetación se tenga que establecer por siembra, se permiten velocidades del orden de 3 a 4 ft./s (0.91 a 1.2 m/s).

TABLA 7.11 Velocidades permisibles en canales revestidos con pasto (Coyle, 1975)

		Velocidad permisible*	
Cubierta	Rango de pendientes, %	Suelos resistentes a la erosión, ft./s	Suelos fácilmente erosionables, ft./s
Cypodon dactylon "zacate bermuda, pata de gallo"	0–5	8	6
	5–10	7	5
	Over–10	6	4
Paspolum notolum "zacate bahía" Zacate búfalo, zacate chino *Poa prateusis* Zacate azul de Kentucky *Bromus Inernus* "bromo suave" Blue grama *Festuca Arundinace* "festuca alta"	0–5	7	5
	5–10	6	4
	Over–10	5	3
Mezcla de pastos de verano, (zacate orchord, *Agrostis alba*, bollico italiano y lespedeza común)	0–5	5	4
Pasto	5–10	4	3
Lespedeza sericea Weeping lovegrass *Palaris arundinacea* "alpiste" *Agrostis alba* Alfalfa *Festuca rubra* "festuca roja"	0–5‡	3.5	2.5
Mezcla de pastos de primavera (zacata orchord, ballico italiano, *Agrostis alba*, lespedeza común)§,¶ Sudan grass§	0–5	3.5	2.5

* Empléense velocidades mayores a 5 ft/s sólo cuando se tenga una buena cubierta y buen mantenimiento.

† No se utilicen pendientes mayores de 10% excepto cuando se tengan taludes con vegetación en combinación con un centro de sección de piedra, concreto, o vegetación muy resistente

‡ No se utilicen pendientes mayores al 5% excepto cuando se tengan taludes con vegetación en combinación con un centro de sección de piedra, concreto, o vegetación muy resistente.

§ Anuales-empléense en pendientes suaves o como protección temporal hasta que se establezcan las cubiertas permanentes.

¶ No se recomienda su uso en pendientes mayores a 5%.

3. Cuando el césped puede desarrollarse rápidamente o cuando el flujo normal del canal se puede desviar hasta que se establezcla una capa vegetal, se pueden tener velocidades de 4 a 5 ft /s (1.2 a 1.5 m/s).

4. En césped bien establecido de buena calidad, se permiten velocidades entre 5 a 6 ft /s (1.5 a 1.8 m/s).

5. En condiciones muy especiales, se permiten velocidades hasta de 6 a 7 ft /s (1.8 a 2.1 m/s).

El diseño de canales revestidos de pasto debe, en la mayor parte de los casos, proceder en dos etapas. En la primera etapa, se supone un bajo grado de retraso, que corresponde a las estaciones de poco crecimiento a periodos en los cuales se establece la vegetación. La segunda etapa da las dimensiones pertinentes con la suposición de un alto grado de retraso. En la tabla 7.12 se resume un procedimiento recomendado donde se supone que la pendiente del canal, la forma, el tipo de pasto, y el gasto de diseño se establecieron previos al inicio del proceso de diseño. Las formas de sección comúnmente usadas son la trapecial, triangular, y parabólica, siendo las últimas dos las más populares. Coyle (1975) desarrolló tablas exhaustivas para el diseño de secciones parabólicas. El diseñador debe estar consciente, al diseñar canales revestidos con pasto, de las consideraciones principales que pueden afectar el cruce fácil de la maquinaria hidráulica durante los periodos en que esté seco el canal. Esta consideración puede requerir que los taludes del canal se diseñen para este propósito en vez de la eficiencia hidráulica o la estabilidad del canal.

EJEMPLO 7.6

Diséñese un canal triangular que será revestido con una mezcla de los siguientes pastos: de huerto, ballico italiano, agrostis alba y *Lespedeza* común. Este canal debe construirse con una pendiente de 0.025 a través de un suelo que puede caracterizarse como fácilmente erosionable. Se anticipa un flujo intermitente de 20 ft.^{3}/s (0.57 m^3/s).

Solución

En un pasto compuesto por pasto de huerto, agrostis alba, ballico italiano y *Lespedeza* común, el retraso mínimo ocurre durante el otoño, invierno, y primavera (curva D, Fig. 7.23). Para este tipo de revestimiento, pendiente dada, y suelo, la tabla 7.11 da un valor estimado de la velocidad máxima permisible de 4 ft./s (1.2 m/s). Un procedimiento de tanteos debe usarse para dimensionar el canal para la etapa 1 del diseño.

TABLA 7.12 Un procedimiento de diseño para canales revestidos con pasto

Paso	Procesos
	Etapa I
1	Supóngase un valor de n y determínese $\overline{u}R$ que corresponda a esta suposición (Fig. 7.23).
2	Selecciónese la velocidad permisible con la tabla 7.11 que corresponda a la pendiente del canal, material de revestimiento, y suelo dados y calcúlese el valor de R usando los resultados del paso 1.
3	Con la ecuación de manning y el valor supuesto de n, calcúlese $$\overline{u}R = \frac{\phi R^{5/3}\sqrt{S}}{n}$$ donde $\phi = 1.49$ en sistema inglés y $\phi = 1$ en el SI. El valor de R encontrado en el paso 2 es el usado en el lado derecho de la ecuación.
4	Repítanse los pasos 1 a 3 hasta que los valores de $\overline{u}R$ determinados en el paso 1 y 3 concuerden.
5	Determínese A a partir del gasto de diseño y la velocidad permisible (paso 2).
6	Determínense las dimensiones del canal para los valores de R y A.
	Etapa II
1	Supóngase un tirante para el canal de la etapa I y calcúlese A y R.
2	Calcúlese la velocidad media $$\overline{u} = \frac{Q}{A}$$ para el A encontrada en el paso 1.
3	Calcúlese $\overline{u}R$ usando los resultados de los pasos 1 y 2.
4	Utilícense los resultados del paso 3 para determinar n con la figura 7.23
5	Con la n del paso 4, R del paso 1, y la ecuación de Manning calcúlese $\overline{u}$.
6	Compárese la velocidad promedio calculada en los pasos 2 y 5 y repítanse los pasos 1 a 5 hasta que sean aproximadamente iguales.
7	Agréguense el bordo libre adecuado y verifíquense el número de Froude.
8	Resúmese el diseño en un bosquejo dimensionado.

Tanteo núm.	n supuesta	$\overline{u}R$ de la Fig. 7.23	R	$\overline{u}R = (1.49R^{5/3}\sqrt{S})/n$
1	0.04	3.0	0.75	3.65
2	0.045	2.0	0.50	1.65
3	0.043	2.5	0.62	2.5

Entonces, $n = 0.43$ y $R = 0.62$ ft (0.19 m). El área requerida se calcula por

$$A = \frac{Q}{\overline{u}} = \frac{20}{4} = 5 \text{ ft}^2 \text{ (0.46 m}^2\text{)}$$

Dado un canal triangular, estas condiciones da una solución explícita; *i.e.*,

$$A = zy^2 = 5 \text{ ft}^2$$

$$R = \frac{A}{2y\sqrt{1+z^2}} = \frac{5}{2y\sqrt{1+z^2}} = 0.62$$

Resolviendo esta ecuaciones da

$$z = 2.8$$

y

$$y_N = 1.3 \text{ ft (0.40 m)}$$

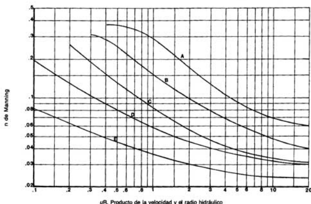


FIGURA 7.23 n de Manning en función de la velocidad, radio hidráulico, y retraso vegetal. *(Coyle, 1975.)*

En este momento el diseño de la etapa 1 se debe revisar desde el punto de vista de máximo retraso (curva C, Fig. 7.23). Por lo tanto, el tirante para la etapa II es de 1.45 ft. (0.44 m), y el bordo libre se puede

Tanteo, no.	y supuesto, ft.	A, ft²	R, ft	$\bar{u} = Q/A$, ft/s	$\bar{u}R$	n de la figura 7.23	$\bar{u} = (1.49R^{2/3}\sqrt{S})/n$, ft/s
1	1.4	5.5	0.66	3.6	2.4	0.051	3.5
2	1.5	6.3	0.71	3.2	2.3	0.054	3.5
3	1.45	5.9	0.68	3.4	2.3	0.054	3.4

estimar con la ecuación (7.1.1) como 1.5 ft. (0.46 m). Si este canal se usa para irrigación en la parcela en forma intermitente, un bordo libre más pequeño, por ejemplo, 1.0 ft. (0.30 m), sería aceptable. Los resultados se encuentran resumidos en la Fig. 7.24.

En muchos casos, el centro de los canales revestidos con pastos se reviste con grava o roca para mayor estabilización del canal y/o para producir un drenaje adecuado. Aunque Coyle (1975) presenta un nomograma para determinar el tamaño de la roca que debe usarse para un gasto y pendiente dados, también se pueden usar los conceptos sobre el inicio de movimiento tratado anteriormente en este capítulo.

EJEMPLO 7.7

Una zanja de irrigación con 8 ft. (2.4 m) de ancho con taludes revestidos con pasto debe conducir gastos de 100 ft.³/s (2.8 m³/s) por periodos prolongados con una pendiente de 0.01. Si los taludes son 2:1 y la n de Manning se estima como 0.03, determínese el tamaño de la grava que debe usarse para revestir el centro del canal.

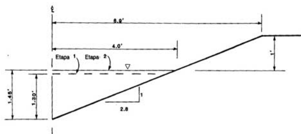


FIGURA 7.24 Resumen de los resultados del ejemplo 7.6.

Solución

Determínese el tirante normal.

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3}\sqrt{S}$$

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{1.49\sqrt{S}} = \frac{0.03(100)}{1.49\sqrt{0.01}} = 20.1$$

$$y_N = 1.6 \text{ ft } (0.49 \text{ m})$$

Entonces

$$A = (b + zy)y = [8 + 2(1.6)]1.6 = 17.9 \text{ ft}^2 \ (1.7 \text{ m}^2)$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 8 + 2(1.6)\sqrt{5} = 15.2 \text{ ft } (4.6 \text{ m})$$

$$R = 1.18 \text{ ft } (0.36 \text{ m})$$

de la ecuación (7.3.16)

$$d_{25} \simeq 11\ RS = 11(1.18)(0.01) = 0.13 \text{ ft} = 1.6 \text{ en } (0.04 \text{ m})$$

En este momento cabe notar que se han hecho numerosos estudios sobre el flujo en canales revestidos con pasto cuyos resultados se deben mencionar. Kouwen *et al.* (1973) usó tiras flexibles de plástico en el laboratorio para estudiar los efectos del movimiento ondulatorio y doblado del pasto sobre las características del flujo en el canal. Los resultados pertinentes de este estudio fueron:

1. Los canales revestidos con pasto se caracterizan aparentemente por dos valores locales del factor de fricción: uno para pasto recto y ondulante y otro para pasto caído o doblado.
2. Se encontró que el factor de fricción y, por lo tanto, la n de Manning estaban en función de la rugosidad relativa para los regímenes de flujo con pasto erecto u ondulante, pero estaban en función del número de Reynolds o $\bar{u}R$ para el pasto caído o doblado.

Phelps (1970) examinó los efectos de la densidad de la vegetación y el tirante sobre las características del flujo. Sus conclusiones fueron las siguientes:

1. Las diferencias entre las fronteras del flujo sobre vegetación que se encuentra parcialmente sumergidas es significativa y debe tomarse en cuenta.
2. Recuérdese que para superficies lisas un número de Reynolds de 2000 marca el límite del régimen laminar de flujo. Para el caso de flujo sobre pasto el número de Reynolds crítico es función del tirante.

Dada la complejidad de las superficies con vegetación, no es sorprendente que el diseño de estos canales sea empírico. Es claro que se necesita más investigación en esta área.

BIBLIOGRAFÍA

Anónimo, "Linings for Irrigation Canals," U.S. Bureau of Reclamation, Washington, 1963.

Bouwer, H., "Theoretical Aspects of Seepage from Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY3, May 1965, pp. 37–59.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Coyle, J. J., "Grassed Waterways and Outlets," *Engineering Field Manual*, U.S. Soil Conservation Service, Washington, April 1975, pp. 7-1–7-43.

Davis, C., and Sorenson, K. E., "Canals and Conduits," *Handbook of Applied Hydraulics*, 3d Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, pp. 7-1–7-34.

duBoys, P., "The Rhone and Streams with Moveable Beds," *Annales des ponts et chaussees*, section 5, vol. 18, 1879, pp. 141–195.

Fortier, S., and Scobey, F. C., "Permissible Canal Velocities," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 89, 1926, pp. 940–984.

Glover, R. E., and Florey, Q. L., "Stable Channel Profiles," *Hydraulic Laboratory Report No. Hyd-325*, U.S. Bureau of Reclamation, Washington, September 1951.

Houk, I. E., "Discussion of Permissible Canal Velocities," *Transations of the American Society of Civil Engineers*, vol. 89, 1926, pp. 971–977.

Houk, I. E., *Irrigation Engineering*, vol. II, John Wiley & Sons, New York, 1956.

Kouwen, H., and Unny, T. E., "Flexible Roughness in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 99, no. HY5, May 1973, pp. 713–728.

Lane, E. W., "Design of Stable Channels," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 120, 1955, pp. 1234–1279.

Mehrotra, S. C., "Permissible Velocity Correction Factors," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 109, no. 2, February 1983, pp. 305–308.

Palubarinova-Kochina, P. Y. A., *Theory of Groundwater Movement* (translated by J. M. R. DeWiest), Princeton University Press, Princeton, N.J. 1962.

Phelps, H. O., "The Friction Coefficient for Shallow Flows over a Simulated Turf Surface," *Water Resources Research*, vol. 6, no. 4, August 1970, pp. 1220–1226.

Shields, A., "Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik un der Turbulenzforschung auf Geschiebebegung" (Aplicaciones de los Principios de Similitud e Investigaciones sobre Turbulencia al Movimiento de Partículas de Fondo), **Mitteilungen der Preuss Versuchsanst für Wassarbau und Schiffbau**, No. 26, Berlin, 1936. (Traducción disponible por W. P. Ott and J. C. van Uchelen, Soil Conservation Service Cooperative Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena.)

Shukry, A., "Flow around Bends in an Open Flume," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 115, 1950, pp. 751–788.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975, pp. 592–595.

Subramanya, K., Madhav, M. R., and Mishra, G. C., "Studies on Seepage from Canals with Partial Lining," *Proceedings of the American Society of Civil Engineering, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 99, no. HY12, December 1973, pp. 2333–2351.

Trout, T. J., "Channel Design to Minimize Lining Material Costs," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Irrigation and Drainage Division*, vol. 108, no. IR4, December 1982, pp. 242–249.

White, C. M., "Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream," *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, vol. 174, 1940, pp. 322.

Willison, R. J., "USBR's Lower-Cost Canal Lining Program," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Irrigation and Drainage Division*, vol. 84, no. IR2, April 1958, pp. 1589-1–1589-29.

Woodward, S. M., "Hydraulics of the Miami Flood Control Project," *Miami Conservancy District Technical Report*, part VII, Dayton, Ohio, 1920

Woodward, S. M., and Posey, C. J., *Hydraulics of Steady Flow in Open Channels*, John Wiley & Sons, New York, 1941.

OCHO



Medición del flujo

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo se presentan algunos de los métodos y aparatos con que se disponen para estimar y/o medir el gasto en un canal abierto. La sección 8.2 habla sobre algunos de los aparatos disponibles y sobre un procedimiento que puede usarse en canales para medir el gasto mediante mediciones directas de la velocidad. También se ve en esta sección el método de la lancha en movimiento para estimar el gasto. Las secciones 8.3 a 8.5 tratan algunas de las estructuras que pueden emplearse para la medición de gastos. Se estudian detalladamente los vertedores, los medidores de flujo crítico (Parshall) y las alcantarillas.

8.1 INTRODUCCIÓN

Como se recalcó en el capítulo 1, el agua que fluye en canales abiertos sirve a la humanidad en muchas formas, por lo que es de crucial importancia llevar un registro preciso para cada uno de estos usos. Además, las inundaciones provocan daños tan extensos que se necesita llevar registros de estos graves acontecimientos para el diseño de puentes, alcantarillas, presas para control de avenidas, delimitación de llanuras de inundación y sistemas que prevengan a la población contra las avenidas. En este capítulo se presentan varias metodologías para la medición del gasto en un canal abierto en el campo o en el laboratorio. Gracias al rápido avance de la tecnología, el enfoque principal de este capítulo es analítico, más que descriptivo, para los aparatos disponibles.

La selección del sitio para el aforo suele determinarse por las necesidades del personal que maneja el uso del agua. Por esto, en muchos casos, los registros de gasto deben obtenerse en lugares que, desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica, están lejos de ser los ideales. Al seleccionar un lugar permanente para el aforo, en especial en canales naturales, Carter y Davidian (1968) recomendaron que se considere lo siguiente para que el flujo se pueda relacionar en forma fácil al nivel del agua:

1. El canal debe ser geométricamente estable. Por ejemplo, un margen con rocas o cascada serían sitios ideales ya que la relación entre tirantes y gastos sería permanente. Si se tiene que emplear un sitio con fondo móvil, se debe elegir un tramo del canal que tenga el flujo lo más uniforme posible.

2. El canal debe examinarse en función de establecer una sección de control artificial, como la de un medidor de flujo crítico o un vertedor.

3. Debe tomarse en cuenta la posibilidad de que el sitio se vea afectado por el flujo variado de tributarios aguas abajo, presas, mareas, u otras causas. Si tiene que emplearse un sitio así, debe usarse un tramo uniforme ubicado de tal forma que se pueda medir la pendiente de la superficie libre del agua.

4. Cerca del sitio de aforo debe existir una sección transversal donde se puedan aforar confiablemente los gastos, a fin de poder encontrar una relación elevación-gasto.

5. Debe tomarse en cuenta la posibilidad de que el flujo rodee el lugar del aforador a través de canales de inundación o como flujo subterráneo.

6. Debe tenerse en cuenta la disponibilidad y proximidad de líneas telefónicas y eléctricas.

7. El sitio de aforo tiene que estar comunicada por caminos durante las avenidas.

8. Si se desea ubicar una estación de aforo permanente, entonces el sitio tiene que localizarse correctamente con respecto a la sección en la que se va a medir y con la posición del canal que controla la relación elevación-gasto.

9. Deben existir estructuras disponibles para la medición de avenidas extremas.

Los criterios anteriores determinan un lugar ideal para el aforo, aunque rara vez se encuentra en la naturaleza; no obstante, sirven para comparar en forma racional los lugares para el aforo en un tramo del canal.

Carter y Davidian (1968) también hicieron cuatro consideraciones para el establecimiento de secciones artificiales de control para el aforo de gastos. Estas consideraciones son:

1. La estructura de la sección de control no debe producir disturbios en el flujo aguas arriba o aguas abajo de la sección.

2. La estructura debe tener la suficiente altura para eliminar los afectos causados por las condiciones variables aguas abajo.

3. La estructura debe diseñarse para que un cambio pequeño a bajos niveles de flujo provoquen cambios medibles en el nivel del agua. Además, la relación elevaciones-gasto tiene que ser tal que se pueda extrapolar en forma precisa para el caso de gastos de pico.

4. La estructura que establece la sección de control debe ser estable, y tiene que asegurarse su permanencia en condiciones extremas.

En las siguientes secciones de este capítulo se tratarán diversas estructuras como: vertedores, medidores de régimen crítico y alcantarillas.

La medición del gasto debe hacerse también en los laboratorios. La diferencia principal entre el aforo en el campo y en el laboratorio es que en el ambiente

controlado del laboratorio se pueden usar sistemas de aforo mucho más complejos. Los principios usados en el aforo de gasto en campo son igualmente aplicables a las mediciones en laboratorio.

8.2 APARATOS Y PROCEDIMIENTOS PARA AFORO DE CORRIENTES

La calibración de una relación funcional entre las elevaciones y gastos requiere mediciones precisas del gasto para varias elevaciones diferentes. Un método de aforo en una sección transversal divide a ésta en varias subsecciones, determina la velocidad media en cada subsección y resume los productos de las áreas y velocidades de cada subsección para dar el gasto total o

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \overline{u}_i A_i \tag{8.2.1}$$

donde A_i = área de la subsección i
$\overline{u}_i$ = velocidad media en la subsección i
N = número de subsecciones

El aforador de corrientes más usado en Estados Unidos es el medidor Price, que consiste en seis copas cónicas que rotan sobre el eje vertical. Cada revolución de las copas cierra un circuito eléctrico operado con pilas y produce en los audífonos del operador un chasquido audible. En aguas someras puede usarse un aparato semejante llamado *micro medidor Price.* En general el medidor Price da valores de velocidad mayores que los reales; aunque si se selecciona cuidadosamente la estación de aforo (i.e., donde haya turbulencia mínima y la corriente sea casi paralela al eje del canal) se tendrán probablemente errores menores al 2%.

Para el medidor Price, la relación entre revoluciones por unidad de tiempo y la velocidad es

$$u = a + bN \tag{8.2.2}$$

donde u = velocidad, N = número de revoluciones por unidad de tiempo, y a y b son coeficientes de calibración. Si u está en ft por segundo y N en revoluciones por segundo, entonces a es aproximadamente 0.1 y b es aproximadamente 2.2. Debe esperarse una variación pequeña en estas constantes, como consecuencia del uso y las irregularidades en su manufactura. Por causa de esto, cada medidor debe calibrarse en forma periódica.

Un segundo tipo de medidor se le conoce como *medidor de hélice.* En este medidor una hélice rota sobre el eje horizontal. En forma similar al medidor Price, la rotación de la hélice produce el cierre de un circuito y un chasquido que el operador escucha. La desventaja del medidor de hélice es que los rodamientos de la hélice no pueden protegerse contra la intrusión de agua cargada con sedimentos. En el medidor Price esta protección se logra con frecuencia al atrapar aire alrededor de los rodamientos. El medidor de hélice, por otro

lado, no está sujeto a la rotación provocada por corrientes verticales, pero el medidor Price sí.

Un tercer tipo de aforador de corrientes es aquel que se basa en el principio electromagnético. Cuando un flujo conductivo se mueve a través de un campo magnético a 90°, se induce una fuerza electromotriz con un ángulo recto al flujo del campo electromagnético y a la velocidad del fluido. El voltaje inducido por el movimiento del fluido a través del campo magnético es proporcional a la velocidad media del flujo. Varios aforadores modernos de corrientes se basan en este principio; en general estos medidores son superiores en precisión y eficiencia a los descritos anteriormente.

Una vez seleccionado el aforador y establecida una sección para la medición del gasto, se divide la sección transversal en varias secciones verticales (Fig. 8.1). En general, ninguna de las secciones verticales debe incluir más del 10% del gasto total; por lo que a menudo se requiere de 20 a 30 secciones verticales (Linsley, *et al.,* 1958). Asimismo, el número de mediciones de velocidad en una sección transversal debe limitarse a las que se puedan hacer en un tiempo razonable. Esto es particularmente crítico cuando el nivel del agua esté cambiando rápidamente. La figura 8.1 muestra una división común de la sección transversal en varias subsecciones.

Aunque la velocidad media en cualquiera de las subsecciones se puede determinar de diversas formas, la que se basa en las mediciones a 0.2 y 0.8 de la profundidad se emplea en forma casi universal. Recuérdese del capítulo 1, que la distribución vertical de velocidades está dada por

$$u = 2.5u_* \ln \frac{y}{y_o} \tag{8.2.3}$$

donde u = velocidad media longitudinal turbulenta
y = distancia desde el fondo

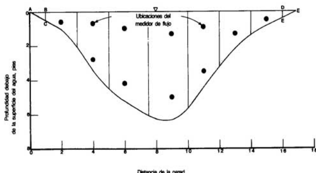


FIGURA 8.1 Determinación del gasto mediante un aforador de corriente.

u_* = velocidad al cortante
y_0 = constante de integración relacionada a la rugosidad de fondo

La velocidad media en la dirección longitudinal está dada aproximadamente por

$$\bar{u} = \frac{1}{D - y_o} \int_{y_o}^{D} \left(2.5u_* \ln \frac{y}{y_o}\right) dy$$

o

$$\bar{u} = 2.5u_* \ln \frac{D}{y_o} - 2.5u_* \tag{8.2.4}$$

donde D = tirante del flujo. De las ecuaciones. (8.2.3) y (8.2.4) se tiene la ley de distribución de velocidades

$$\bar{u} - u = 2.5u_* \left[\ln\left(\frac{D}{y_o}\right) - 1\right] - 2.5u_* \ln \frac{y}{y_o}$$

o

$$\frac{\bar{u} - u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{D}{y} - 2.5$$

y al reordenar

$$u = -2.5u_* \ln \frac{D}{y} + 2.5u_* + \bar{u} \tag{8.2.5}$$

si se considera que la velocidad media en una sección vertical está dada por

$$\bar{u} = \frac{u(0.8D) + u(0.2D)}{2} \tag{8.2.6}$$

donde u $(0.8D)$ = velocidad a 0.8 de la profundidad y u $(0.2D)$ = velocidad medida a 0.2 de profundidad. La aseveración contenida en la ecuación (8.2.6) se puede demostrar primero sustituyendo a $0.8D$ por y en la ecuación (8.2.5) o

$$u(0.8D) = -0.558u_* + 2.5u_* + \bar{u} \tag{8.2.7}$$

y después insertando a $0.2D$ por y en la ecuación (8.2.5) o

$$u(0.2D) = -4.023u_* + 2.5u_* + \bar{u} \tag{8.2.8}$$

Si se suman las ecuaciones (8.2.7) y (8.2.8) y se dividen entre 2 da

$$\frac{u(0.2D) + u(0.8D)}{2} = -2.29u_* + 2.5u_* + \bar{u} \tag{8.2.9}$$

Entonces, si la ecuación (8.2.6) es válida, de la ecuación (8.2.9) se tiene

$$2.29u_* = 2.5u_*$$

lo cual demuestra que la aseveración expresada en forma matemática por la ecuación (8.2.6) es aproximadamente correcta. De una manera similar puede demostrarse que la velocidad a 0.6 de profundidad es casi igual a la velocidad media vertical. Por tanto un procedimiento para la determinación de la velocidad media en una subsección del canal de la sección transversal mostrada en la figura 8.1 sería

1. La profundidad total se determina con sondeos con el cable del aforador de corrientes o con un palo.

2. Levántese el aforador a 0.8 de la profundidad total y mídase la velocidad.

3. Levántese el aforador a 0.2 de la profundidad total y determínese la velocidad.

4. Determínese la velocidad media de esta sección con la ecuación (8.2.6).

Para aguas someras, se puede usar una sola medición a 0.6 de la profundidad.

EJEMPLO 8.1

Si los datos de la tabla 8.1 son las velocidades en la sección transversal mostrada en la figura 8.1, estímese el gasto.

Solución

El U.S. Geological Survey recomienda estimar el gasto en una sección transversal mediante el método de la media sección para el cálculo

TABLA 8.1 Datos sobre el flujo para el ejemplo 8.1

Distancia desde la pared hasta el medidor, en ft	Profundidad, ft	Profundidad del medidor en ft*	Velocidad ft/s
2	1.0	0.6	0.54
4	3.5	2.8	0.98
		0.7	1.6
6	5.2	4.2	1.3
		1.0	1.6
9	6.3	5.0	1.3
		1.3	1.8
11	4.4	3.5	1.5
		0.9	1.7
13	2.2	1.3	1.1
15	0.8	0.5	0.64
17	0		

*Distancia entre la superficie libre del agua y el medidor.

de áreas de las subsecciones subsecuentes. Este método supone que las velocidades medias en cada subsección deben asociarse con un área que se extiende lateralmente desde la mitad de la distancia de la ubicación anterior del aforador y verticalmente de la superficie del agua a la profundidad del sondeo. En forma numérica, ésta es una integración rectangular. Si se emplea este esquema de integración, entonces la ecuación (8.2.1) se convierte en

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{2} + \frac{b_{i+1} - b_i}{2} \right) y_i \bar{u}_i$$

donde b_i = distancia desde un punto inicial a la posición del i del aforador. En la tabla 8.2 se encuentran resumidos los resultados de este esquema del cálculo. Nótese respecto a esta solución, que el flujo en las subsecciones *ABC* y *DEF* se supone cero y que más del 10% del gasto total pasa a través de un número de subsecciones.

Un segundo método para resolver este problema es usar el esquema trapecial de integración. Por ejemplo, el ancho de la subsección i está dado por

$$w_i = \frac{b_i - b_{i-1}}{2} + \frac{b_{i+1} - b_i}{2}$$

entonces

$$Q = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{u}_i \left(\frac{d_{i-1/2} + d_{i+1/2}}{2} \right)$$

donde $d_{i-1/2}$ = profundidad a la mitad de la distancia entre la ubicación i e i -1, y $d_{i+1/2}$ = profundidad a la mitad de la distancia entre i e $i+1$. En la tabla 8.3 se resumen los resultados de este método.

TABLA 8.2 Solución del ejemplo 8.1 por el método de la sección media

Ancho subsección, ft	Profundidad subsección, ft	Velocidad media subsección, ft/s	Gasto subsección. ft³/s	Gasto acumulado, ft³/s
1.0	—	0	0	—
2.0	1.0	0.54	1.1	1.1
2.0	3.5	1.3	9.1	10.0
2.5	5.2	1.4	18	28
2.5	6.3	1.6	25	53
2.0	4.4	1.6	14	67
2.0	2.2	1.1	4.8	72
2.0	0.8	0.64	1.0	73
1.0	—	0	0	73

TABLA 8.3 Solución del ejemplo 8.1 mediante integración trapecial

Distancia de la pared al medidor, ft	2	4	6	9	11	13	15
Distancia de la pared al inicio de la subsección, ft	1	3	5	7.5	10	12	14
Distancia de la pared al final de la subsección, ft	3	5	7.5	10	12	14	16
Ancho de la subsección, ft	2	2	2.5	2.5	2	2	2
Profundidad al inicio de la subsección, ft	0.5	2	4.5	6	5.5	3	1.5
Profundidad al final de la subsección, ft	2	4.5	6	5.5	3	1.5	0.5
Área de la subsección, pies²	2.5	6.5	13	14	8.5	4.5	2
Velocidad a 0.8 de la profundidad, ft/s	0.54*	0.98	1.3	1.3	1.5	1.1*	0.64*
Velocidad a 0.2 de la profundidad, ft/s	—	1.6	1.6	1.8	1.7	—	—
Velocidad media de la subsección, ft/s	0.54	1.3	1.4	1.6	1.6	1.1	0.64
Gasto de la subsección, ft³/s	1.3	8.4	18	22	14	5	1.3
Gasto acumulado, ft³/s	—	9.7	28	50	64	69	70

* Velocidad medida a 0.6 de profundidad.

Los procedimientos de aforo de corrientes empleados por el U.S. Geological Survey se escriben detalladamente en Corbett, *et al.*,(1943).

Los métodos anteriores para la estimación del gasto en secciones transversales están estandarizados y son muy conocidos; aunque en muchos casos importante (e.g., grandes ríos y estuarios) éstos no son prácticos e involucran procedimientos costosos y complejos. El U.S. Geological Survey ha desarrollado una técnica de medición denominada "método de la lancha en movimiento" que evita estas dificultades y proporciona resultados que están dentro del 5% de los resultados obtenidos con los métodos convencionales, cuando el ancho del canal excede los 1000 ft (300 m) (Smoot y Novak, 1969).

El método de la lancha en movimiento emplea una embarcación pequeña y maniobrable equipada con una ecosonda —para medir la profundidad— y con un medidor de gasto de eje horizontal. Una situación común de medida se muestra en forma esquemática en la figura 8.2*a*. Respecto a la figura 8.2*b* , v es la velocidad que marca el medidor en la lancha, v_b es la velocidad de la lancha en la dirección perpendicular al flujo, u es la velocidad del flujo, y α

es el ángulo medido por el indicador de ángulo de la lancha. Entonces, si α y v son datos,

$$u = v \operatorname{sen} \alpha \tag{8.2.10}$$

Además,

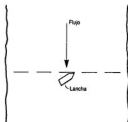
$$L_b = \int v \cos \alpha \, dt \tag{8.2.11}$$

donde L_b = la distancia recorrida por la lancha en su trayectoria real, siempre que la velocidad del flujo sea perpendicular a ésta y t = tiempo. A menudo, α puede suponerse relativamente constante entre dos puntos consecutivos de medición, con esta suposición la ecuación (8.2.11) se convierte en

$$L_b = \cos \alpha \int v \, dt \tag{8.2.12}$$

El equipo desarrollado por el U.S. Geological Survey está calibrado para determinar esta distancia en forma automática.

Por lo que, cuando la lancha atraviesa la corriente, se tiene un registro continuo del fondo y se mide la velocidad del flujo en un número predeterminado de puntos a través de la sección transversal. Con estos datos, el gasto total puede estimarse de la misma forma que en el ejemplo 8.1. Con frecuencia deben hacerse dos correcciones al usar éste método. Primero, la ecuación



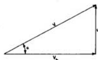


FIGURA 8.2 *(a)* Delineación de la sección transversal y corriente. *(b)* Diagrama vectorial de velocidades.

(8.2.12) supone que existe una relación de triángulo recto entre los vectores de velocidad. Si éste no fuera el caso, entonces el ancho total del río -determinado por la ecuación (8.2.12)- será más grande o menor al medido. Ya que en la práctica sólo se mide el área total de la sección transversal, solamente podrá corregirse el área total de flujo. Sea

$$K_T = \frac{T_M}{T_C} \tag{8.2.13}$$

donde K_T = factor de ajuste de ancho-área
T_M = ancho superior medido de la sección transversal
T_C = ancho superior de la sección transversal calculado mediante la ecuación (8.2.12)

Con K_T se ajustan el área total de flujo y el gasto. Segundo, el medidor de velocidades montado en la lancha se utiliza para medir la velocidad a una profundidad constante debajo de la superficie del agua-normalmente de 3 a 4 ft (0.91 a 1.2 m). Por tanto, no se mide la velocidad media vertical del flujo. Así que debe calcularse un coeficiente de corrección de velocidad. Esto se logra haciendo curvas de distribuciones verticales de velocidad en varios cortes de la sección transversal mediante los métodos convencionales (con los medidores de velocidad descritos antes). Para efectuar esto, se debe hacer una medición a la misma profundidad a la que lo hace el medidor de la lancha. Sea

$$K_u = \frac{\overline{u}}{u_B} \tag{8.2.14}$$

donde K_u = factor de ajuste de la velocidad media vertical
$\overline{u}$ = velocidad media vertical
u_B = velocidad observada a una profundidad de 3 o 5 ft (0.91 o 1.2 m)

generalmente -si se quiere obtener un coeficiente de corrección de velocidad representativo- K_u debe establecerce en varias verticales ubicadas en forma estratégica y que representen una gran parte del gasto total. Una vez obtenido un valor representativo de K_u de la sección transversal, no es necesario reestablecerlo cada vez que se estime el gasto. De todas maneras, la validez de este coeficiente debe establecerse sobre un rango razonable de niveles de flujo.

EJEMPLO 8.2

Al usar el método de la lancha en movimiento para la determinación del gasto, se estima que la sección transversal tiene 470 m (1540 ft) de ancho y un área de flujo de 3900 m² (42 000 ft². El gasto se estima en 4400 m³/s (155 000 ft³). Si el ancho real es de 480 m (1574 ft) y K_u se determinó previamente como 0.91, estímese el área y el gasto reales.

Solución

El área real o corregida se calcula primero al determinar el factor de ajuste de ancho-área o

$$K_T = \frac{T_M}{T_C} = \frac{480}{470} = 1.02$$

Entonces el área ajustada de flujo es

$$A = 3900\ (1.02) = 3978\ \text{m}^2\ (42\ 800\ \text{ft}^2)$$

Por lo que el gasto también se ajusta o

$$Q = 4400\ (1.02) = 4488\ \text{m}^3/\text{s}\ (158\ 000\ \text{ft}^3/\text{s})$$

El gasto también debe multiplicarse por el factor de ajuste de la velocidad vertical o

$$Q = 4488\ (0.91) = 4084\ \text{m}^3/\text{s}\ (144\ 000\ \text{ft}^3/\text{s})$$

Entonces, el área correcta de flujo es 3978 m^2 (42 800 ft^2, y el gasto correcto es de 4084 m^3/s (144 000 ft^3/s).

8.3 ESTRUCTURAS DE AFORO: VERTEDORES

En muchos casos es ventajosos empotrar una estructura para medir el flujo en el canal. En algunos casos, es posible usar estructuras que ya se tienen en el canal para aforar el gasto. Entre las estructuras que se emplean primordialmente para el aforo se encuentran los vertedores y los medidores de flujo crítico. Dentro de las estructuras que más se utilizan en otras aplicaciones, pero que también pueden servir para el aforo, se encuentran las alcantarillas, pilas de puentes y diques.

Por lo general, las dimensiones de las estructuras que más se emplean para el aforo están estandarizadas; pero los materiales de construcción pueden variar. Los criterios de selección de material de construcción usados incluyen: disponibilidad, costo de mano de obra, vida útil de la estructura y prefabricación. Aunque el costo de construcción y mantenimiento de la estructura aforadora es importante, la consideración principal debe ser la veracidad y facilidad de uso de la estructura.

Por definición, un vertedor es una placa cortada de forma regular a través de la cual fluye el agua. Los vertedores pueden clasificarse según la forma del corte (e.g., en forma de "V" triangular, rectangular, trapecial, y parabólico). La ecuación del gasto sobre el vertedor no se puede derivar en forma exacta porque: 1) las líneas de flujo sobre un vertedor de una forma difieren de las de otro con diferente forma, y 2) la forma del flujo varía con el gasto. En el desarrollo que sigue, se incluyen los efectos gravitacionales, pero los efectos viscosos, tensión superficial, la naturaleza de la cresta del vertedor, la distribución de velocidad en el canal de acceso, la rugosidad del canal del vertedor y las dimensiones del canal de acceso no se consideran en forma explícita.

Vertedores de cresta ancha

Un vertedor de cresta ancha es, por definición, una estructura con una cresta horizontal sobre la cual la presión del flujo se puede considerar hidrostática (Fig. 8.3). Para que se presente esta situación, se tiene, (véase la fig. 8.3) que debe satisfacerse la siguiente desigualdad (Bos, 1976)

$$0.08 \leq \frac{H_1}{L} \leq 0.50 \tag{8.3.1}$$

Cuando H_1/L es menor que 0.08, no se pueden despreciar las pérdidas por fricción. Cuando H_1/L es mayor que 0.50, entonces la curvatura de las líneas de flujo es de tal magnitud que envalida la suposición de distribución hidrostática de presiones. En la tabla 8.4 se resumen las ecuaciones de gastos para vertedores de cresta ancha con secciones de control de distintas formas. Estas ecuaciones se dedujeron aplicando la ecuación de Bernoulli entre la sección de aguas arriba y la de control (véase el Cap. 2 o Bos, 1976). En estas ecuaciones, C_V es el coeficiente de velocidad que debe usarse para corregir la omisión de la carga de velocidad en el canal de llegada. C_D es un coeficiente de gasto que se introdujo para tomar en cuenta los efectos viscosos, la turbulencia, la distribución no uniforme de velocidades y la aceleración centrípeta en la derivación de las ecuaciones de gasto.

El coeficiente C_V está dado por

$$C_v = \left(\frac{H_1}{h_1}\right)^{\phi} \tag{8.3.2}$$

donde ϕ = la potencia de la variable h en la ecuación de gasto. Por ejemplo, para una sección de control rectangular $\phi = 1.5$. Dado que a menudo no se mide $H_1 1$, el empleo de la ecuación (8.3.2) se dificulta en la práctica. En la figura 8.4, C_V se grafica como una función del parámetro $C_D A^*/A_1$ donde $A^* =$

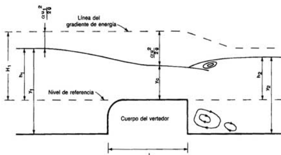
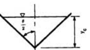
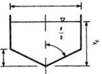
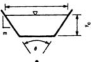
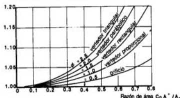


FIGURA 8.3 Definición del simbolismo usado para vertedores de cresta ancha.

TABLA 8.4 Resumen de las ecuaciones de gasto para vertedores de cresta ancha y delgada

Tipo	Definición esquemática de la sección	Ecuación de gasto	Ecuación número
Rectangular		Cresta ancha $Q = C_D C_v \frac{2}{3}(\frac{2}{3}g)^{1/2} T h_1^{3/2}$	(8.3.3)
		Cresta delgada $Q = C_e \frac{2}{3}(2g)^{1/2} b h_1^{3/2}$	(8.3.18)
Parabólico		Cresta ancha $Q = C_D C_v (\frac{3}{4} f g)^{1/2} h_1^2$	(8.3.4)
		Cresta delgada $Q = C_e \frac{1}{2}\pi (fg)^{1/2} h_1^2$	(8.3.19)

Triangular		Cresta ancha $Q = C_D C_v \frac{16}{25}(\frac{2}{5}g)^{1/2} \tan(\frac{1}{2}\Theta)h_1^{5/2}$ Cresta delgada $Q = C_e \frac{8}{15}(2g)^{1/2} \tan(\frac{1}{2}\Theta)h_1^{5/2}$	(8.3.5) (8.3.20)
Triangular truncado		Cresta ancha $H_1 \leq 1.25H_b$ [use Eq. (8.3.5)] $H_1 \geq 1.25H_b$ $Q = C_D C_v T \frac{2}{3}(\frac{2}{3}g)^{0.5}(h_1 - \frac{1}{2}H_b)^{3/2}$ Cresta delgada $H_1 \leq H_b$ [use Eq. (8.3.20)] $H_1 \geq H_b$ $Q = C_e \frac{4}{15}(2g)^{0.5} \frac{T}{H_b}[h_1^{2.5} - (h_1 - H_b)^{2.5}]$	(8.3.5) (8.3.6) (8.3.20) (8.3.21)
Trapecial		Cresta ancha $Q = C_D(Ty_c + my_c^2)[2g(H_1 - y_c)]^{1/2}$ Cresta delgada $Q = C_e \frac{2}{3}(2g)^{0.5}(b + \frac{4}{5}h_1 \tan \frac{1}{2}\Theta)h_1^{1.5}$	(8.3.7) (8.3.22)



A^* Área mojada en la sección de control si el tirante $y = h_1$

A_1 Área mojada en la sección de medición de la carga

FIGURA 8.4 C_v en función del tipo de vertedor y del parámetro $C_d A^*/A_1$. (*Bos, 1976.*)

al área imaginaria de flujo en la sección de control, si se supone que el tirante en esta sección es h_1 y C_D es el coeficiente de gasto. (Bos, 1976).

Vertedores rectangulares de cresta ancha Desde el punto de vista constructivo, el vertedor rectangular de cresta ancha es un medidor bastante simple de construir. En su forma más simple, las caras aguas arriba y aguas abajo del vertedor son planos lisos y verticales. El bloque del vertedor debe ubicarse en un canal rectangular perpendicularmente a la dirección del flujo, además se debe cuidar especialmente que la superficie de la cresta haga un ángulo recto afilado con la cara de aguas arriba del vertedor. En la figura 8.5 se muestra esquemáticamente este tipo de vertedor con mediciones usuales (Bos, 1976). (Bos, 1976).

Se tienen cuatro tipos de regímenes de flujo, según sea el valor del parámetro H_1/L.

1. $H_1/L < 0.08$: en este caso el flujo sobre el vertedor es subcrítico, por lo que el vertedor no se puede emplear para medir el gasto.

2. $0.08 \leq H_1/L \leq 0.33$: en este intervalo el vertedor puede describirse correctamente como de cresta ancha, ya que se presenta una región de flujo paralelo en la vecindad del punto medio de la cresta. Con frecuencia C_D tiene un valor constante en este intervalo de H_1/L.

3. $0.33 \leq H_1/L \leq 1.5$ a 1.8: en este intervalo el vertedor no puede considerarse como de cresta ancha, así que debe clasificarse como de cresta delgada.

4. $1.5 \leq H_1$L: en este intervalo el agua no se separa en forma completa sobre la cresta, lo que provoca que sean inestables las líneas de corriente

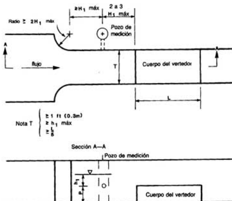


FIGURA 8.5 Dimensiones tipo de un vertedor rectangular de cresta ancha.

sobre la cresta. Para valores de H_1/L mayores que tres, el vertedor es similar a los de cresta delgada y puede emplearse para estimar el gasto.

La ecuación (8.3.2) (Tabla 8.4) puede usarse para estimar el gasto en vertedores rectangulares de cresta ancha. Resultados experimentales sugieren que C_D es una función de los parámetros $H_{1/L}$ y $H_T/(H_1+p)$. Si se tiene flujo paralelo en esta sección y la velocidad de llegada no influye en el flujo sobre la cresta, entonces C_D permanece relativamente constante. Por tanto, C_D se supone constante cuando

$$0.08 \leq \frac{h_1}{L} \leq 0.33 \qquad \text{y} \qquad \frac{h_1}{h_1 + p} \leq 0.35$$

y tiene un valor de 0.848, valor que recibe el nombre de *coeficiente base de gasto*. Si no se satisface uno de estos límites, entonces el coeficiente base de gasto debe multiplicarse por un coeficiente de corrección *f* que puede obtenerse con las figuras 8.6 y 8.7. Una vez determinado C_D se puede determinar C_v con la figura 8.4.

Una variante del vertedor rectangular de cresta ancha es el vertedor rectangular horizontal de cresta ancha, de punta redondeada (Fig. 8.8). En este diseño, la arista de aguas arriba está redondeada para que no se presente separación de flujo. Aguas abajo de la cresta horizontal se puede tener: una

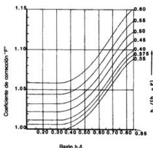


FIGURA 8.6 Factor de corrección F en función de h_1/L y $h_1/(h_1+p)$ para vertedores rectangulares de cresta ancha. (Bos, 1976.)

cara vertical, una superficie inclinada, o una esquina redondeada. Para este tipo de vertedor el coeficiente de gasto está dado por

$$C_D = \left[1 - \frac{2x(L-r)}{T}\right]\left[1 - \frac{x(L-r)}{h_1}\right]^{3/2} \tag{8.3.8}$$

donde todas las variables se definen en la figura 8.8 y x es un parámetro que toma en cuenta los efectos de la capa límite (Bos, 1976). Para la instalación del vertedor de concreto bien acabado, $x \approx 0.005$ y para instalaciones en laboratorio donde se usan agua limpia, $x \approx 0.003$ (Bos, 1976).

Vertedores triangulares de cresta ancha En corrientes naturales y canales de riego donde se deben medir una gran variedad de gastos, el vertedor triangular tiene numerosas ventajas. Primero, para gastos grandes provee un ancho grande que minimiza el efecto aguas arriba. Segundo, para gastos pequeños, el ancho se reduce, lo que originá una sensibilidad aceptable del vertedor para estos gastos.

En la tabla 8.4, la ecuación de gasto del vertedor triangular [Eq.(8.3.5)[es un caso especial del vertedor triangular truncado. En la figura 8.9 se encuen-

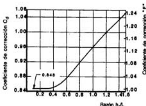


FIGURA 8.7 C_D y F en función de h_1/L y $h_1/(h_1 + p) \leq 0.35$ para canales rectangulares de cresta ancha

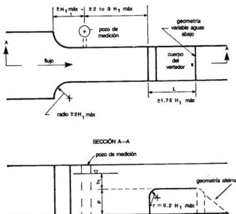


FIGURA 8.8 Dimensiones tipo de un vertedor de cresta ancha con arista redondeada.

tran las dimensiones típicas para un canal triangular truncado. Para este tipo de vertedor, el coeficiente de gasto se obtiene de la figura 8.10, y el de velocidad se puede determinar con la figura 8.4.

Otros tipos

En este momento debe tomarse en cuenta que no se tiene bastante información publicada para permitir una estimación genérica de los coeficientes de gasto para vertedores parabólicos y trapeciales de cresta ancha.

Vertedores de cresta delgada

Si la longitud de cresta del vertedor en la dirección del flujo es tal que $H_1/L > 15$ (Fig. 8.11), entonces el vertedor se denomina *cresta delgada*. En la práctica, la longitud de cresta en un vertedor de cresta delgada suele ser menor que 6.6 × 10³ft (2.0 × 110³m), por lo que, aun para los niveles mínimos de operación, el flujo se separa del cuerpo del vertedor aguas abajo de éste. En este caso se forma una bolsa de aire debajo de la lámina vertedora (Fig. 8.11), desde la cual el chorro superior remueve continuamente el aire. En la práctica, es necesario diseñar el vertedor de cresta delgada para que la presión en la bolsa de aire se mantenga constante, de otra forma se presentarán las siguientes características indeseables de operación.

1. Al decrecer la presión en la bolsa de aire, la curvatura del chorro superior aumenta, por ende, el valor del coeficiente de gasto también aumenta.

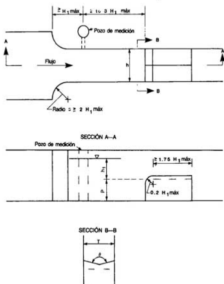


FIGURA 8.9 Dimensiones usuales de un vertedor triangular de cresta ancha.

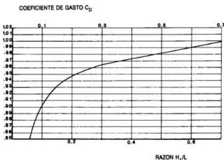


FIGURA 8.10 C_D en función de H_1/L para vertedores triangulares de cresta ancha, (*Bos, 1976.*)

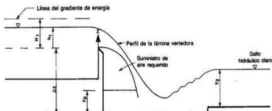


FIGURA 8.11 Definición esquemática de un vertedor de cresta delgada.

2. Si el suministro de aire en la bolsa es irregular, entonces el chorro vibrará y el flujo sobre el vertedor será no permanente. Si la frecuencia del suministro irregular de aire a la bolsa, del chorro superior, y de la estructura del vertedor son aproximadamente iguales, entonces la vibración del chorro puede causar la falla de la estructura.

Bos (1976) determinó empíricamente que el gasto máximo de aire requerido para la aeración completa por unidad de ancho del vertedor está dada por

$$q(\text{aire}) = 0.1\left[\frac{q}{(y_p/h_1)^{1.5}}\right] \tag{8.3.9}$$

donde $q(\text{aire})$ = gasto por unidad de ancho requerido para la aeración completa
h_1 = carga sobre el vertedor
q = gasto por unidad de ancho sobre el vertedor
y_p = tirante del agua en la zona debajo de la lámina vertedora

Además notó que si se forma un salto hidráulico aguas abajo del vertedor, entonces

$$y_p = \Delta z\left(\frac{q^2}{g\,\Delta z^2}\right)^{0.22} \tag{8.3.10}$$

Si se produce un salto ahogado aguas abajo del vertedor, entonces $y_p = y_2$.

EJEMPLO 8.3

Si $h_1 = 0.60$ m (2.0 ft), $q = 0.86$ (m³/s)/m [9.2 (ft³/s)/ft], y $y_p = 0.90$ m (3.0 ft), determine la demanda total de aire para un vertedor con 6.5 m (21 ft) de ancho. Además, si éste se suministra por medio de una tubería simple de acero de 2.5 m (8.2 ft) de largo con un codo recto y

una entrada no redondeada, determínese el diámetro del tubo. *Nota:* este ejemplo se adaptó de Bos (1976).

Solución

De la ecuación (8.3.9)

$$q(\text{aire}) = 0.1\left[\frac{q}{(y_p/h_1)^{1.5}}\right] = 0.1\left[\frac{0.86}{(0.90/0.60)^{1.5}}\right]$$

$$= 0.047(\text{m}^3/\text{s})/\text{m}\ [0.51(\text{ft}^3/\text{s})/\text{ft}]$$

Se tiene, para un ancho de 6.5 m (21 ft), que el gasto total de aire requerido es

$$Q_A = bq\ (\text{aire}) = 6.5(0.047) = 0.30\ \text{m}^3/\text{s}\ (11\ \text{ft}^3/\text{s})$$

El diámetro de la tubería de acero requerida para dar este gasto de aire debajo del Pergil de la descarga del vertedor puede determinarse aplicando la ecuación de energía de Bernoulli con pérdidas menores y de fricción. En la práctica, el flujo del aire a través del tubo de ventilación se facilita al permitir una pequeña succión en la bolsa debajo del Pergil. En este caso, supóngase que la succión máxima permisible es 0.04 m (0.13 ft) de columna de agua. Con la figura 8.12 se tiene que la ecuación de Bernoulli, es

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \sum_{i=1}^{3} K_i\frac{u^2}{2g} + \frac{fL}{D}\frac{u^2}{2g}$$

y al reordenar

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_a g} = \left[\sum_{i=1}^{3} K_i + \frac{fL}{D}\right]\frac{u^2}{2g}$$

$$= \left[K_e + K_b + K_{ex} + \frac{fL}{D}\right]\frac{u^2}{2g} \qquad (8.3.11)$$

donde
ρ_a = densidad del aire
p_1 = Presión en el punto 1
p_2 = presión en el punto 2
K_e = coeficiente de pérdida por entrada (supóngase que $K_e = 0.5$)
K_b = coeficiente de pérdida por codo (supóngase que $K_b = 1.1$)
K_{ex} = pérdida por salida (supóngase que $K_{ex} = 1.$)
f = factor de fricción de Darcy Weisbach (Supóngase que $f = 0.02$)
u = velocidad del aire en el tubo

L = longitud del tubo
D = diámetro del tubo

Puesto que la ecuación de Bernoulli se escribe en términos del fluido del flujo y aire y que la presión en la bolsa de aire está dada en metros de agua, se necesita una conversión de presiones.

$$\left(\frac{p_2}{\rho g}\right)_{\text{aire}} = \left(\frac{p_2}{\rho g}\right)_{\text{agua}} \frac{\rho_w}{\rho_a}$$

Ya que además se trata de presiones relativas y no de absolutas, supóngase que $p_1 = 0$. La ecuación (8.4.11) se convierte en

$$\left(\frac{p_2}{\rho g}\right)_{\text{agua}} = \frac{\rho_a}{\rho_w}\left(K_e + \frac{fL}{D} + K_b + K_{ex}\right)\frac{u^2}{2g}$$

o

$$0.04 = \frac{1}{830}\left[0.5 + \frac{0.02(2.5)}{D} + 1.1 + 1\right]\frac{u^2}{2g} \qquad (8.3.12)$$

De la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_{\text{aire}} = 0.30 = \frac{\pi D^2}{4}u$$

o

$$u = \frac{4(0.30)}{\pi D^2} \qquad (8.3.13)$$

Al sustituir la ecuación (8.3.13) en la (8.3.12) y al simplificar se tiene

$$0.04 = \frac{1}{830}\left[2.6 + \frac{0.05}{D}\right]\frac{(0.30)^2}{12D^4} \qquad (8.3.14)$$

Si se resuelve la ecuación (8.3.14) por tanteos, da $D \simeq 0.16$ m (0.52 ft).

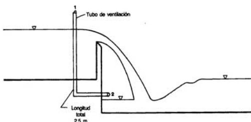


FIGURA 8.12 Esquema del tubo de ventilación

Para el caso de un vertedor de cresta delgada, el concepto de flujo crítico no es aplicable. Para este tipo de aforadores, la ecuación de gasto se deduce al suponer que el vertedor se comporta como un orificio con una superficie libre de agua y que las siguientes suposiciones son válidas:

1. La altura del nivel del agua sobre la cresta es h_l y no hay contracción.

2. Las velocidades sobre la cresta del vertedor son casi horizontales.

3. La carga de la velocidad de llegada puede despreciarse.

Respecto a la figura 8.11, la velocidad en un punto arbitrario en la sección de control se encuentra a partir de la ecuación de Bernoulli como

$$u = [2g(h_1 - z)]^{0.5} \tag{8.3.15}$$

El gasto total sobre el vertedor puede entonces obtenerse por integración o

$$Q = \sqrt{2g} \int_{z=0}^{z=h_1} b(z)(h_1 - z)^{0.5}\, dz \tag{8.3.16}$$

donde $b(z)$ = ancho del vertedor a la elevación z sobre la cresta de éste. En esta etapa, debe introducirse un coeficiente de gasto efectivo C_e para tomar en cuenta las suposiciones hechas, así la ecuación de gasto resultante es

$$Q = C_e\sqrt{2g} \int_{z=0}^{z=h_1} b(z)(h_1 - z)^{0.5}\, dz \tag{8.3.17}$$

La ecuación (8.3.17) ha dado una representación satisfactoria en mediciones empíricas y se usa en forma casi universal. Las ecuaciones de gasto para varias secciones de control se resumen en la tabla 8.4.

Vertedores rectangulares de cresta delgada El vertedor rectangular de cresta delgada se puede describir como un corte rectangular ubicado simétricamente en una placa delgada perpendicular a los lados y el fondo de un canal abierto, recto, normalmente rectangular (Fig. 8.13). Dentro de esta categoría hay tres subdivisiones:

1. *Totalmente contraídos:* es aquel que sus lados y fondo están lo suficientemente lejos de la cresta vertedora, de tal forma que no tengan efecto sobre la contracción de la lámina vertedora.

2. *Parcialmente contraído:* es el que tiene una contracción de la lámina vertedora que no se desarrolló completamente, como consecuencia de la proximidad de las fronteras del canal.

3. *Ancho libre:* es aquel en el cual el corte se extiende completamente a través del canal de llegada; en la figura 8.13 $b/T = 1$.

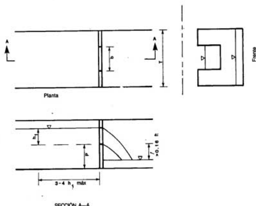


FIGURA 8.13 Vertedor rectangular de cresta delgada.

En la tabla 8.5 se resumen los criterios geométricos para la clasificación de un vertedor considerado completamente contraído. Los vertedores rectangulares de cresta delgada que no cumplen con estos criterios, no son de ancho libre, por lo que deben considerarse como parcialmente contraídos.

De la tabla 8.4, el valor teórico del gasto de un canal rectangular de cresta delgada está dado por la ecuación (8.3.18). Kindsvater y Carter (1957) modificaron esta ecuación teórica para que fuera aplicable a todos los vertedores rectangulares de cresta delgada sin importar que fuesen totalmente contraídos, parcialmente contraídos o de ancho libre. La ecuación para estimar el gasto en este tipo de vertedor es

$$Q = \tfrac{2}{3}\, C_e \sqrt{2g}\; b_e h_e^{1.5} \tag{8.3.23}$$

donde b_e = ancho efectivo = $b + K_b$
h_e = carga efectiva = $h_1 + K_h$
C_e = coeficiente de gasto efectivo

Los parámetros K_b y K_h representan el efecto combinado de la viscosidad y tensión superficial sobre el flujo. K_h generalmente se considera constante, con un valor apropiado de 0.003 ft (0.001 m) recomendado para todos los valores de b/T y h_1/p. K_b se ha determinado en forma empírica como una función de b/T (Fig. 8.14). Las ecuaciones para C_e como una función de b/T y h_1/p se resumen en la tabla 8.6.

TABLA 8.5 Definición de un vertedor rectangular de cresta delgada totalmente contraído

$$B - b \geq 4h_1$$
$$\frac{h_1}{p} \leq 0.5$$
$$\frac{h_1}{b} \leq 0.5$$
$$0.23 \leq h_1 < 2 \text{ ft}$$
$$b \geq 1 \text{ ft}$$
$$p \geq 1 \text{ ft}$$

Deben tomarse en cuenta las siguientes limitaciones en el uso de este tipo de vertedor:

1. El valor mínimo recomendado de h_l es aproximadamente 0.10 ft (0.03 m). Este límite se deriva de una consideración sobre la precisión en la que se puede medir h_l relativa a la importancia de la viscosidad y tensión superficial del flujo.

2. Si h_l/p excede 5, el tirante crítico puede presentarse en el canal de llegada e invalidar las suposiciones con las cuales se obtuvo. La ecuación (8.3.18) (Bos, 1976). Bos (1976) recomendó que para medir en forma precisa el gasto $h_l/p \leq 2$ y $p \geq 0.30$ ft (0.10 m).

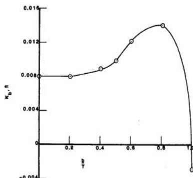


FIGURA 8.14 K_bT en función de b/T, para vertedores rectangulares de cresta ancha. (*Bos, 1976.*)

TABLA 8.6 C_e **en función de** b/T **y** h_1/p **para vertedores rectangulares de cresta delgada**

b/T	C_e
1.0	$C_e = 0.602 + 0.075\ h_1/p$
0.9	$C_e = 0.599 + 0.064\ h_1/p$
0.8	$C_e = 0.597 + 0.045\ h_1/p$
0.7	$C_e = 0.595 + 0.030\ h_1/p$
0.6	$C_e = 0.593 + 0.018\ h_1/p$
0.5	$C_e = 0.592 + 0.011\ h_1/p$
0.4	$C_e = 0.591 + 0.0058\ h_1/p$
0.3	$C_e = 0.590 + 0.0020\ h_1/p$
0.2	$C_e = 0.589 - 0.0018\ h_1/p$
0.1	$C_e = 0.588 - 0.0021\ h_1/p$
0	$C_e = 0.587 - 0.0023\ h_1/p$

3. El ancho del vertedor debe exceder los 0.50 ft (0.15 m); esto es,

$$b \geq 0.50 \text{ ft}$$

4. A causa de los requisitos de aeración, el nivel aguas abajo del vertedor debe estar, por lo menos, a 0.16 ft (0.05 m) debajo de la elevación de la cresta del vertedor.

Vertedores triangulares (en V) de cresta delgada Este vertedor se puede describir mejor como un corte en V ubicado simétricamente en una placa delgada que es perpendicular al fondo y a los lados del canal abierto (Fig. 8.15). Dentro de esta categoría se tienen dos subdivisiones:

1. Totalmente contraídos

2. Parcialmente contraídos

En la tabla 8.7, se especifican los criterios geométricos para la clasificación de este tipo de vertedor como total o parcialmente contraído (Bos, 1976).

De la tabla 8.4, se tiene que el valor teórico del gasto en un vertedor triangular está dado por la ecuación (8.3.20). Para poder aplicar esta ecuación a vertedores parcial o totalmente contraídos se debe modificar la ecuación, así que

$$Q = \tfrac{8}{15} C_e (2g)^{0.5} (\tan \tfrac{1}{2}\theta)\, h_e^{2.5} \tag{8.3.24}$$

donde h_e = carga efectiva = $h_1 + K_h$ y C_e es el coeficiente de gasto efectivo. En la figura 8.16 se encuentran valores empíricos de K_h en función del ángulo del vertedor θ. Los valores de C_e para un vertedor totalmente contraído se pueden obtener de la figura 8.17. En este momento, no se tienen suficientes

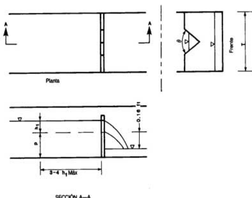


FIGURA 8.15 Vertedor triangular de cresta delgada o en "V".

datos para poder estimar C_e para los otros casos. Bos (1976) recomendó que los vertedores de contracción parcial triangulares se ubicaran en canales de acceso rectangulares y que los de contracción total se ubicasen en canales no rectangulares.

Las siguientes limitaciones sobre el empleo de este tipo de vertedor se deben tomar en cuenta:

1. $h_1/p \leq 1.2$ y $h_1/T \leq 0.4$
2. $0.16 \leq h_1 \leq 2.0$ ft $(0.049 \leq h_1 \leq 0.61$ m)
3. $p \geq 0.3$ ft ($p \geq 0.09$ m)
4. $T \geq 2$ ft ($T \geq 0.61$ m)
5. El nivel aguas abajo del vertedor debe quedar debajo de su vértice.

TABLA 8.7 Criterios de clasificación de un vertedor triangular de cresta delgada, como de flujo parcial o totalmente contraído

Vertedor parcialmente contraído	Vertedor totalmente contraído
$h_1/p \leq 1.2$	$h_1/p \leq 0.4$
$h_1/T \leq 0.4$	$h_1/T \leq 0.2$
$0.16 < h_1 \leq 2$ ft	$0.16 < h_1 \leq 1.25$
$p \geq 0.3$ ft	$p \geq 1.5$ ft
$T \geq 2$ ft	$T \geq 3$ ft

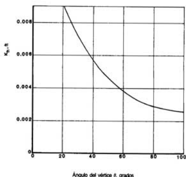


FIGURA 8.16 K_h en función del ángulo θ del vértice. (*De Bos, 1976.*)

Vertedor Cipoletti

Es una modificación de un vertedor rectangular, de cresta delgada totalmente contraído. Este vertedor tiene una sección de control trapecial (Fig. 8.18), con cresta horizontal y lados con taludes de 4:1. Aunque la precisión de medición de este vertedor no es tan buena como la de los vertedores rectangulares o

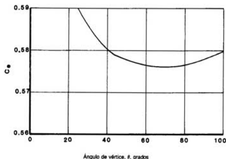


FIGURA 8.17 C_e en función del ángulo θ del vértice para vertedores triangulares, de cresta delgada, totalmente contraídos. (*Bos, 1976.*)

triangulares de cresta delgada, tiene dos ventajas importantes. Primero, la ecuación de gasto está dada por (8.3.18) o

$$Q = \tfrac{8}{15} C_D C_v \sqrt{2g}\ T h_1^{1.5}$$

con $C_D = 0.63$ y C_v según la figura 8.4. Segundo, este vertedor puede usarse en canales de acceso no rectangulares, siempre que se cumplan los límites geométricos dados en la figura 8.18 y

1. $h_1/b \leq 0.50$
2. $0.20 \leq h_1 \leq 2.0$ ft $(0.06 \leq h_1 \leq 0.61$ m)

Vertedor proporcional o Sutro

Se diseñó para que cuando la carga total exceda una referencia arbitraria, el gasto sea linealmente proporcional a la carga total. El vertedor Sutro se compone de una sección rectangular adherida a una sección curva (Fig. 8.19), que provee proporcionalidad para todas las cargas sobre la línea AB. Para este tipo de vertedor, la sección curva queda definida por la ecuación

$$\frac{x}{b} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{\frac{z'}{a}}\right) \qquad (8.3.25)$$

Debe notarse que el vertedor Sutro puede ser simétrico o asimétrico. La relación carga-gasto para este tipo de vertedor puede demostrarse que es (Bos 19, 1976):

$$Q = C_D b\sqrt{2ga}\,(h_1 - \tfrac{1}{3}a) \qquad (8.3.26)$$

donde principalmente el coeficiente de gasto es una función de la forma de la sección de control. En las tablas 8.8 y 8.9 se encuentran los valores de C_D para los casos simétricos y asimétricos.

TABLA 8.8 Coeficientes de gasto de un vertedor Sutro simétrico en función de a y b (Soucek, Howe, Mavis, 1936)

	b, ft				
a, ft	0.50	0.75	1.0	1.25	1.50
0.02	0.608	0.613	0.617	0.6185	0.619
0.05	0.606	0.611	0.615	0.617	0.6175
0.10	0.603	0.608	0.612	0.6135	0.614
0.15	0.601	0.6055	0.610	0.6115	0.612
0.20	0.599	0.604	0.608	0.6095	0.610
0.25	0.598	0.6025	0.6065	0.608	0.6085
0.30	0.597	0.602	0.606	0.6075	0.608

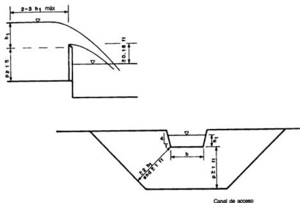


FIGURA 8.18 Vertedor Cipoletti.

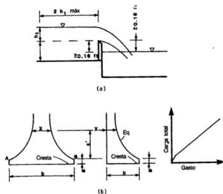


FIGURA 8.19 Dimensiones del vertedor Sutro.

TABLA 8.9 Coeficientes de gasto de un vertedor Sutro asimétrico en función de a y b (Soucek, Howe, y Mavis, 1936)

	b, ft				
a, ft	0.50	0.75	1.0	1.25	1.50
0.02	0.614	0.619	0.623	0.6245	0.625
0.05	0.612	0.617	0.621	0.623	0.6235
0.10	0.609	0.614	0.618	0.6195	0.620
0.15	0.607	0.6115	0.616	0.6175	0.618
0.20	0.605	0.610	0.614	0.6155	0.616
0.25	0.604	0.6085	0.6125	0.614	0.6145
0.30	0.603	0.608	0.612	0.6135	0.614

El uso de vertedores proporcionales es muy ventajoso en canales rectangulares para el control aguas abajo (e.g., como controles de dosificadores químicos regulados con flotadores, o medidores de gasto). Al emplear estos vertedores, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. La aeración de la lámina vertedora es crucial; por lo que el nivel aguas abajo debe permanecer debajo de la cresta del vertedor.

2. En la generalidad de las aplicaciones, el perfil del vertedor se debe sobreponer directamente sobre el fondo del canal para prevenir la acumulación de sedimentos en la cara de aguas arriba del vertedor.

3. El gasto del vertedor es linealmente proporcional a la carga si

$$h_1 \geq 1.2a$$

h_1 nunca debe ser menor que 0.10 ft (0.03 m) ya que la influencia de la viscosidad y tensión superficial serían dominantes.

4. Si se quieren usar los coeficientes de gasto de las tablas 8.8 y 8.9, el ancho b del vertedor no debe ser menor a los 0.5 ft (0.15 m).

5. Para lograr la condición de flujo totalmente contraído

$$\frac{b}{p} \geq 1$$

y

$$\frac{T}{b} \geq 3.0$$

6. Se pueden emplear vertedores proporcionales que no cumplan estas condiciones siempre que se establezca un procedimiento de calibración de los valores de C_D.

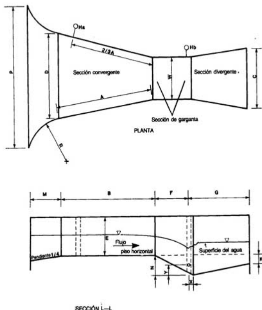


FIGURA 8.20 planta, perfil y dimensiones del medidor Parshall.

8.4 ESTRUCTURAS DE AFORO: CANALES MEDIDORES DE RÉGIMEN CRÍTICO

Aunque los vertedores provocan, de manera efectiva, una sección de flujo crítico en forma artificial en la que se puede medir el gasto, la instalación de éstos tiene por lo menos dos desventajas. Primero, el uso de un vertedor provoca pérdidas de carga grandes. Segundo, la mayor parte de los vertedores producen una zona muerta aguas arriba de la instalación, que puede convertirse en un tanque de sedimentación para sedimentos y basuras que se encuentren en el flujo. Un examen de los principios desarrollados en el Capítulo 2 sugiere que estas dos desventajas se pueden evitar con un medidor en forma de canal con una contracción en el ancho que sea suficiente para producir un gasto crítico. Este medidor produce un efecto análogo al de un medidor Venturi para flujo en tuberías (véase por ej., Streeter y Wylie, 1975). Aunque se han empleado los medidores Venturi para canales, su uso no es recomendable porque la diferencia en el nivel aguas arriba y la sección crítica es relativamente pequeña, en especial para números de Froude bajos. Este problema puede resolverse diseñando un canal

TABLA 8.10 Gasto libre como función del ancho de garganta

Ancho de garganta, ft	Ecuación del gasto libre, ft³/s
0.25	$Q = 0.992\ H_a^{1.547}$
0.50	$Q = 2.06\ H_a^{1.58}$
0.67	$Q = 3.07\ H_a^{1.53}$
$1 \leq W \leq 8$	$Q = 4\ W\ H_a^{1.522 W^{0.026}}$
$10 \leq W \leq 50$	$Q = (3.6875\ W + 2.5) H_a^{1.6}$

con una garganta donde se presente la sección crítica seguida por un tramo corto en el que ocurra un flujo supercrítico. Al final de la sección supercrítica, se presenta un salto hidráulico (Fig. 8.20). R.L. Parshall diseñó un medidor con estas características cerca de 1920 (Parshall, 1938) y se conoce universalmente como el *canal* o *medidor Parshall*. La primera instalación práctica de este canal se hizo en Las Animas Consolidated Ditch cerca de Las Animas, Colorado, en 1926 (Parshall, 1938).

En la tabla 8.10 se dan varias relaciones empíricas de gasto-carga para medidores Parshall de distintos tamaños (el tamaño de un medidor Parshall está dado por el ancho de garganta). En estas ecuaciones Q = gasto libre en ft³/s, W = ancho de garganta en ft, y H_a = profundidad aguas arriba en la sección A, (véase la Fig. 8.20) en ft. En la tabla 8.11 se dan las dimensiones y capacidades de varios medidores Parshall de distintos anchos de garganta. El término *gasto libre* se refiere a la condición de flujo que se presenta en la sección de flujo crítico con un salto hidráulico en la salida del medidor.

TABLA 8.11 Dimensiones y capacidades del medidor Parshall para varios anchos de

W, ft	in	*A*, ft	in	⅔*A*, ft	in	*B*, ft	in	*C*, ft	in	*D*, ft	in	*E*, ft	in	*F*, ft	in
0	3	1	6 3/8	1	1/4	1	6	0	7	0	10 3/16	2	0	0	6
0	6	2	7/16	1	4 5/16	2	0	1	3 1/2	1	3 5/8	2	0	1	0
0	9	2	10 5/8	1	11 1/8	2	10	1	3	1	10 5/8	2	6	1	0
1	0	4	6	3	0	4	4 7/8	2	0	2	9 1/4	3	0	2	0
1	6	4	9	3	2	4	7 7/8	2	6	3	4 3/8	3	0	2	0
2	0	5	0	3	4	4	10 7/8	3	0	3	11 1/2	3	0	2	0
3	0	5	6	3	8	5	4 3/4	4	0	5	1 7/8	3	0	2	0
4	0	6	0	4	0	5	10 5/8	5	0	6	4 1/4	3	0	2	0
5	0	6	6	4	4	6	4 1/2	6	0	7	6 5/8	3	0	2	0
6	0	7	0	4	8	6	10 3/8	7	0	8	9	3	0	2	0
7	0	7	6	5	0	7	4 1/4	8	0	9	11 3/8	3	0	2	0
8	0	8	0	5	4	7	10 1/8	9	0	11	1 3/4	3	0	2	0

Aunque es deseable diseñar el medidor Parshall para que se presente flujo libre (salto claro), para algunas condiciones de flujo el salto hidráulico a la salida del medidor será ahogado, por lo que no se satisfará la condición de flujo libre. El flujo no libre (o ahogado) ocurre cuando

$$\frac{H_b}{H_a} \geq 0.6 \quad \text{para } W = 0.25, 0.50, 0.75 \text{ ft } (0.076, 0.15, 0.23 \text{ m})$$

$$\frac{H_b}{H_a} \geq 0.7 \quad \text{para } 1 \leq W \leq 8 \text{ ft } (0.30 \leq W \leq 2.4 \text{ m})$$

y

$$\frac{H_b}{H_a} \geq 0.8 \quad \text{para } 10 \leq W \leq 50 \text{ ft } (0.24 \leq W \leq 15 \text{ m})$$

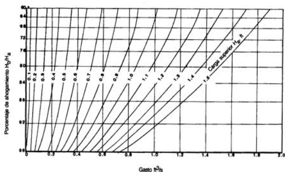
donde H_b = profundidad en la sección B (Fig. 8.20). El efecto del ahogamiento es la disminución del gasto en el vertedor. En estos casos, las ecuaciones resumidas en la tabla 8.10 sobreestiman el gasto, por lo que se debe aplicar un factor de corrección. Las curvas de la figura 8.21 pueden usarse para corregir por ahogamiento en medidores Parshall de diversos tamaños. Respecto a los datos resumidos en esta figura, nótese que la corrección para un medidor de 1 ft (0.30 m) puede aplicarse a medidores más grandes, si se multiplica por los factores especificados en las tablas 8.12 y 8.13. En la figura 8.22 se dan diagramas empíricos para la determinación de las pérdidas de carga para medidores Parshall de distintos tamaños.

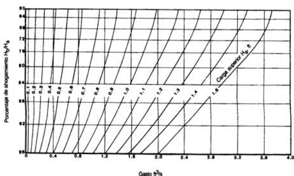
EJEMPLO 8.3

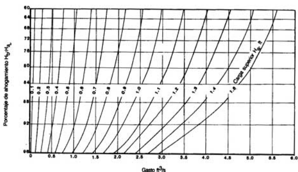
Diséñese un medidor Parshall para gastos promedio de 20 ft³/s (0.57

garganta *W* (las letras se refieren a las dimensiones mostradas en la Fig. 8.20)

G, ft	*G*, in	*K*, in	*N*, in	*R*, ft	*R*, in	*M*, ft	*M*, in	*P*, ft	*P*, in	*X*, in	*Y*, in	Capacidades de gasto libre: Mín ft³/s	Capacidades de gasto libre: Máx ft³/s
1	0	1	2¼	1	4	1	0	2	6¼	1	1½	0.03	1.9
2	0	3	4½	1	4	1	0	2	11½	2	3	0.05	3.9
1	6	3	4½	1	4	1	0	3	6½	2	3	0.09	8.9
3	0	3	9	1	8	1	3	4	10¾	2	3	0.11	16.1
3	0	3	9	1	8	1	3	5	6	2	3	0.15	24.6
3	0	3	9	1	8	1	3	6	1	2	3	0.42	33.1
3	0	3	9	1	8	1	3	7	3½	2	3	0.61	50.4
3	0	3	9	2	0	1	6	8	10¾	2	3	1.3	67.9
3	0	3	9	2	0	1	6	10	1¼	2	3	1.6	85.6
3	0	3	9	2	0	1	6	11	3½	2	3	2.6	103.5
3	0	3	9	2	0	1	6	12	6	2	3	3.0	121.4
3	0	3	9	2	0	1	6	13	8¼	2	3	3.5	139.5


Porcentaje de ahogamiento H_b/H_a
60
64
68
72
76
80
84
88
92
96
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
Carga superior H_a, ft
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
Gasto ft^3/s


Porcentaje de ahogamiento H_b/H_a
60
64
68
72
76
80
84
88
92
96
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
Carga superior H_a, ft
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4
2.8
3.2
3.6
4.0
Gasto ft^3/s


Porcentaje de ahogamiento H_b/H_a
60
64
68
72
76
80
84
88
92
96
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
Carga superior H_a, ft
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
Gasto ft^3/s

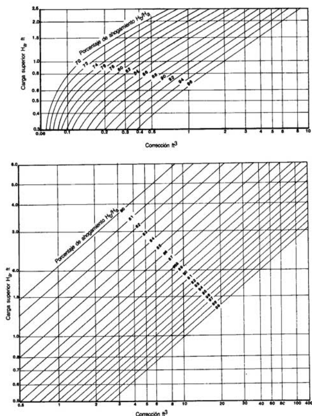


FIGURA 8.21 Diagramas para el cálculo de flujo ahogado en medidores Parshall de diversos tamaños.

TABLA 8.12 factores de corrección por ahogamiento para medidores Parshall con anchos de garganta entre 1 y 10 ft, basados en la corrección para el de 1 ft (Fig. 8.21)

tamaño del medidor usado, B_T, ft	Factor de corrección
1	1.0
1.5	1.4
2	1.8
3	2.4
4	3.1
6	4.3
8	5.4

TABLA 8.13 Factores de corrección por ahogamiento para medidores Parshall con anchos de garganta entre 10 y 50 ft, basados en la corrección para el de 10 ft (Fig. 8.21)

Tamaño del medidor usado, B_T, ft	Factor de corrección
10	1.0
12	1.2
15	1.5
20	2.0
25	2.5
30	3.0
40	4.0
50	5.0

Ecuaciones de gasto para el medidor de San Dimas

Ancho del medidor, ft	Ecuaciones de gasto, ft^3/s
1.0	$Q = 6.35\ H^{1.321}$
2.0	$Q = 13.05\ H^{1.277}$
3.0	$Q = 19.90\ H^{1.245}$

m^3/s). El canal que lleva este gasto tiene una pendiente suave y un tirante normal de 2.5 ft (0.76 m).

Solución

Los gastos de este orden de magnitud se pueden determinar con medidores de varios tamaños; por lo que las dimensiones determinadas en esta solución representan sólo una de las varias soluciones posibles.

Supóngase que el ancho de garganta es de 4 ft (1.2 m) y que se tiene una razón de ahogamiento de 0.70. *Nota:* cuando las condiciones del flujo no permitan flujo libre, el porcentaje de ahogamiento, H_b/H_a debe mantenerse lo más bajo posible.

Cuando H_b/H_a excede 0.95, el medidor Parshall no da resultados confiables. De la tabla 8.10,

$$Q = 4wH_a^{1.522W^{0.026}}$$

o

$$20 = 4(4)H_a^{1.522(4)^{0.026}} = 16H_a^{1.58}$$

$$H_a = (20/16)^{0.634} = 1.15 \text{ ft } (0.35 \text{ m})$$

Para una razón de ahogamiento de 0.70

$$H_b = 0.70H_a = 0.81 \text{ ft } (0.25 \text{ m})$$

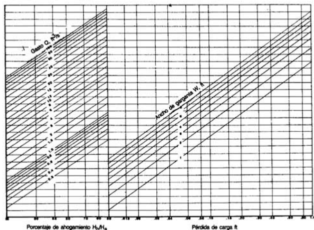


FIGURA 8.22 Diagramas para determinar la pérdida de carga a través de medidores Parshall de diversos tamaños.

Entonces, según la figura 8.23

$$x = 2.5 - 0.81 = 1.69 \text{ ft } (0.52 \text{ m})$$

De la figura 8.22, la pérdida de carga en el medidor es $h_L = 0.43$ ft (0.13 m); por lo tanto, el tirante aguas arriba es

$$2.5 + 0.43 = 2.9 \text{ ft } (0.88 \text{ m})$$

Se pueden hacer cálculos similares para medidores Parshall de 2 y 3 ft. En general el medidor más económico sería el de dimensiones más pequeñas. Aunque, al usar un medidor estrecho, se tendrían que emplear, en función de las dimensiones del canal y de las paredes de entrada (largas o modernamente largas) que podrían anular el ahorro del empleo de un medidor pequeño. Como regla práctica, se recomienda un ancho de garganta del medidor Parshall de un tercio, a un medio del ancho del canal.

Ya que el medidor Parshall produce la profundidad crítica por medio de una contracción, la velocidad del flujo en éste es mayor que la del canal natural. Por esta razón, la arena y los sedimentos que lleva el flujo no se quedan en el medidor; aunque si se tiene una cantidad importante de basuras en el flujo, el medidor Parshall puede quedar inoperable o dar mediciones erróneas a causa del depósito o el bloqueo. En estas circunstancias, debe usarse un medidor Parshall modificado, conocido como *medidor San Dimas* (Wilm, *et al.*, 1938). Para los propósitos de esta sección, el flujo con basuras puede dividirse en: 1) agua lodosa cargada con sedimentos finos, que se pueden suponer uniformemente distribuidos en la sección transversal, 2) agua con una carga de material grueso en suspensión, en su generalidad se encuentra en la parte inferior del flujo, y 3) agua que transporta rocas que se mueven por deslizamiento o ruedan en el fondo del canal. Las dos últimas categorías se presentán comúnmente en cañones de montañas y hacen inútil el empleo de medidores como el Parshall. Para resolver este problema, Wilm *et al.*, (1938) desarrollaron el medidor San Dimas (Fig. 8.24), que trabaja como un medidor de cresta ancha al medirse la profundidad del flujo aguas abajo del punto donde se presenta la sección de flujo crítico. Respecto a la figura 8.24, T = ancho del canal de llegada, $T_F = \frac{1}{3}T$ = ancho del medidor, h_F = altura del medidor = (gasto máximo)/($5T_F$), L = longitud del medidor = $r + 2h_F$, y r = radio de transición = T_F. En la tabla 8.13 se encuentran resumidas las ecuaciones empíricas ob-

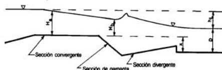


FIGURA 8.23 Perfil del medidor Parshall para el ejemplo 8.3

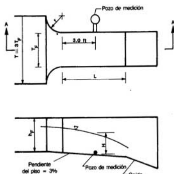


FIGURA 8.24 Esquema del medidor San Dimas (*Wilm, et al.,1938.*)

tenidas para este tipo de flujo. *Nota:* ya que estas ecuaciones son empíricas, debe emplearse el sistema inglés de unidades. Respecto a este tipo de medidores, Wilm *et al.*, (1938) aseguran que da mediciones precisas y que no se ve afectado por la velocidad de llegada en el canal, ni por la presencia de material de fondo; aunque en el momento de la publicación original del diseño, se dieron a conocer varias investigaciones que criticaban el diseño. Por lo tanto, se debe ejercer mucho cuidado en el empleo del medidor San Dimas.

8.5 ESTRUCTURAS DE AFORO: ALCANTARILLAS

La colocación de relleno en un canal natural con una alcantarilla que atraviesa el bordo resultante, conduce a una situación que puede emplearse para la medición del gasto si no se dispone de otros medios de medición. En la figura 8.25, se deben notar las siguientes características físicas de las alcantarillas: la sección del canal de llegada suele definirse a un ancho de la alcantarilla aguas arriba de la entrada de ésta; la pérdida de energía en la vecindad de la entrada de la alcantarilla está relacionada con la contracción brusca del flujo que entra a la alcantarilla y la subsecuente expansión brusca del flujo dentro del barril de la alcantarilla. La geometría de la entrada de la alcantarilla puede tener gran influencia en la pérdida de entrada.

Dentro de la alcantarilla, se tiene una pérdida adicional causada por la fricción de pared. Aunque esta fricción es comúnmente muy pequeña, puede ser importante en alcantarillas largas, rugosas o en alcantarillas ubicadas en una pendiente plana.

El gasto de una alcantarilla se determina aplicando las ecuaciones de continuidad y de energía entre las secciones de llegada y una sección aguas abajo que normalmente se encuentra dentro del barril de la alcantarilla (Fig. 8.25). La ubicación de la sección de aguas abajo depende del tipo de flujo dentro de la alcantarilla.

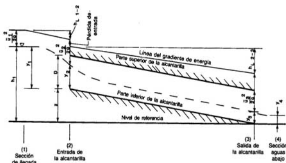


FIGURA 8.25 Definición esquemática del flujo en alcantarillas.

Por conveniencia de cálculo, el gasto a través de alcantarillas se divide en seis categorías, con base en las alturas relativas de la carga y de los niveles aguas abajo. Los seis tipos de flujos y sus respectivas características se resumen en la tabla 8.14. En esta tabla, D = dimensión vertical máxima de la alcantarilla, y_1 = tirante en la sección de llegada, y_c = tirante crítico, z = elevación de la entrada de la alcantarilla relativa a la salida, y y_4 = tirante aguas abajo de la alcantarilla. En la figura 8.26, se presentan las ecuaciones de gasto para varios tipos de alcantarillas. En estas ecuaciones, C_D = coeficiente de gasto, A_c área de flujo para un tirante crítico o, u_1 = velocidad media en la sección de llegada, $h_{f1\text{-}2} = L_w Q^2/K_1 K_c$ = pérdida de carga causada por la fricción desde la sección de llegada hasta la entrada de la alcantarilla, L_W = distancia desde la sección de llegada hasta la entrada de la alcantarilla, K_1 = factor de sección en la sección de llegada, K_c = factor de sección de la sección crítica, $h_{f2\text{-}3} = LQ^2/K_2 K_3$ = pérdida de carga originada por la fricción en el barril de la alcantarilla, y L = longitud del barril de la alcantarilla. Respecto a estas seis clasificaciones de flujos, se deben notar las siguientes características.

Flujo tipo 1

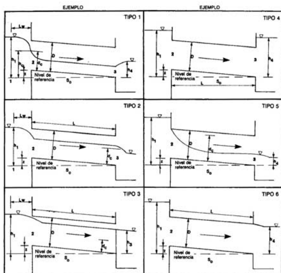
En esta clasificación de flujo el tirante crítico se presenta en la vecindad de la entrada de la alcantailla. Para que se presente este tipo de flujo, deben cumplirse los siguientes requisitos:

1. La razón carga-diámetro de la alcantarilla no debe exceder a 1.5

2. La pendiente del barril S_o debe ser menor que la pendiente crítica S_c.

TABLA 8.14 Características del flujo en alcantarillas (Bodhaine, 1976)

Tipo de flujo	Flujo en el barril de la alcantarilla	Ubicación de la sección de aguas abajo	Tipo de control	Pendiente de la alcantarilla	y_1/D	y_4/y_c	y_4/D
1	Parcialmente lleno	Entrada	Tirante crítico	Supercrítica	<1.5	<1.0	≤ 1.0
2	Parcialmente lleno	Salida	Tirante crítico	Subcrítica	<1.5	<1.0	≤ 1.0
3	Parcialmente lleno	Salida	Remanso	Subcrítica	<1.5	>1.0	≤ 1.0
4	Lleno	Salida	Remanso	Cualquiera	>1.0	....	>1.0
5	Parcialmente lleno	Entrada	Geometría de entrada	Cualquiera	≥ 1.5	....	≤ 1.0
6	Lleno	Salida	Geometría de la entrada y el barril	Cualquiera	≥ 1.5	....	≤ 1.0



Tipo de flujo de alcantarilla	Ecuación de gasto
Tipo 1. Tirante crítico a la entrada $(h_1 - z)/D < 1.5$ $h_4/h_c < 1.0$ $S_0 > S_c$	$Q = C_D A_c \sqrt{2g\left(h_1 - z + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - y_c - h_{f1.2}\right)}$
Tipo 2. Tirante crítico a la salida $(h_1 - z)/D < 1.5$ $h_4/h_c < 1.0$ $S_0 > S_c$	$Q = C_D A_c \sqrt{2g\left(h_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - y_c - h_{f1.2} - h_{f2.3}\right)}$
Tipo 3. Flujo subcrítico en toda la alcantarilla $(h_1 - z)/D < 1.5$ $h_4/h_c \leqq 1.0$ $h_4/h_c > 1.0$	$Q = C_D A_3 \sqrt{2g\left(h_1 + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - h_3 - h_{f1.2} - h_{f2.3}\right)}$
Tipo 4. Salida ahogada $(h_1 - z)/D > 1.0$ $h_4/D > 1.0$	$Q = C_D A_0 \left[\frac{2g(h_1 - h_4)}{1 + (29C_D^2 n^2 L/R_0^{4/3})}\right]^{1/2}$
Tipo 5. Flujo supercrítico a la entrada $(h_1 - z)/D \geqq 1.5$ $h_4/D \leqq 1.0$	$Q = C_D A_0 \sqrt{2g(h_1 - z)}$
Tipo 6. Flujo lleno a la salida $(h_1 - z)/D \geqq 1.5$ $h_4/D \leqq 1.0$	$Q = C_D A_0 \sqrt{2g(h_1 - h_3 - h_{f2.3})}$

FIGURA 8.26 Clasificación de los tipos de flujo en alcantarillas.

3. La elevación aguas abajo y_4 debe ser menor que la elevación de la superficie del agua en la sección crítica.

Flujo tipo 2

En esta clasificación del flujo, el tirante crítico se presenta a la salida de la alcantarilla. Para que se presente este tipo de flujo, se deben cumplir los siguientes requisitos:

1. La razón carga-diámetro de alcantarilla debe exceder a 1.5
2. La pendiente del barril de la alcantarilla S_o debe ser menor que la pendiente crítica S_c.
3. La elevación aguas abajo y_4 no puede exceder la elevación de la superficie del agua en la sección crítica.

Flujo tipo 3

En este tipo de flujo, la existencia de un perfil de flujo gradualmente variado es el factor de control, no puede presentarse un tirante crítico, y la elevación de la superficie del agua en la sección aguas arriba de la alcantarilla es una función de la elevación aguas abajo de la alcantarilla. En esta clasificación de flujo, éste es subcrítico a todo lo largo de la alcantarilla. Para que se presente este tipo de flujo, deben cumplirse los siguientes requisitos:

1. La razón carga-diámetro de alcantarilla debe ser menor que 1.5.
2. La elevación aguas abajo no será suficiente para ahogar la salida de la alcantarilla, pero excederá la elevación del tirante crítico a la salida.
3. El límite inferior de la elevación aguas abajo será tal que: *a)* la elevación aguas abajo del agua sea mayor que el tirante crítico en la entrada de la alcantarilla, si las condiciones de flujo son tales que se presentase un tirante crítico en la entrada, y *b)* la elevación aguas abajo del agua sea mayor que la elevación del tirante crítico a la salida de la alcantarilla, si la pendiente de ésta es tal que el tirante crítico se presentaría en esta sección bajo la condición de caída libre.

Flujo tipo 4

En esta clasificación de flujo, la alcantarilla está llena, así que el gasto se puede estimar directamente con la ecuación de energía. Para el flujo tipo 4, las pérdidas de carga entre las secciones 1 y 2 y las secciones 3 y 4 con frecuencia pueden despreciarse. La pérdida causada por la expansión brusca del campo de flujo a la salida de la alcantarilla se supone que es $(h_3\text{-}h_4)$.

Flujo tipo 5

En esta clasificación de flujo, éste es supercrítico a la entrada a la alcantarilla y la razón carga-diámetro de alcantarilla excede a 1.5. Ya que la elevación aguas abajo del agua, se encuentra debajo de la clave de la alcantarilla, la alcantarilla fluye parcialmente llena.

Flujo tipo 6

En esta clasificación de flujo, la razón carga-diámetro de alcantarilla excede 1.5, así que alcantarilla fluye llena y la salida no se encuentra ahogada. La tabla 8.15 sirve como guía en la clasificación del flujo en alcantarillas dentro de una de las categorías anteriores.

Antes de examinar los cálculos requeridos para la determinación del gasto en las categorías anteriores, es necesario analizar los valores típicos del factor de rugosidad de Manning para varios materiales de alcantarillas. El metal corrugado empleado en la manufactura de alcantarillas estándar tiene un espaciamiento de $2^2/_3$ in (0.068 m) y un peralte de 0.5 in (0.013 m). En pruebas de laboratorio, Neill (1962) encontró, para un flujo lleno, que n se encontraba entre 0.0266 para una alcantarilla de 1 ft (0.30 m) de diámetro y 0.0224 para una alcantarilla de 8 ft (2.4 m) de diámetro. Para alcantarillas parcialmente

TABLA 8.15

If $\frac{y_1}{D} > 1$ — Verdadero → If $\frac{y_1}{D} \geq 1.5$ — Verdadero → If $\frac{y_4}{D} > 1$ — Verdadero → Tipo 4 flujo

If $\frac{y_4}{D} > 1$ — Falso → Tipo 5 o Tipo 6 flujo

If $\frac{y_1}{D} > 1$ — Falso; If $\frac{y_1}{D} \geq 1.5$ — Falso → If $\frac{y_1}{D} < 1.5$ — Verdadero → If $\frac{y_4}{y_c} < 1$ — Verdadero → If $S_o < S_c$ — Verdadero → Tipo 2 flujo

If $S_o < S_c$ — Falso → Tipo 1 flujo

If $\frac{y_4}{y_c} < 1$ — Falso → If $\frac{y_4}{D} \leq 1$ — Verdadero → Tipo 3 flujo

If $\frac{y_4}{D} \leq 1$ — Falso → Error

If $\frac{y_1}{D} < 1.5$ — Falso → Error

TABLA 8.16 n **de Manning en función del diámetro de la alcantarilla para metal corrugado estándar**

Diámetro de alcantarilla, ft	n de Manning
1	0.027
2	0.025
3–4	0.024
5–7	0.023
8	0.022

TABLA 8.17 n **de Manning en función del diámetro de alcantarilla para construcción de placas múltiples (Bodhaine, 1976)**

Diámetro de alcantarilla, ft	n de Manning
5–6	0.034
7–8	0.033
9–11	0.032
12–13	0.031
14–15	0.030
16–18	0.029
19–20	0.028
21–22	0.027

llenas, el valor de n era un poco menor. En la tabla 8.16 se resumen estos resultados. En general se considera 0.024 como una estimación satisfactoria de n para todas las alcantarillas remachadas de tamaños estándar.

En alcantarillas múltiples, las corrugaciones son mayores, por lo que existe un espaciamiento de 6 in (0.15 m) y un peralte de 2 in (0.051 m). Los valores recomendados para n por Bodhaine (1976) para este tipo de construcción de alcantarillas se resumen en la tabla 8.17. Bodhaine (1976) también notó que se están manufacturando los tubos corrugados con corrugaciones de la mitad del tamaño de las usadas en construcciones de placas múltiples. Para este tipo de construcción de alcantarillas, Bodhaine (1976) recomendó que, hasta que se disponga de datos de pruebas, se empleen coeficientes de rugosidad con valores iguales a la mitad entre los recomendados para los mismos tamaños de tubos estándar y de placas múltiples [*e.g.*, úsese un valor de $n = 0.028$ para una tubería de 7 ft (2.1 m) de diámetro].

En alcantarillas de concreto, el coeficiente de rugosidad depende de la condición del concreto y de las irregularidades superficiales que se presentan como resultado del método de construcción empleado. Los valores de h sugeridos por Bodhaine (1976) para alcantarillas de concreto, se resumen en la tabla 8.18. En alcantarillas de concreto, los valores de n pueden aumentar mucho si las secciones de la alcantarilla se desplazan en forma vertical o lateral en las juntas. Bodhaine (1976) notó que cuando ocurre tal desplazamiento, el aumento en n está relacionado con el grado de desplazamiento, además, el grado de desplazamiento debe ser relevante antes de que se afecte en forma importante el valor de n.

El coeficiente de gasto, C_D, usado en las ecuaciones que se resumen en la figura 8.27, se han establecido por pruebas de laboratorio y se ha observado que varían dentro de un intervalo de 0.39 a 0.98. En general, el coeficiente de gasto está en función del grado de la contracción del canal y de la geometría de la entrada de la alcantarilla. Para el caso de algunas geometrías de entrada, un coeficiente de base de gasto debe multiplicarse por un factor que refleje el

TABLA 8.18 n **de Manning en función del estado del concreto para alcantarillas de concreto (Bodhaine, 1976)**

Estado de concreto	n de Manning
Muy suave (tubería torneada)	0.010
Suave (tubería hecha con cimbra)	0.011–0.015
Construcción ordinaria en campo	0.012–0.015
Desconchada	0.015–0.020

grado de redondeo o el biselado de la entrada. Además, los valores del coeficiente de gasto se pueden aplicar a instalaciones de un solo barril o de múltiples barriles, si la red entre los barriles en las instalaciones de barriles múltiples es menor que el 0.1 del ancho de un solo barril.

Al examinar la variación del coeficiente de gasto, es conveniente considerar tres grupos, *i.e.*, los flujos tipo 1, 2 y 3 forman un grupo, los de tipo 4 y 6 un segundo grupo y el flujo tipo 5 un tercer grupo. Asimismo, se consideran cuatro tipos de geometrías de entrada: 1) a paño con pared vertical, 2) paredes inclinadas, 3) entrada protuberante y 4) alcantarilla a escuadra sobre unos lados inclinados.

Coeficiente de gasto para los flujos tipo 1, 2 y 3

El coeficiente de gasto para alcantarillas de arista cuadrada colocadas en una pared vertical es una función de y_1/D, donde el coeficiente de gasto base para este caso se puede determinar con la figura 8.27. Si se redondea o se bisela la entrada, el coeficiente de gasto obtenido con la figura 8.27 debe multiplicarse por alguno de los coeficientes k_r o k_w. k_r y k_w están en función del grado

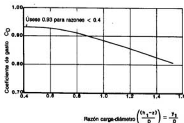


FIGURA 8.27 Coeficiente base de gasto para flujos tipo 1, 2 y 3 en alcantarillas circulares con entradas cuadradas montadas a paño en pared vertical (*Bodhaine, 1976.*)

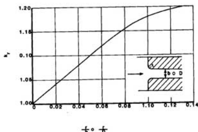


FIGURA 8.28 k_r en función de r/b o r/D para flujos tipo 1, 2 y 3 en alcantarillas rectangulares o circulares colocadas a paño en paredes verticales. (*Bodhaine, 1976.*)

de redondeo de la entrada o biselado y se determinan a partir de las figuras 8.28 y 8.29. En este momento, debe observarse que las alcantarillas de concreto reforzado machihembrado con diámetros entre 18 y 36 in (0.46 a 0.91 m) se han probado y que no se ha encontrado ninguna relación entre el coeficiente de gasto y y_1/D. Por ende, un $C_D = 0.95$ se emplea para todos los tamaños de alcantarillas con este tipo de construcción. También se supone que la tubería de concreto prefabricada con boca de campana se encuentra en esta categoría; o sea, $C_D = 0.95$. La tabla 8.19 resume valores usuales de r/D y w/D para al-

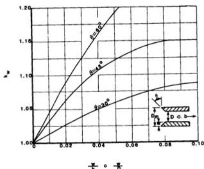


FIGURA 8.29 k_w *en función de* w/b o w/D para flujos tipo 1, 2, y 3 en alcantarillas rectangulares o circulares colocadas a paño en paredes verticales. (*Bodhaine, 1976.*)

TABLA 8.19 Valores usuales de *r/D* y *w/D* en función de *D* para alcantarillas estándar de metal corrugado y remachado Bodhaine, 1976)

D, in	*D*, m	*r/D*	*w/D*
24	0.61	0.031	0.0125
36	0.91	0.021	0.0083
48	1.2	0.016	0.0062
60	1.5	0.012	0.0050
72	1.8	0.010	0.0042

cantarillas estándar de metal corrugado y remachado. En la construcción de alcantarillas múltiples, la entrada a menudo se considera biselada con una w promedio de 1.2 in (0.03m). Bodhaine (1976) recomienda que, cuando sea posible, se empleen mediciones de campo para determinar r y w.

Se ha observado que el coeficiente de gasto para alcantarillas rectangulares en paredes verticales está en función del número de Froude. Para los tipos de flujo 1 y 2, el número de Froude es 1 y $C_D = 0.95$. Para el flujo tipo 3, el número de Froude debe determinarse en la sección 3 (Fig. 8.26) y C_D tomarse de la figura 8.30. Se puede extrapolar la figura 8.30 hasta valores del número de Froude de 0.1, de ser necesario. Si la entrada de la alcantarilla se redondea o se bisela, un coeficiente de gasto ajustado se obtiene al multiplicar el coeficiente base de gasto por k_r o k_w, que se estiman con las figuras 8.28 y 8.29.

Si se ponen paredes inclinadas a la entrada de alcantarillas circulares en paredes verticales no tiene ningún efecto sobre el coeficiente de gasto. En el caso

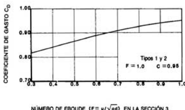


FIGURA 8.30 Coeficiente de gasto base para flujos tipo 1, 2 y 3 en alcantarillas rectangulares con entrada cuadrada montadas a paño en pared vertical. (*Bodhaine, 1976.*)

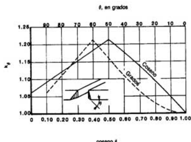


FIGURA 8.31 k_θ en función del ángulo de inclinación de la pared de entrada para flujos tipo 1, 2 y 3 en alcantarillas rectangulares con paredes a paño con el talud. *(Bodhaine, 1976.)*

de las alcantarillas rectangulares, el coeficiente de gasto base obtenido con la figura 8.30 se debe multiplicar por $k\theta$, que es un parámetro que está en función del ángulo de la pared inclinada y que se obtiene de la figura 8.31. Si la entrada de las paredes inclinadas no es simétrica, entonces debe determinarse, independientemente, un valor de C_D para cada lado, y promediar los resultados.

En una alcantarilla circular que se extiende más allá de la pared de entrada o del talud, el coeficiente de gasto se determina al seguir el procedimiento descrito para una alcantarilla a paño con una pared de entrada y al multiplicarlo por el parámetro k_L. En la tabla 8.20, se encuentran los valores de k_L en función de L_p/D, donde L_p = longitud de la protuberancia de la alcantarilla desde la pared o el talud. El coeficiente de gasto sobre el que se aplica k_L no debe exceder de 0.95, ya que éste es el valor límite de C_D. Para una alcantarilla protuberante biselada, el coeficiente de gasto se calcula de la misma forma que el de una alcantarilla puesta a canto en una pared.

El coeficiente de gasto de una alcantarilla a escuadra, puesta a canto sobre el talud, se determina con la figura 8.32.

En todas las alcantarillas con flujo tipo 1, 2 y 3 se necesita un ajuste final del coeficiente de gasto. Sea

$$m = 1 - \frac{A}{A_1} \tag{8.5.1}$$

donde m = razón de contracción del canal
A_1 = área de flujo en la sección de entrada
A = área de flujo en la sección terminal

TABLA 8.20 k_L **para alcantarillas rectangulares protuberantes en función de** L_p/D **(Bodhaine, 1976)**

L_p/D	k_L	L_p/D	k_L
0.00	1.00	0.0	1.00
0.01	0.99	0.1	0.92
0.02	0.98	0.2	0.92
0.03	0.98	0.3	0.92
0.04	0.97	0.4	0.91
0.05	0.96	0.5	0.91
0.06	0.95	0.6	0.91
0.07	0.94	0.7	0.91
0.08	0.94	0.8	0.90
0.09	0.93	0.9	0.90
0.10	0.92	$\geq$1.0	0.90

Para $m = 0.80$, un valor ajustado del coeficiente de gasto puede estimarse con la figura 8.33. Para valores de $m < 0.80$, el coeficiente ajustado se puede estimar con

$$C_D' = 0.98 - \frac{(0.98 - C_D)m}{0.80} \tag{8.5.2}$$

EJEMPLO 8.4

La figura 8.34 describe esquemáticamente un flujo que se sabe ocurre en una alcantarilla de metal corrugado con un diámetro de 10 ft (3.0

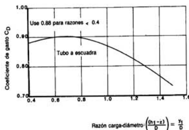


FIGURA 8.32 Coeficientes de gasto para flujos tipo 1, 2, y 3 en una tubería a escuadra y paño con el talud. *(Bodhaine, 1976).*

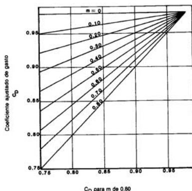


FIGURA 8.33 Ajuste del coeficiente de gasto según el grado de contracción para flujos tipo 1, 2, y 3 *(Bodhaine, 1976.)*

m). Si r = 0.06 ft (0.018 m), n = 0.024, A_1 = 1000 ft²(93 m²), y k_1 = 300 000, determínese el gasto si la alcantarilla se pone a paño con la pared. Este ejemplo fue presentado por primera vez por Bodhaine (1976).

Solución

Del enunciado del problema y la figura 8.34 se extraen los siguientes datos:

$$y_1 = 10 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$

$$S_o = 0.02$$

$$\frac{r}{D} = \frac{0.06}{10} = 0.006$$

$$y_4 = 6 \text{ ft } (1.8 \text{ m})$$

$$\frac{y_1}{D} = 1$$

De la tabla 8.15, se tiene que el flujo debe ser del tipo 1, 2 o 3 ya que y_1/D no excede de 1. Por tanto, de la figura 8.27 C_D = 0.8, y de la figura 8.28 para r/D = 0.006, k_r = 1.01. El valor ajustado del coeficiente de gasto es

$$C_D = k_r C_D = 1.01(0.88) = 0.89$$

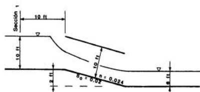


FIGURA 8.34 Definición esquemática para el ejemplo 8.4

El siguiente paso de cómputo depende de la clasificación del flujo, y el próximo paso de clasificación de la tabla 8.15 requiere una estimación del tirante crítico. Se observa que si $y_4 < y_c$, no se puede presentar el flujo tipo 3. Para diferenciar entre los flujos tipo 1 y 2, se emplea una gráfica desarrollada por Bodhaine (1976) (Fig. 8.35). Para

$$\frac{S_o D^{1/3}}{n^2} = \frac{0.02(10)^{1/3}}{(0.024)^2} = 74.8$$

y

$$\frac{y_1}{D} = 1$$

se concluye que éste puede ser un flujo tipo 1. De donde, con la figura 8.36 con $y_1/D = 1$

$$\frac{y_c}{D} = 0.65$$

y $\quad y_c = 0.65\ D = 0.65\ (10) = 6.5$ ft (2.0 m)

El gasto se estima con la ecuación empírica dada en la tabla 2.1 para canales abiertos circulares o

$$y_c = \frac{1.01}{D^{0.26}}\left(\frac{Q^2}{g}\right)^{0.25}$$

donde α se supone igual a 1. Si se reordena y se resuelve esta ecuación para estimar Q da

$$Q = \left(\frac{y_c D^{0.26}}{1.01}\, g^{0.25}\right)^2 = \left[\frac{6.5(10)^{0.26}}{1.01}(32.2)^{0.25}\right]^2 = 780 \text{ ft}^3\text{/s } (22 \text{ m}^3\text{/s})$$

La pérdida por fricción entre la sección de llegada y la entrada de la alcantarilla está dada por

$$h_{f1-2} = \frac{Q^2 L}{K_1 K_c}$$

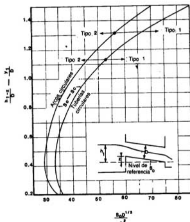


FIGURA 8.35 Pendiente crítica en función de la carga de llegada para flujos tipo 1 y 2 en tuberías circulares y arcos circulares. *(Bodhaine, 1976.)*

donde
$$K_c = \frac{1.49}{n} A_c R_c^{2/3}$$

De la tabla 1.1

$$A_c = \tfrac{1}{8}(\theta - \operatorname{sen}\theta)D^2$$

y
$$R_c = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)D$$

Para $\theta = 3.75$ rad

$$A_c = \tfrac{1}{8}[3.75 - \operatorname{sen}(3.75)]10^2 = 54 \text{ ft}^2 \ (5.0 \text{ m}^2)$$

$$R_c = \tfrac{1}{4}\left[1 - \frac{\operatorname{sen}(3.75)}{3.75}\right]10 = 2.9 \text{ ft} \ (0.88 \text{ m})$$

y
$$K_c = \frac{1.49}{0.024}(54)(2.9)^{2/3} = 6820$$

$$h_{f1-2} = \frac{Q^2 L_w}{K_1 K_c} = \frac{(780)^2 10}{300\,000(6820)} = 0.003$$

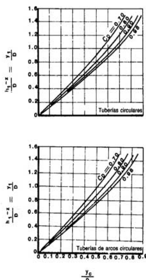


FIGURA 8.36 Relación entre y_1/D, C_D, y tirante crítico para alcantarillas circulares y circulares de arco. (*Bodhaine, 1976.*)

La carga de velocidad en la sección de llegada es

$$\frac{\overline{u}_1^2}{2g} = \frac{(Q/A_1)^2}{2g} = \frac{(780/1000)^2}{2(32.2)} = 0.0094$$

Ahora el coeficiente de gasto puede ajustarse por la contracción del canal o

$$m = 1 - \frac{A}{A_1} = 1 - \left(\frac{54}{1000}\right) = 0.946$$

y de la ecuación (8.5.2)

$$C_D = 0.98 - \left(\frac{0.98 - C_D}{0.80}\right) m = 0.98 - \left(\frac{0.98 - 0.89}{0.80}\right) 0.946 = 0.87$$

De la figura 8.24, el gasto para una alcantarilla con flujo tipo 1 está dado por

$$Q = C_D A_c \left[2g \left(h_1 + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - y_c - h_{f1-2} \right) \right]^{1/2}$$

$$= 0.87(54)[2(32.2)(10 + 0.0094 - 6.5 - 0.003)]$$

$$= 710 \text{ ft}^3\text{/s } (20 \text{ m}^3\text{/s})$$

Esta respuesta final es bastante parecida a la supuesta inicialmente.

El hecho de que este flujo es el tipo 1 puede confirmarse demostrando que $S_o > S_c$ (Tabla 8.14).

La pendiente crítica está dada por

$$S_c = \left(\frac{Q}{K_c}\right)^2 = \left(\frac{710}{6820}\right)^2 = 0.0108$$

Por lo que, es un flujo tipo 1.

Ahora conviene notar que si la alcantarilla considerada fuese de forma rectangular, entonces se debe emplear la figura 8.37 en vez de la 8.35 para diferenciar entre los flujos tipo 1 y 2.

Coeficientes de gasto para flujos tipo 4 y 6

El coeficiente de gasto para alcantarillas circulares o rectangulares a paño con una pared vertical se determina de la tabla 8.21 para estos tipos de flujo. Para alcantarillas con secciones finales abocinadas, $C_D = 0.90$ independientemente del diámetro o el valor de y_1/D.

Si se agregan paredes inclinadas a la entrada de las alcantarillas circulares a paño a la pared, no causa ningún efecto sobre el coeficiente de gasto. En alcantarillas con paredes inclinadas y entrada cuadrada

$$C_D = 0.87 \quad \text{para } 30° \leq \theta \leq 75°$$

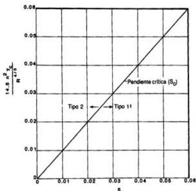


FIGURA 8.37 Pendiente crítica para alcantarillas de sección rectangular, flujos tipo 1 y 2. *(Bodhaine, 1976.)*

TABLA 8.21 Coeficientes de gasto para alcantarillas rectangulares y circulares, flujos tipo 4 y 6 (Bodhaine, 1976)

r/b, w/b, w/D, o r/D	C_D
0	0.84
0.02	0.88
0.04	0.91
0.06	0.94
0.08	0.96
0.10	0.97
0.12	0.98

y $$C_D = 0.75 \quad \text{para } \theta = 90°$$

donde el ángulo θ se define en la figura 8.26. Si la entrada superior de la alcantarilla rectangular con monos de aleta se bisela o redondea con $30° \leq \theta \leq 75°$, entonces C_D se selecciona de la tabla 8.21 con base en r/D o w/D para la parte superior de la entrada. En este caso, C_D= 0.87 es el límite inferior. Para el caso donde $\theta = 90°$ y la parte superior de la entrada se encuentra redondeada o biselada, el valor base del coeficiente de gasto es 0.75, que debe ajustarse por k_r o k_w, los cuales se pueden obtener de las figuras 8.28 o 8.29. Para los casos en que $75° \leq \theta \leq 90°$, se interpolan los valores de C_D entre 0.87 y 0.75 respectivamente, y se ajustan con k_r o k_w según sea el caso.

Para el caso de alcantarillas de metal corrugado que se extienden más allá de la pared o talud, C_D se determina con la tabla 8.21 y se ajusta con el parámetro k_L, obtenido de la tabla 8.20. Para alcantarillas de concreto con aristas biseladas que atraviesan el talud o pared, C_D se determina con la tabla 8.21.

Para el caso de alcantarillas circulares conjuntas a inglete que están a paño con el talud $C_D = 0.74$. Si la alcantarilla circular conjunta a inglete se extiende más allá del talud, el coeficiente de gasto se estima al multiplicar 0.74 por el parámetro estimado en la tabla 8.20.

EJEMPLO 8.5

Se tiene una alcantarilla horizontal de concreto de 4.0 ft (1.2 m) de diámetro. Si las condiciones de flujo son las dadas en la figura 8.38 y

$$w = 0.3 \text{ ft } (0.09 \text{ m})$$

$$y_1 = 7.0 \text{ ft } (2.0 \text{ m})$$

$$y_4 = 5.0 \text{ ft } (1.5 \text{ m})$$

$$z = 0$$

$$L_{2-3} = 50 \text{ ft } (15 \text{ m})$$

$$n = 0.012$$

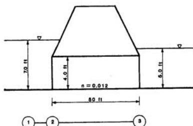


FIGURA 8.38 Esquema del ejemplo 8.5.

estime el gasto. Bodhaine (1976) originalmente propuso este ejemplo.

Solución

De los datos dados

$$\frac{y_1}{D} = \frac{7}{4} = 1.75$$

y

$$\frac{y_4}{D} = \frac{5}{4} = 1.25$$

De donde, con las tablas 8.14 y 8.15, se concluye que el flujo es del tipo 4.

El coeficiente de gasto determinado con la tabla 8.21 con $w/D = 0.3/4 = 0.075$ por interpolación lineal o

$$C_D = 0.955$$

de la figura 8.26

$$Q = C_D A_o \left[\frac{2g(h_1 - h_4)}{1 + (29C_D^2 n^2 L_{23}/R_o^{4/3})} \right]^{1/2}$$

donde el subíndice o se refiere al valor para alcantarilla llena. Para una alcantarilla con 4.0 ft (1.2 m) de diámetro,

$$A_o = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(4)^2}{4} = 12.6 \text{ ft}^2 \text{ (1.17 m}^2\text{)}$$

$$P_o = \pi D = \pi(4) = 12.6 \text{ ft (3.84 m)}$$

$$R_o = \frac{A_o}{P_o} = \frac{12.6}{12.6} = 1 \text{ ft (0.30 m)}$$

TABLA 8.22 **Coeficiente de gasto para alcantarillas rectangulares o circulares a paño en pared vertical en función de y_1/D y r/D o w/D, flujo tipo 5 (Bodhaine, 1976)**

	r/b, w/b, r/D, o *w/D*						
$(h_1 - z)/D$	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.14
1.4	0.44	0.46	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51
1.5	0.46	0.49	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54
1.6	0.47	0.51	0.54	0.55	0.55	0.56	0.56
1.7	0.48	0.52	0.55	0.57	0.57	0.57	0.57
1.8	0.49	0.54	0.57	0.58	0.58	0.58	0.58
1.9	0.50	0.55	0.58	0.59	0.60	0.60	0.60
2.0	0.51	0.56	0.59	0.60	0.61	0.61	0.62
2.5	0.54	0.59	0.62	0.64	0.64	0.65	0.66
3.0	0.55	0.61	0.64	0.66	0.67	0.69	0.70
3.5	0.57	0.62	0.65	0.67	0.69	0.70	0.71
4.0	0.58	0.63	0.66	0.68	0.70	0.71	0.72
5.0	0.59	0.64	0.67	0.69	0.71	0.72	0.73

entonces

$$Q = 0.955(12.6)\left\{\frac{2(32.2)(7.0 - 5.0)}{1 + [29(0.955)^2(0.012)^2(50)/(1)^{4/3}]}\right\}^{1/2}$$

$$= 130 \text{ ft}^3/\text{s } (3.7 \text{ m}^3/\text{s})$$

Coeficientes de gasto para flujo tipo 5

Los coeficientes de gasto para alcantarillas circulares o rectangulares a paño en una pared vertical con flujo tipo 5, se resumen en la tabla 8.22. Aunque el flujo tipo 5 no se presenta normalmente en alcantarillas con secciones de entrada y salida abocinadas, si $L/D < 6$ y $S_o > 0.03$, puede ocurrir el flujo tipo 5. Aun en estas condiciones, el flujo tipo 5 puede gradualmente convertirse en

TABLA 8.23 **Coeficientes de gasto en función de y_1/D para flujo tipo 5 en una alcantarilla con entrada abocinada (Bodhaine, 1976)**

$(h_1 - z)/D$	C_D	$(h_1 - z)/D$	C_D
1.4	0.48	2.0	0.57
1.5	0.50	2.5	0.59
1.6	0.52	3.0	0.61
1.7	0.53	3.5	0.63
1.8	0.55	4.0	0.65
1.9	0.56	5.0	0.66

TABLA 8.24 Coeficientes de gasto para alcantarillas con paredes de entradas inclinadas, flujo tipo 5 (Bodhaine, 1976)

	Ángulo de la pared de entrada, θ				
$(h_1 - z)/D$	30°	45°	60°	75°	90°
1.3	0.44	0.44	0.43	0.42	0.39
1.4	0.46	0.46	0.45	0.43	0.41
1.5	0.47	0.47	0.46	0.45	0.42
1.6	0.49	0.49	0.48	0.46	0.43
1.7	0.50	0.50	0.48	0.47	0.44
1.8	0.51	0.51	0.50	0.48	0.45
1.9	0.52	0.52	0.51	0.49	0.46
2.0	0.53	0.53	0.52	0.49	0.46
2.5	0.56	0.56	0.54	0.52	0.49
3.0	0.58	0.58	0.56	0.54	0.50
3.5	0.60	0.60	0.58	0.55	0.52
4.0	0.61	0.61	0.59	0.56	0.53
5.0	0.62	0.62	0.60	0.58	0.54

flujo tipo 6. Si, aun así se considera que pueda ocurrir un flujo tipo 5, entonces el coeficiente de gasto es una función de y_1/D (Tabla 8.23).

El coeficiente de gasto de una alcantarilla circular a paño con una pared vertical no se ve afectado por paredes inclinadas adicionales. Para el caso de alcantarillas rectangulares con paredes inclinadas y entradas cuadradas, el coeficiente de gasto es una función de y_1/D y θ (Tabla 8.24).

En el caso de una alcantarilla de metal corrugado que se extiende más allá de la pared o talud, el coeficiente base de gasto determinado con la tabla 8.22 debe modificarse con el parámetro k_L (Tabla 8.20). Para alcantarillas de concreto protuberantes con entrada y salida biseladas, el coeficiente de gasto se determina con la tabla 8.22.

Para alcantarillas circulares a escuadra y paño con el talud, el coeficiente de gasto se estima determinando un coeficiente base de la tabla 8.22 y multiplicando éste por 0.92. Si la alcantarilla es de pared delgada (e.g., metal corrugado) el parámetro k_L (Tabla 8.20) también debe emplearse.

EJEMPLO 8.6

Se tiene una alcantarilla de diámetro de 4.0 ft (1.2 m) con un flujo como el de la figura 8.39 y

$$\frac{r}{D} = 0.016$$

$$y_1 = 6.0 \text{ ft } (1.8 \text{ m})$$

$$z = 2.0 \text{ ft } (0.61 \text{ m})$$

$$L_{2-3} = 50 \text{ ft } (15 \text{ m})$$
$$S_o = 0.04$$
$$y_4 = 1.0 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$

Estímese el gasto. Bodhaine (1976) empleó por primera este ejemplo.

Solución

De los datos dados

$$\frac{y_1}{D} = \frac{6}{4} = 1.5$$

y

$$\frac{y_4}{D} = \frac{1}{4} = 0.25$$

De las tablas 8.14 y 8.15, se concluye que el flujo es del tipo 5 o 6. Bodhaine (1976) presentó dos figuras para diferenciar entre los flujos tipo 5 y 6, figuras 8.40 y 8.41. Si se usa la figura 8.40,

$$\frac{r}{D} = 0.016$$
$$\frac{L}{D} = \frac{50}{4} = 12.5$$
$$R_o = \frac{(\pi D^2/4)}{\pi D} = \frac{D}{4} = 1 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$

y

$$\frac{29n^2y_1}{R_o^{4/3}} = \frac{29(0.024)^2 6}{1} = 0.10$$

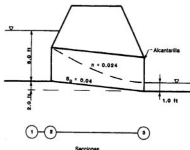


FIGURA 8.39 Esquema del ejemplo 8.6.

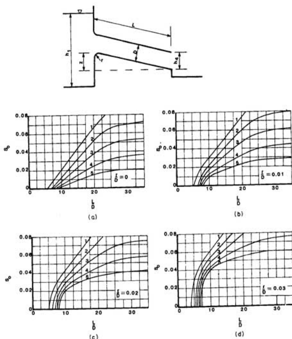


FIGURA 8.40 Criterios para diferenciar entre los flujos tipo 5 y 6 en alcantarillas circulares o rectangulares con barril rugoso. *(Bodhaine, 1976.)*

De esta figura se concluye que el flujo es tipo 5. Al emplear estos números en la figura 8.41 también se puede concluir que el flujo es del tipo 5.

Para un flujo tipo 5, el coeficiente de gasto se estima con la tabla 8.22; o para $r/D = 0.016$, $C_D = 0.484$. De la figura 8.26

$$Q = C_D A_o \sqrt{2gy_1} = 0.484 \frac{\pi(4)^2}{4} [2(32.2)(6)]^{1/2}$$

$$= 120 \text{ ft}^3/\text{s} \ (3.4 \text{ m}^3/\text{s})$$

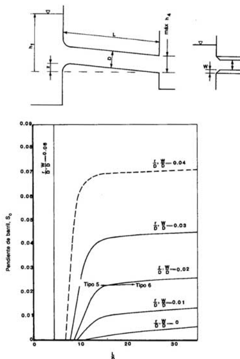


FIGURA 8.41 Criterios para diferenciar entre los flujos tipo 5 y 6 en alcantarillas circulares o rectangulares con barril de concreto, entrada cuadrada, redondeada, o biselada y con o sin paredes de entrada inclinadas. *(Bodhaine, 1976.)*

EJEMPLO 8.7

En una alcantarilla de concreto de 4.0 ft (1.2 m) de diámetro con una entrada biselada (Fig. 8.41), una condición del flujo remansada aguas arriba y

$$\frac{w}{D} = 0.075$$

$$y_1 = 7.0 \text{ ft } (2.1 \text{ m})$$
$$y_4 = 1.0 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$
$$z = 1.0 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$
$$L_{2-3} = 50 \text{ ft } (15 \text{ m})$$
$$n = 0.012$$

estímese el gasto en estas condiciones. Bodhaine (1976) presentó este ejemplo.

Solución

Para las condiciones dadas, de las tablas 8.14 y 8.15, puede ocurrir flujo tipo 5 o 6, ya que $y_1/D = 7/4 = 1.7$ y $y_4/D = 1/4 = 0.25$. De la figura 8.40 con $L/D = 50/4 = 12.5$ y $S_o = 1/50 = 0.02$, el flujo tipo 6 es el indicado.

De la figura 8.26 la ecuación para estimar el gasto en estas condiciones es

$$Q = C_D A_o \sqrt{2g(h_1 - h_3 - h_{f2-3})}$$

El coeficiente de gasto de la tabla 8.21 es $C_D = 0.95$, y la pérdida de carga por fricción entre las secciones 2 y 3 está dada por

$$h_{f2-3} = \frac{Q^2 L}{K_2 K_3}$$

Puesto que Q debe conocerse antes que pueda calcularse h_{f2-3}, se necesita una solución por tanteo. El valor inicial de Q se obtiene si se supone que $h_{f2-3} = 0$ o

$$Q = C_D A_o \sqrt{2g(h_1 - h_3)} = 0.95 \frac{\pi(4)^2}{4} \sqrt{2(32.2)(8 - 1)}$$
$$= 267 \text{ ft}^3/\text{s } (7.6 \text{ m}^3/\text{s})$$

Entonces

$$K_2 = K_3 = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} = \frac{1.49}{0.012} \left[\frac{\pi(4)^2}{4}\right] \left\{\frac{[\pi(4)^2]/4}{4\pi}\right\}$$
$$= K_3 = 1560$$

y

$$h_{f2-3} = \frac{Q^2 L}{K_2 K_3} = \frac{(267)^2(50)}{(1560)^2} = 1.5$$

En este momento se puede construir una tabla para continuar el procedimiento de solución

Q tanteado, ft^3/s	h_{f2-3}	Estimación nueva de Q ft^3/s
256	1.5	225
225	1.0	235
235	1.1	233

Por tanto, para las condiciones dadas se estima que

$$Q = 230 \text{ ft}^3/\text{s} \ (6.5 \text{ m}^3/\text{s})$$

En los párrafos anteriores se analizaron los métodos para la estimación del gasto a través de una alcantarilla, cuando se especifican algunos valores de las variables. En la generalidad de las condiciones de flujo, el cálculo del gasto de la alcantarilla es razonablemente preciso. Para los casos de carga pequeña (i.e., cuando $y_1/D < 1.25$) se pueden esperar resultados muy precisos, a no ser que se presente un tirante crítico entre la sección de llegada y la de entrada a la alcantarilla. En las situaciones de alta carga los resultados también pueden esperarse que sean precisos si el tipo de flujo se conoce en forma definitiva y $y_1/D > 1.75$. Los resultados para flujo tipo 6 también son precisos. En los valores de transición entre un tipo de flujo y otro, los gastos estimados no son tan precisos. Bodhaine (1976) notó que en estas situaciones se pueden esperar mejores resultados para alcantarillas circulares que para rectangulares. Al evaluar la precisión de las estimaciones de gastos, Bodhaine (1976) notó que se deben considerar 6 factores:

1. La precisión en los datos de elevaciones de las secciones de llegada y salida
2. La estabilidad del canal de llegada
3. La semejanza de las condiciones de entrada con las estándar
4. La forma y condición de la alcantarilla
5. La socavación de sedimentos en la alcantarilla
6. La posibilidad de que la alcantarilla se encuentre parcialmente obstruida por detritos

Bodhaine (1976) describe cómo pueden establecerse relaciones carga-gasto para alcantarillas, por lo que se sugiere al lector este documento para mayor información sobre el flujo en alcantarillas.

BIBLIOGRAFÍA

Bodhaine, G. L., "Measurement of Peak Discharge at Culverts by Indirect Methods," *Techniques of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey*, book 3, chapter A3, U.S. Geological Survey, Washington, 1976.

Bos, M. G. (Ed.), *Discharge Measurement Structures*, International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wagemingen, The Netherlands, 1976.

Carter, R. W., and Davidian, J., "General Procedure for Gaging Streams," *Techniques of Water Resources Investigation of the United States Geological Survey*, book 3, chapter A6, U.S. Geological Survey, Washington, 1968.

Corbett, D. M., et al., "Stream Gaging Procedure," Water Supply Paper 888, U.S. Geological Survey, Washington, 1943.

Kindsvater, C. E., and Carter, R. W. C., "Discharge Characteristics of Rectangular Thin Plate Weirs," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY6, December 1957, pp. 1453/1–1453/36.

Linsley, R. K., Jr., Kohler, M. H., and Paulhus, J. L. H., *Hydrology for Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Neill, C. R., "Hydraulic Tests on Pipe Culverts," Alberta Highway Research Report 62-1, Edmonton Research Council, Edmonton, Canada, 1962.

Parshall, R. L., Discussion of "Measurement of Debris-Laden Stream Flow with Critical Depth Flumes," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 103, 1938, pp. 1254–1257.

Smoot, G. F. and Novak, C. E., "Measurement of Discharge by the Moving Boat Method," *Techniques of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey*, book 3, chapter A11, U.S. Geological Survey, Washington, 1969.

Soucek, J., Howe, H. E., and Mavis, F. T., "Sutro Weir Investigations Furnish Discharge Coefficients," *Engineering News Record*, Nov. 12, 1936.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

Wilm, H. G., Cotton, J. S., and Storey, H. C., "Measurement of Debris-Laden Stream Flow with Critical-Depth Flumes," *Transactions of American Society of Civil Engineers*, vol. 103, 1938, pp. 1237–1253.

NUEVE



Flujo rápidamente variado en canales no prismáticos

SINOPSIS

SINOPSIS

Este capítulo trata sobre el flujo rápidamente variado en canales no prismáticos. En particular, se trata el flujo en contracciones de puentes; control de saltos hidráulicos por vertedores de cresta delgada y ancha, escalones y vados, y tanques amortiguadores; disipadores de caídas; y el diseño de transiciones en canales. Dado que en los capítulos anteriores se han analizado otros tipos de flujos rápidamente variados en canales no prismáticos, como los vertedores de cresta delgada y ancha y medidores de flujo crítico, el enfoque primordial de este capítulo es sobre las aplicaciones más que sobre la teoría.

9.1 INTRODUCCIÓN

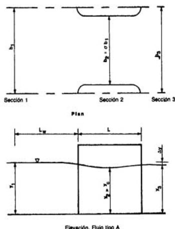
La presencia de flujo rápidamente variado a través de un canal no prismático es muy común en el estudio de la hidráulica de canales abiertos. Por ejemplo, en los capítulos anteriores se trataron vertedores de cresta delgada y ancha, y medidores de flujo crítico, todos éstos son casos de flujo rápidamente variado a través de canales no prismáticos. En este capítulo se estudiarán varios ejemplos adicionales de este tipo de flujo.

9.2 PILAS DE PUENTES

Son una obstrucción del flujo; por tanto, debe presentarse una interacción entre las pilas y el flujo. Aunque el empuje del flujo sobre las pilas es menor, en comparación con otras cargas a las que se someten estos elementos estructurales, no se pueden ignorar los efectos de remanso que producen las pilas levantando el nivel del agua aguas arriba de éstas. La importancia de los efectos del remanso se debe al aumento en los costos que éste produce para la protección por inundaciones. Por ende, es muy deseable que el ingeniero pueda estimar en forma precisa el efecto del remanso para una condición dada de flujo y de pilas de puentes.

La figura 9.1 define en forma esquemática la situación que se presenta con un par de pilas. Cuando se tiene una contracción, como la mostrada en la figura 9.1, en un flujo controlado por fricción, entonces:

1. El agua en la vecindad de la sección 1 empieza a acelerarse en el área central, mientras que se desacelera en la vecindad de las fronteras. Una aproximación adecuada de la ubicación de la sección 1 se determina si se supone que se encuentra a un ancho de abertura, aguas arriba, del centro de la abertura (Chow, 1959). Mathai (1976) dice que la sección 1 se presenta a una distancia igual a dos veces el ancho de abertura aguas arriba del puente.



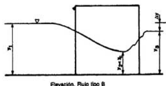


FIGURA 9.1 Esquema de definición para el flujo entre pilas de puentes.

2. En la contracción, el flujo se caracteriza por aceleraciones paralelas y normales a las líneas de corriente y por una baja rápida del nivel del agua.

3. Dentro de la contracción, el flujo "vivo" se contrae a un ancho que es menor al de la abertura. El espácio entre el flujo vivo y la frontera sólida está ocupado por vórtices.

4. En la sección 2, el flujo vivo tiene su contracción mínima, que es análoga a la *vena contracta* en flujo a través de un orificio.

5. En la sección 4 se restablece el flujo uniforme. Entre las secciones 3 y 4 se tiene un flujo gradualmente variado.

Dada la situación descrita arriba, se tienen varios enfoques posibles para la solución del problema. Por ejemplo se puede suponer que

$$M_1 - M_2 = P_f \tag{9.2.1}$$

donde M_1 y M_2 = funciones de cantidad de movimiento específico en las secciones 1 y 2 respectivamente, y P_f = coeficiente de arrastre de la pila. Aunque la ecuación (9.2.1) es un enfoque racional a la solución del problema, generalmente no se considera porque no toma en cuenta la forma de la pila. La solución precisa del problema de las pilas de puentes necesita experimentos.

Yarnell (1934*a* y 1934*b*) examinó experimentalmente el flujo a través de pilas de puentes y determinó

$$\frac{\Delta y}{y_3} = k\, \mathbf{F}_3^2 (k + 5\mathbf{F}_3^2 - 0.6)(\sigma + 15\sigma^4) \tag{9.2.2}$$

donde, refiriéndose a la figura 9.1, Δy = diferencia de tirantes entre las secciones 1 y 3; $\mathbf{F}_3$ = número de Froude en la sección 3; k = parámetro empírico que caracteriza la forma de la pila (Tabla 9.1); y

$$\sigma = 1 - \Gamma \tag{9.2.3}$$

donde

$$\Gamma = \frac{b_2}{b_1} \tag{9.2.4}$$

En sus experimentos, Yarnell (1934*a* y 1934*b*) examinó casos en que Γ se encontraba entre 0.88 y 0.50. Aunque estos valores de Γ representan contracciones más fuertes que las encontradas en la práctica moderna, la tendencia sistemática de los resultados de Yarnell (1934*a* y 1934*b*) es que la extrapolación de éstos, para valores de σ en el rango de 0.95, deben ser válidos.

Los experimentos de Yarnell suponen que σ es lo bastante grande para no estrangular el flujo, i.e., provoca flujo crítico. El valor límite de Γ, o sea, el

TABLA 9.1 Valores de k en la ecuación (9.2.2)

Forma de la pila	k
Inicio y final semicirculares	0.9
Inicio y final en forma de lente*	0.9
Pilas de dos cilindros con diafragma entre ellos	0.95
Pilas de dos cilindros sin diafragma	1.05
Inicio y final triangulares de 90°	1.05
Inicio y final cuadrados	1.25

*Un inicio o final en forma de lente se forma con dos curvas circulares que tienen cada una un radio igual al doble del ancho de la pila y son tangenciales a una cara de la pila

valor de Γ debajo del cual el flujo se estrangula, puede estimarse si se tiene dos suposiciones diferentes. Si $E_1 = E_2$, entonces el valor límite de Γ puede estimarse por

$$\Gamma_L = \left[\frac{27\mathbf{F}_1^2}{(2 + \mathbf{F}_1^2)^3}\right]^{1/2} \tag{9.2.5}$$

y si $M_2 = M_3$, entonces

$$\Gamma_L = \frac{\left[2 + (1/\Gamma L)\right]^3 \mathbf{F}_3^4}{(1 + 2\mathbf{F}_3^2)^3} \tag{9.2.6}$$

donde Γ_L = valor límite de Γ y E_1 y E_2 son las energías específicas en las secciones 1 y 2, respectivamente. Henderson (1966) recomendó que la ecuación (9.2.6) debe emplearse para estimar Γ porque no depende de la suposición de conservación de energía; además sus variables independientes se conocen inicialmente. Siempre y cuando la ecuación Yarnell hubiere empleado para distinguir entre el flujo tipo A y el tipo B. Cuando se tiene flujo tipo B, se presenta un salto hidráulico aguas abajo de la sección 2.

La contracción del campo de flujo en un puente puede servir también para medir de manera indirecta el gasto. La ecuación para el gasto se deriva al escribir y combinar las ecuaciones de energía y continuidad entre las secciones 1 y 3 o

$$Q = C_D A_2 \sqrt{2g\left(\Delta y + \alpha_1 \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - h_f\right)} \tag{9.2.7}$$

donde Q = gasto
C_D = coeficiente de gasto
$\overline{u}_1$ = velocidad en la sección 1
h_f = pérdida por fricción entre las secciones 1 y 2
A_2 = área de flujo de la sección 2

Matthai (1976) notó que la sección 2 define el área mínima sobre una línea paralela a la contracción, que a menudo se localiza entre las pilas. Si se presenta socavación entre las pilas, entonces quizá una sección entre éstas no sea la de área mínima. Además, cuando la socavación es muy marcada, el flujo entre las pilas puede controlarse por el vado de socavación en vez de por la contracción.

El factor de corrección por energía cinética de la ecuación (9.2.7) se estima mediante

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} (K_i)^3/(A_i)^2}{K_T^3/A_T^2} \tag{9.2.8}$$

donde A = área de flujo
K = factor de sección
i = subíndice de la subsección de la sección transversal entera
T = subíndice de la sección transversal entera

La pérdida por fricción de la ecuación (9.2.7) se estima al dividir la distancia entre la sección 1 y 3 en dos tramos: de la sección 1 a la cara de aguas arriba de la entrada del puente y, desde ésta hasta la sección 3.

La variable h_f se estima entonces por

$$h_f = L_w\left(\frac{Q^2}{K_1K_3}\right) + L\left(\frac{Q}{K_3}\right)^2 \tag{9.2.9}$$

donde L_w = longitud de la sección de llegada
L = longitud de la contracción del puente
K_1 y K_3 = factores de sección en las secciones 1 y 3, respectivamente

Las distancias L_w y L se definen en la figura 9.1.

En la ecuación (9.2.7) el coeficiente de gasto es una combinación de: 1) un coeficiente de contracción, 2) un coeficiente de pérdidas por turbulencia, y 3) un coeficiente de corrección por velocidad para la sección de control. En notación funcional,

$$C_D = f\left(\sigma, \frac{L}{b}, \frac{r}{b}, \frac{w}{b}, \theta, \frac{x}{b}, \frac{y_a + y_b}{2b}, \frac{t}{y_3 + \Delta y}, j, \mathbf{F}, \zeta, e, S_s, L_d, \frac{L_d}{b_d}\right) \tag{9.2.10}$$

Las variables usadas en la ecuación (9.2.10) se definen en la tabla 9.2 y figuras 9.1 a 9.5. Las variables σ, L/b, y $\mathbf{F}$ son comunes a todos los tipos de aberturas de puentes; de éstas, σ es la más importante y $\mathbf{F}$ la menos importante (Matthai, 1976).

Como se recalcó, las propiedades geométricas de la abertura tienen un importante efecto sobre el flujo. La mayoría de las aberturas de puentes se pueden clasificar dentro de los siguientes cuatro tipos básicos:

Tipo 1. Contracción tipo 1 (Fig. 9.2): tiene pilas verticales con o sin aleros. El redondeo de la entrada, ángulo de los aleros, ángulo de la contracción respecto al flujo, y el número de Froude influyen en el gasto.

TABLA 9.2 Definición de variables para la ecuación (9.2.10)

Variable	Definición
σ	Razón de contracción del canal
b	Ancho de la abertura del puente-distancia entre los remates (Figs. 9.1 a 9.5)
L	Longitud de los remates o pilas, definida en forma diferente para cada tipo de puente (Figs. 9.1 a 9.5)
r	Radio del redondeo de la esquina de la entrada para contracciones de cara vertical
ω	Dimensión de un alero o cámara
Θ	Ángulo agudo entre un alero y el plano de la contracción
x	Distancia horizontal desde la intersección del remate y de los taludes hasta la ubicación del talud que tiene la misma elevación que la superficie del agua en la sección 1
y_a, y_b	Tirante al pie de cada remate de la sección 3
y_3	Tirante medio en la sección 3 $$y_3 = \frac{A_3}{b_t}$$
A_3	Área bruta de la sección 3
t	Distancia vertical entre la superficie del agua en la sección 1 y el miembro horizontal más bajo de un puente parcialmente sumergido
j	Razón del área proyectada de las partes sumergidas de las pilas o pilotes en la abertura del tanque a A_3 o $$j = \frac{A_j}{A_3}$$
A_j	Área tranversal sumergida proyectada sobre la sección 3 de las pilas o pilotes
$\mathbf{F}$	Número de Froude de la sección contraída
ζ	Ángulo agudo entre el plano de la contracción y una línea normal al trazo de la corriente
e	Razón de excentricidad $$e = \frac{K_a}{K_b} \leq 1$$
S_s	Inclinación de los taludes
L_d	Longitud de los diques
b_d	Distancia de reducción para diques rectos

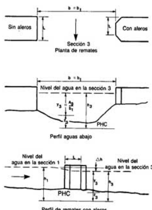


FIGURA 9.2 Definición de la abertura tipo 1, de taludes verticales y de remates verticales con o sin aleros (*Con base en Matthai, 1976.*)

Tipo 2. Contracción tipo 2 (Fig. 9.3): tiene taludes inclinados y remates verticales. En tirante del agua en los remates y el ángulo entre el flujo y la contracción afectan el gasto.

Tipo 3. Contracción tipo 3 (Fig. 9.4): tiene los taludes y remates inclinados. El gasto se ve afectado por la geometría de entrada y el ángulo de la contracción respecto al flujo.

Tipo 4. Contracción tipo 4 (Fig. 9.5): tiene taludes inclinados con remates verticales y aleros. El ángulo de los aleros, el ángulo entre el flujo y la contracción, la inclinación de los taludes y el número de Froude influyen en el gasto. Debe notarse que a pesar de que se le agreguen aleros no se convierte necesariamente en contracción tipo 4. Si el flujo pasa por la arista aguas arriba en forma vertical, se tiene una contracción tipo 1; aunque, si el flujo pasa por una arista inclinada del alero, entonces se tiene una contracción tipo 4.

El análisis de Matthai (1976) define la razón de contracción del canal como la proporción del gasto total que entra a la contracción desde los márgenes del canal o

$$\sigma = \frac{Q - q'}{Q} = 1 - \frac{q'}{Q} \qquad (9.2.11)$$

donde Q = gasto total de canal y q' = gasto que pasaría por la abertura del puente si no se tuviera una contracción ahí. Si se supone que el gasto total se distribuye proporcionalmente, a través de la sección de llegada, a las subsecciones del canal, entonces la ecuación (9.2.11) se convierte en

$$\sigma = 1 - \frac{K_q}{K} \tag{9.2.12}$$

donde K = factor de sección de la sección de llegada completa y K_q = factor de sección de la subsección del canal completo que ocupa el flujo ′ (Fig. 9.6). Respecto a la figura 9.6, el factor de sección completo está dado por

$$K = K_a + K_q + K_b \tag{9.2.13}$$

La determinación del coeficiente de gasto, especificado en la ecuación (9.2.7), suele necesitar varios pasos de cálculo. Después de identificar el tipo de contracción, se siguen estos pasos:

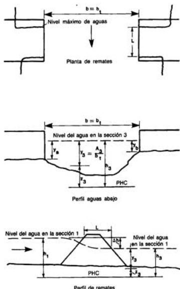


FIGURA 9.3 Definición de la abertura tipo 2, de taludes inclinados y de remates verticales. (*Matthai, 1976.*)

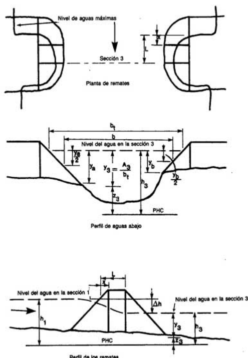


FIGURA 9.4 Esquema definitorio de una abertura tipo 3, de taludes inclinados y de remates inclinados. *(Matthai, 1976.)*

1. Una vez especificados σ y L/b, se consultan las figuras 9.7 a 9.17 para determinar un coeficiente base C' de gasto. Si se satisfacen todas las condiciones de la curva base, entonces el cálculo concluye; si no, se requieren pasos adicionales.

2. Si la abertura del puente difiere de las condiciones estándar únicamente por el ángulo y el número de Froude, entonces el coeficiente de gasto final está dado por

$$C_D = C' \, k_F k_A \qquad (9.2.14)$$

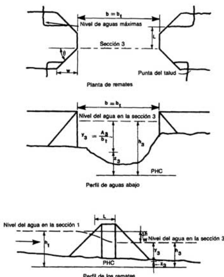


FIGURA 9.5 Esquema definitorio de una abertura tipo 4, con taludes inclinados y de remates verticales con aleros. *(Matthai, 1976.)*

donde C' = coeficiente de gasto base para el tipo de puente y para los valores dados de L/b

h_F = coeficiente de ajuste de C' para valores no estándar de $\mathbf{F}$

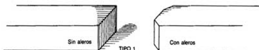
k_A = coeficiente de ajuste de C' por la influencia del ángulo

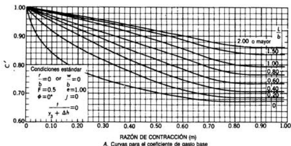
3. La excentricidad e de la abertura del puente se define como la razón entre los factores de sección K_a y K_b (Fig. 0.6) o

$$e = \frac{K_a}{K_b} \tag{9.2.15}$$

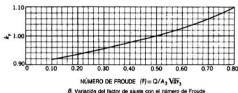
Si $e > 0.12$, no es necesaria la corrección por excentricidad. Si $e = 0$, entonces se debe seguir el siguiente procedimiento:

a. La sección 1, de llegada, se ubica a una distancia $L = 2b$ aguas arriba del puente.

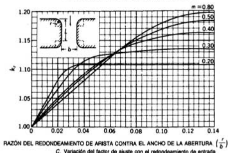




A. Curvas para el coeficiente de gasto base



B. Variación del factor de ajuste con el número de Froude



C. Variación del factor de ajuste con el redondeamiento de entrada

FIGURA 9.7 Coeficientes para aberturas tipo 1, para taludes verticales y para remates verticales. *(Matthai, 1976.)*

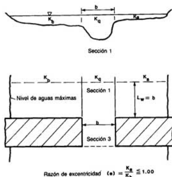


FIGURA 9.6 Esquema definitorio para la razón de contracción σ y una contracción excéntrica. *(Matthai, 1976.)*

b. El coeficiente de gasto base se determina usando la razón $L/2b$ y únicamente el remate en el lado contracto.

c. La elevación de la superficie del agua en la sección 1 se toma como el promedio de las elevaciones en los extremos de la sección.

d. La elevación de la superficie del agua en la sección 3 se toma sólo como la elevación del lado contracto; Δy se determina nada más para este lado también.

Cuando $e = 0$, la sección se llama *contracción excéntrica completa* y se considera igual a la mitad de una contracción normal. Por esta razón, el ancho de la contracción para la estimación de C' y de L se toma como $2b$. El ajuste por excentricidad k_e se determina en función de e con la tabla 9.3.

4. El efecto de las pilas o pilotes de puentes dentro de la contracción también debe considerarse. El área sumergida total de pilas o pilotes se proyecta sobre un plano en la sección 3. La razón del área proyectada de las pilas o pilotes, A_j, al área de flujo de la sección 3 es por definición

$$J = \frac{A_j}{A_3} \tag{9.2.16}$$

El factor de ajuste k_j se define en la figura 9.17. Para pilas, k_j es una función de σ, mientras que para pilotes es función de σ y de L/b. En la figura 9.17, las líneas punteadas ilustran la determinación k_j para pilas, cuando $\sigma = 0.41$, $J = 0.04$, y $L/b = 0.69$. Para estos datos, ubíquese en la gráfica derecha en $\sigma = 0.41$; muévase verticalmente hasta intersectar la curva para

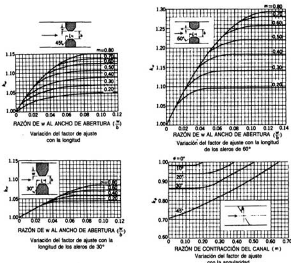
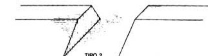


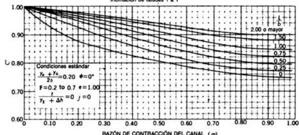
FIGURA 9.8 Variación del factor de ajuste para taludes verticales y para remates de la abertura tipo 1. *(Matthai, 1976.)*

$L/b = 0.69$; muévase horizontalmente hasta intersectar la línea de $J = 0.10$ en la gráfica izquierda; muévase verticalmente hasta intersectar la línea para $J = 0.04$ y horizontalmente hasta determinar el valor de k_j; en este caso $k_j = 0.967$.

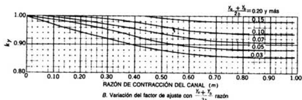
5. Cuando se presentan condiciones de flujo extremas en el canal, los miembros estructurales más bajos del puente pueden sumergirse, lo cual provoca un aumento en el perímetro mojado en la contracción y una mayor obstrucción del flujo. Sea t la distancia vertical entre la superficie del agua en la sección 1 y el miembro horizontal más sumergido del puente (Fig. 9.18). El factor de ajuste por sumergencia k_t se define en términos de la razón de t a la suma $(k_3 + \Delta y)$ (Fig. 9.18). En condiciones muy extremas de flujo, la carpeta o piso del puente puede encontrarse totalmente sumergido. Si se presenta esta situación, Matthai (1976) recomienda que el gasto se estime de la siguiente forma:

   a. El área hidráulica de la sección 3, A_3, se estima como el producto de b por y_3 menos la sección transversal de la parte sumergida del puente.

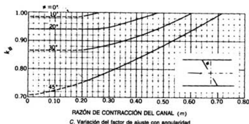




A. Curvas para el coeficiente de gasto base



B. Variación del factor de ajuste con $\frac{Y_a + Y_b}{2b}$ razón



C. Variación del factor de ajuste con angularidad

FIGURA 9.9 Coeficientes de las aberturas tipo 2, inclinación de taludes 1:1, remates verticales. *(Matthai, 1976.)*

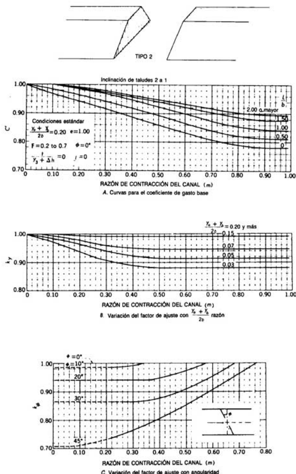


FIGURA 9.10 Coeficientes para abertura tipo 2, inclinación de taludes 2:1, remate vertical. *(Matthai, 1976.)*

A. Curvas para el coeficiente de gasto base

B. Variación del factor de ajuste con angularidad

C. Variación del factor de ajuste con $\frac{x}{b}$ razón

FIGURA 9.11 Coeficientes para aberturas tipo 3, inclinaciones de taludes y remates de 1:1. *(Mattahi, 1976.)*

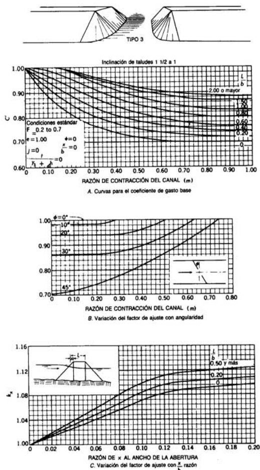


FIGURA 9.12 Coeficientes para abertura tipo 3, inclinaciones de taludes y remates de 1 1/2:1. (*Matthai, 1976.*)

TIPO 3

Inclinación de taludes 2 a 1

RAZÓN DE CONTRACCIÓN AL CANAL (m)

A. Curvas para el coeficiente de gasto base

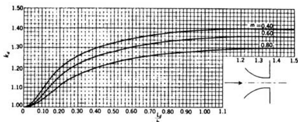
RAZÓN DE CONTRACCIÓN AL CANAL (m)

B. Variación del factor de ajuste con angularidad

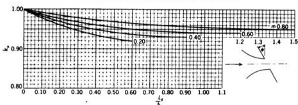
RAZÓN DE x AL ANCHO DE LA ABERTURA ($\frac{x}{b}$)

C. Variación del factor de ajuste con $\frac{x}{b}$ Tipo

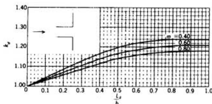
FIGURA 9.13 Coeficientes para aberturas tipo 3, inclinaciones de taludes y remates de 2:1. *(Matthai, 1976.)*



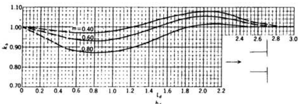
A. Variación del factor de ajuste con la longitud del dique elíptico



B. Variación del factor de ajuste con la angularidad del dique elíptico



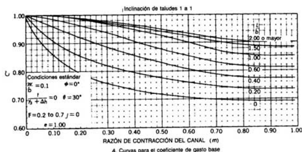
C. Variación del factor de ajuste con la longitud del dique recto



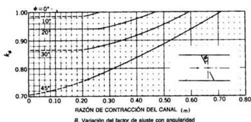
D. Variación del factor de ajuste con la reducción del dique recto

FIGURA 9.14 Variación del factor de ajuste para diques de espolón. *(Matthai, 1976.)*

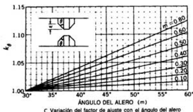




A. Curvas para el coeficiente de gasto base



B. Variación del factor de ajuste con angularidad



C. Variación del factor de ajuste con el ángulo del alero

FIGURA 9.15 Coeficientes para abertura tipo 4, inclinación de taludes de 1:1, y remates verticales con aleros. *(Matthai, 1976.)*

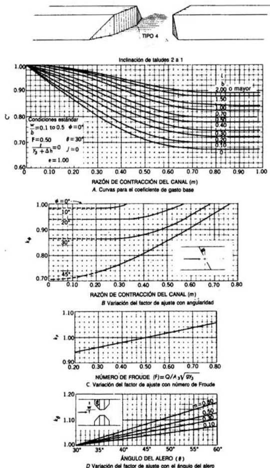


FIGURA 9.16 Coeficientes para abertura tipo 4, inclinación de taludes de 2:1, remates verticales con aleros. *(Matthai, 1976.)*

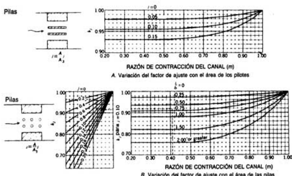


FIGURA 9.17 Variación del factor de ajuste para pilas y pilotes. *(Matthai, 1976.)*

b. Supóngase que $k_t = 1.00$.
c. Estímese el gasto con la ecuación (9.2.7).
d. El gasto del paso *c* es una estimación del gasto total a través de la contracción.

6. La alineación de los remates con el flujo es también un factor crucial. Cuando la contracción se encuentra a un ángulo ζ con el flujo, los remates pueden estar paralelos al flujo o perpendiculares a los taludes. El factor de ajuste k_ζ es el mismo para ambas condiciones si $\zeta \leq 20°$. Si $\zeta > 20°$, entonces se requiere un ajuste adicional; aunque no se tienen datos para evaluar este ajuste en este momento, por lo que no se puede ajustar por este efecto.

Los ajustes anteriores se aplican a los cuatro tipos de contracciones consideradas aquí, y sus efectos en el coeficiente de gasto pueden —según la situación específica— varían de menor a mayor importancia.

TABLA 9.3 Factor de ajuste por excentricidad. (Matthai, 1976.)

e	k_e
0	0.953
0.02	0.966
0.04	0.976
0.06	0.984
0.08	0.990
0.10	0.995
0.12	1.00

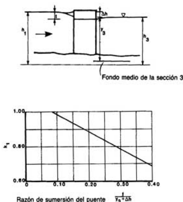


FIGURA 9.18 Variación del factor de ajuste con la razón de sumergencia del puente. *(Matthai, 1976.)*

Quizá sean necesarios otros factores de ajustes, según sea el tipo de contracción. Las curvas para estimar estos factores acompañan las curvas del coeficiente de gasto base para los cuatro tipos de puentes considerados. Respecto a estos coeficientes adicionales, se deben tomar en cuenta los siguientes comentarios:

1. La angularidad es la relación entre una contracción inclinada y las líneas de flujo de un canal sin obstrucción (Fig. 9.19*a* y *b*). El factor de ajuste por angularidad k_ζ es una función de la razón de contracción σ y el grado de angularidad ζ. La angularidad no debe confundirse con la curvatura del canal.

   Asimismo, la angularidad puede tener un efecto significativo sobre la distancia *L*, que es la distancia entre las secciones 1 y 2. Para canales no alineados con secciones paralelas, la distancia *L* debe medirse desde el centroide de la sección de llegada hasta el centro de la sección 2. En la figura 9.19*b*, no se requiere ningún ajuste por angularidad, pero la distancia de *L* se mide sobre la cuerda indicada.

2. En los casos en que la inclinación del talud es un factor que necesite un ajuste del coeficiente de gasto, quizá se requiera una interpolación. En general, los resultados presentados aquí son cuando la inclinación de los taludes es 1:1 y 2:1. Para otros taludes que se encuentren dentro de estos

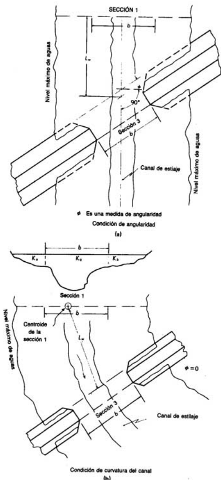


FIGURA 9.19 *a*) Definición de angularidad. *(Matthai, 1976.)* *b*) Esquema definitorio para comparar las condiciones de angularidad con la curvatura del canal. *(Matthai, 1976.)*

valores a menudo resulta satisfactoria una interpolación lineal (Matthai, 1976).

3. En algunos casos, los dos remates del puente pueden ser de distintos tipos. En estos casos Matthai (1976) recomendó que el coeficiente de gasto medio se estime por

$$C_D = \frac{C_L K_L + C_R K_R}{K_L + K_R} \tag{9.2.17}$$

donde los subdíndices L y R se refieren a los coeficientes de gastos y factores de sección izquierdos y derechos.

Debe tenerse en cuenta que los datos y resultados presentados aquí no son de ninguna manera exhaustivos. En algunos casos, el ingeniero tendrá que usar su juicio y los datos disponibles para estimar un coeficiente razonable de gasto. También es apropiado notar en este momento que el coeficiente de gasto nunca debe exceder de 1.00. Si la aplicación de factores de ajuste al coeficiente de gasto base arroja valores mayores que 1.00, el valor de C_D debe igualarse a 1.00. Además, si las cuerdas aguas abajo y arriba del puente se encuentran sumergidas, entonces el valor máximo del coeficiente de gasto es k_t.

Una contracción de aberturas múltiples se define como una serie de contracciones de aberturas sencillas. Cada una de éstas lleva libremente agua, que se origina de un solo canal de llegada. La premisa de contracciones se supone válida cuando: 1) existen dos o más pares de remates y uno o más de los taludes interiores o, 2) si existen pilas o mallas que separan varias aberturas entre dos estribos. En el caso de contracciones con aberturas múltiples, el gasto se estima estableciendo dos seudofronteras y determinando el gasto entre estas fronteras, siempre y cuando se suponga que los flujos son independientes. Este procedimiento quizá ocasione que la línea arbitraria defina la sección 1 como una serie de líneas discontinuas a distancias cambiantes desde el puente, en vez de una sola línea continua a través del canal.

La ecuación general de gasto para una contracción de puente [Eq. (9.2.7)] debe resolverse por tanteo. Se puede corregir una ecuación explícita para el gasto si: se sustitiye Q/A_1 por $\bar{u}_1$, si la ecuación (9.2.9) se sustituye por h_f en la ecuación (9.2.7) y si se resuelve la ecuación resultante para Q o

$$Q = 8.02\, C_D A_3 \left[\frac{\Delta y}{1 - \alpha_1 C_D^2 (A_3/A_1)^2 + 2g C_D^2 (A_3/K_3)^2 (L + L_w K_3/K_1)} \right]^{1/2} \tag{9.2.18}$$

Si C_D, el coeficiente de gasto, es una función del número de Froude en la sección 3, de todas maneras se necesitará una solución por tanteo de la ecuación (9.2.18) para la determinación del gasto.

EJEMPLO 9.1

Estímese el gasto de avenida pico a través de una abertura de puente en un canal recto, uniforme si:

1. La sección de llegada se encuentra a 300 ft (91 m) aguas arriba del puente y tiene las siguientes características geométricas e hidráulicas:

2. En el punto donde el puente atraviesa el canal, el margen del canal está completamente obstruido por el terraplén del puente.

3. La contracción es del tipo 1 (Fig. 9.2) con 180 ft (55 m) de ancho y 30 ft (9.1 m) de largo.

4. La elevación media del agua en la sección contracta está a 5 ft (1.5 m) por debajo de la sección de llegada.

5. El canal principal y el lateral son de sección aproximadamente rectangulares. El principal tiene 180 ft (55 m) de ancho y 29.8 ft (9.1 m) de profundidad y el lateral 390.4 ft (119 m) de ancho y 14.6 ft (14.5 m) de profundidad.

Nota: Chow presentó por primera vez en este ejemplo 1959.

Solución

El problema se resuelve si primero se calcula un coeficiente de gasto base, (éste se modificará si así lo requiere la geometría de la contracción bajo estudio) y por último, se resuelve la ecuación (9.2.18) para el gasto.

De la ecuación (9.2.12), la razón de contracción es

$$\sigma = 1 - \frac{K_q}{K}$$

Subsección	A, ft^2 (m^2)	P, ft (m)	n	α
Sección principal	5360 (498)	225 (69)	0.035	1.10
Sección lateral	5710 (530)	405 (123)	0.040	1.11

donde K = factor de sección de la sección de llegada y K_q = factor de sección de la subsección del canal ocupada por el gasto q'. De los datos dados

$$K = \left(\frac{1.49}{n} AR^{2/3}\right)_{\text{principal}} + \left(\frac{1.49}{n} AR^{2/3}\right)_{\text{lateral}}$$

$$= \frac{1.49}{0.035} (5360) \left(\frac{5360}{225}\right)^{2/3} + \frac{1.49}{0.040} (5710) \left(\frac{5710}{405}\right)^{2/3}$$

$$= 1.89 \times 10^6 + 1.24 \times 10^6 = 3.13 \times 10^6$$

y

$$K_q = \left(\frac{1.49}{n} AR^{2/3}\right)_{\text{principal}} = 1.89 \times 10^6$$

entonces

$$\sigma = 1 - \frac{K_q}{K} = 1 - \frac{1.89 \times 10^6}{3.13 \times 10^6} = 0.40$$

El enunciado del problema da a entender tácitamente que la excentricidad [Ec. (9.2.15)] es cero; por lo que, el segundo parámetro requerido para estimar el coeficiente de gasto base de la figura 9.7*a* es

$$m = \frac{L}{2b} = \frac{30}{2(180)} = 0.08$$

De la figura 9.7*a* se tiene

$$C' = 0.75$$

y si se corrige por causa de la excentricidad (Tabla 9.3)

$$C_D = k_i C' = 0.953\ (0.75) = 0.71$$

De los anteriores datos, debe suponerse que no se tienen otros ajustes "geométricos" relevantes para el coeficiente de gasto; i.e., no hay redondeo de los remates, ni aleros, ni pilas ni pilotes, la angularidad es cero, ningún elemento estructural se encuentra sumergido y el número de Froude en la sección 3 es 0.5 (por las suposiciones inherentes a la Fig. 9.7*a*).

En este momento, es necesaria una solución por tanteos para el gasto dado, ya que el ajuste faltante del coeficiente de gasto está en función del número de Froude en la sección 3; además, la determinación del número de Froude en la sección 3 necesita de una estimación del gasto.

El valor del factor de corrección por energía cinética está dado por

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i K_i^3/A_i^2)}{\left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right)^3 / A^2} = \frac{1.10(1.89 \times 10^6)^3/5360^2 + 1.11(1.24 \times 10^6)^3/5710^2}{(1.89 \times 10^6 + 1.24 \times 10^6)^3/(5360 + 5710)^2}$$

$$= 1.29$$

Y, en la sección 3

$$A_3 = 180(29.8 - \Delta y) = 180(29.8 - 5) = 4460 \text{ ft}^2 \text{ (415 m}^2\text{)}$$

$$P_3 = 180 + 2(29.8 - \Delta y) = 180 + 2(29.8 - 5) = 229.6 \text{ ft (70 m)}$$

$$R_3 = \frac{A}{P} = \frac{4460}{229.6} = 19.4 \text{ ft (5.9 m)}$$

y $$K_3 = \frac{1.49}{n} A_3 R_3^{2/3} = \frac{1.49}{0.035}(4460)(19.4)^{2/3} = 1.37 \times 10^6$$

Por lo que, al sustituir estos valores en la ecuación (9.2.18), se tiene

$$Q = 8.02\, C_D A_3 \left[\frac{\Delta y}{1 - \alpha_1 C_D^2 (A_3/A_1)^2 + 2g\, C_D^2\, (A_3/K_3)^2\, [L + (L_w K_3/K_1)]} \right]^{1/2}$$

$$= 8.02(0.71)(4460) \left[5/\{1 - 1.29(0.71)^2(4460/11\,070)^2 \right.$$

$$+ 2(32.2)(0.71)^2(4460/1.37 \times 10^6)^2$$

$$\left. \times\, [30 + 300\,(1.37 \times 10^6/3.13 \times 10^6)]\} \right]^{1/2}$$

$$= 58\,300 \text{ ft}^3\text{/s (1600 m}^3\text{/s)}$$

Se puede verificar la suposición inicial sobre el valor del número de Froude en la sección 3:

$$\bar{u}_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{58\,300}{4460} = 13.1 \text{ ft/s (4.0 m/s)}$$

$$D_3 = \frac{A_3}{T_3} = \frac{4460}{180} = 24.8 \text{ ft (7.6 m)}$$

y $$\mathbf{F}_3 = \frac{\bar{u}_3}{\sqrt{gD_3}} = \frac{13.1}{\sqrt{32.2(24.8)}} = 0.46$$

De la figura 9.7*b* el factor de ajuste por número de Froude en la sección 3 es

$$k_F = 0.995$$

y, por tanto, la nueva estimación para el coeficiente de gasto es

$$C_D = k_e k_F C' = 0.953(0.995)(0.75) = 0.71$$

Por lo que, la estimación inicial del gasto se considera correcta.

El material precedente ha tratado, con bastante detalle, las técnicas que pueden emplearse para determinar el gasto que atraviesa una abertura de puente. Una cuestión igualmente importante es la concerniente a la determinación de los perfiles de flujo para distintos tipos y formas de puentes. Se tienen muchas metodologías para la estimación de pérdidas de energía a través de puentes; véase, por ejemplo, U.S. Roads (documento anónimo, 1960), y el U.S. Geological Survey (documento anónimo 1964). Eichert (1970a) revisó y comparó las diversas subrutinas empleadas en varios modelos numéricos para la estimación de perfiles de flujo gradualmente variado. En un trabajo subsecuente, Eichert y Peters (1970b) notaron que los diferentes métodos no daban resultados comparables para un conjunto dados de condiciones. También notaron varias limitaciones serias de los métodos existentes:

1. Cuando la superficie libre del agua se obstruye por un puente, se presenta un flujo a presión o una combinación de flujo a presión con flujo de vertedor. Aunque las metodologías para la estimación de flujos a presión y de vertedores están bien desarrolladas, se tiene muy poca información sobre el flujo a través de puentes.

2. No existen procedimientos para la determinación precisa de las condiciones de flujo cuando falla el puente.

3. No hay procedimientos que tomen en cuenta la socavación bajo condiciones de gastos altos.

4. Aunque las obstrucciones causadas por basura y detritos producen efectos importantes sobre las elevaciones aguas arriba del puente, no se toman en cuenta estas condiciones.

Por ende, se requiere una mayor investigación en este campo.

El procedimiento del Hydrologic Engineering Center (HEC) para la estimación de pérdidas de un flujo bajo se describe en varias publicaciones (véase, por ejemplo, Eichert y Peters, 1970b, Feldman, 1981, el documento anónimo, 1979).

Nota: La condición de flujo bajo se presenta cuando la superficie del agua no se encuentra en contacto con la cuerda baja o carpeta del puente. En esta me-

todología, las pérdidas causadas por la expansión y contracción aguas arriba y abajo de la estructura se estiman en la misma forma que se haría si no estuviera el puente. Esto es, se multiplica un coeficiente de pérdida por la diferencia absoluta entre las cargas de velocidad afuera y adentro de la contracción. Dentro de la abertura del puente —para puentes sin pilas— la fricción en los márgenes del puente se toma en cuenta con los términos de fricción de frontera del modelo de flujo gradualmente variado. Cuando se tienen pilas, las pérdidas asociadas con éstas se estiman al usar el principio de conservación de cantidad de movimiento.

La figura 9.20 define un sistema notacional para el siguiente desarrollo. La sección 1 se localiza inmediatamente aguas arriba de la nariz de las pilas del puente, mientras que la sección A se localiza inmediatamente aguas abajo de la nariz de las pilas. Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento entre las secciones 1 y A,

$$\beta_1 Q\rho\overline{u}_1 + \gamma A_1\overline{y}_1 - \beta_A Q\rho\overline{u}_A - \gamma A_A\overline{y}_A = F \qquad (9.2.19)$$

donde A = Gasto
ρ = densidad del fluido
$\overline{u}_1$ y $\overline{u}_A$ = velocidades medias en las secciones 1 y A, respectivamente

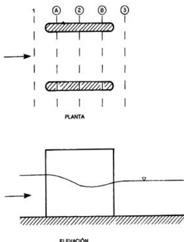


FIGURA 9.20 Planta y perfil del flujo a través de pilas de puentes. (*Eichert y Peters, 1970b.*)

β_1 y β_A = coeficientes de corrección de cantidad de movimiento (coeficientes de Boussinesq) en las secciones 1 y A, respectivamente
A_1 y A_A = áreas hidráulicas de las secciones 1 y A, respectivamente
$\bar{y}_1$ y $\bar{y}_A$ = distancias verticales entre la superficie del agua y los centroides de las secciones 1 y A, respectivamente
γ = peso específico del fluido
F = empuje ejercido por las pilas sobre el flujo

La ecuación (9.2.19) es válida para canales con forma arbitraria y es idéntica a la de cantidad de movimiento general desarrollada en el capítulo 3 [Ec. (3.1.2.)]. La ecuación (9.2.19) supone tácitamente que las pérdidas por fricción en las fronteras son despreciables, en los que concierne a la fuerza ejercida por las pilas sobre el flujo. Si $\beta_1 = \beta_A = 1$, la ecuación (9.2.19) puede reordenarse para dar

$$\frac{Q^2}{gA_1} + A_1\bar{y}_1 - \frac{Q^2}{gA_A} - A_A\bar{y}_A = \frac{F}{\gamma} \tag{9.2.20}$$

Si se supone (véase por ejemplo, Eichert y Peters, 1970b) que las fuerzas estática y dinámica ejercida por las pilas son

$$F_s = \gamma A_{P1}\bar{y}_{P1} \tag{9.2.21}$$

y

$$F_D = \gamma \frac{C_D}{2}\left(\frac{A_{P1}}{A_1}\right)\left(\frac{Q^2}{gA_1}\right) \tag{9.2.22}$$

donde F_s = fuerza estática
F_D = fuerza dinámica
A_{P1} = área proyectada de las pilas o pilas con detritos, normal a la dirección del flujo correspondiente a la profundidad y_1
$\bar{y}_{P1}$ = distancia vertical desde la superficie libre del agua al centroide de A_{P1}

La ecuación (9.2.20) puede reordenarse para dar

$$M_A = \frac{Q^2}{gA_A} + A_A\bar{y}_A = A_1\bar{y}_1 - A_{P1}\bar{y}_{P1} + \frac{Q^2}{gA_1^2}\left(A_1 - \frac{C_D}{2}A_{P1}\right) \tag{9.2.23}$$

donde por definición M_A = función momentum en la sección A. Eichert y Peters (1970b) sugieren que

$$C_D = 2$$

para pilas de aristas cuadrada y

$$C_D = 1.33$$

para pilas con aristas semicirculares. En forma similar, el principio de conservación de cantidad de movimiento se puede aplicar entre las secciones B y 3 o

$$M_B = \frac{Q^2}{gA_B} + A_B\bar{y}_B = A_3\bar{y}_3 - A_{P3}\bar{y}_{P3} + \frac{Q^2}{gA_3} \tag{9.2.24}$$

donde A_{P3} = área proyectada normal a la dirección del flujo correspondiente al tirante y_3, y_{P3} = distancia vertical entre la superficie del aguå y el centroide de A_{P3}, además, sólo se presenta una componente de fuerza estática.

Si se supone que la fuerza ejercida por las pilas de puentes es insignificante entre las secciones A y B, entonces la función momentum debe mantenerse constante en estas dos secciones y en todas las secciones intermedias o

$$M_A = M_2 = M_B \tag{9.2.25}$$

Las ecuaciones (9.2.23) pueden combinarse para dar

$$A_1\bar{y}_1 - A_{P1}\bar{y}_{P1} + \frac{Q^2}{gA_1^2}\left(A_1 - \frac{C_D}{2}A_{P1}\right) = \frac{Q^2}{gA_2^2} + A_2\bar{y}_2$$

$$= A_3\bar{y}_3 - A_{P3}\bar{y}_{P3} + \frac{Q^2}{gA_3} \tag{9.2.26}$$

La ecuación (9.2.26) contiene tres expresiones para la función momentum dentro de la abertura del puente que se dibujan esquemáticamente en la figura 9.21. Estas tres expresiones para la función momentum relacionan los tirantes aguas arriba, aguas abajo y dentro de la abertura del puente. Asimismo, estas expresiones sólo están en función de: el gasto, la geometría del canal y la geometría de las pilas de puentes.

Dentro de la abertura del puente se tienen seis posibles condiciones de flujo bajo (Fig. 9.22). Si el flujo fuese subcrítico por no tener pilas, entonces nada más se pueden presentar las condiciones mostradas en la figura 9.22*a* a *c*. Para un flujo subcrítico, el perfil gradualmente variado se calcula a partir de una sección aguas abajo de control hacia aguas arriba, hasta la sección 3. El tirante calculado en la sección 3 sólo se puede presentar si la función momentum en la abertura del puente —que se calcula con base en el tirante aguas abajo— excede a la función momentum crítica en la contracción, la cual se designa como $M_{crit.}$. La figura 9.21*b* se emplea para determinar la función momentum que se presentaría en la abertura del puente para un tirante dado en la sección 3. Una comparación de la función momentum en la contracción, que se basa en el tirante dado en la sección 3 (M^T, con $M_{crit.}$), determina el tipo de flujo, o:

1. Si $M^T < M_{crit.}$, se produce un salto hidráulico (Fig. 9.22*c*).

2. Si $M^T = M_{crit.}$, entonces se tiene un flujo como el de la figura 9.22*b*.

3. Si $M^T > M_{crit.}$, entonces se tiene un flujo como el de la figura 9.22*a*.

Para los tipos de flujo mostrados en la figura 9.22*b* y *c*, la función momentum de la contracción es la crítica y los tirantes desconocidos aguas arriba y abajo se pueden determinar con la figura 9.21*a* y *e*. Para el tipo de flujo mostrado en la figura 9.22*a*, la función momentum puede determinarse a partir de la figura 9.21*c* basándose en el tirante dado de la sección 3. De donde, los tirantes desconocidos aguas arriba y dentro de la abertura pueden determinarse con la función momentum de la figura 9.21*a* y *b*, respectivamente.

Para el caso en que el flujo en el tramo fuese supercrítico, puede emplearse un razonamiento análogo al descrito arriba para determinar las condiciones de flujo dentro de la abertura del puente. En este caso, el punto inicial para el cálculo es la sección 1. De aquí, una comparación de las funciones momentum en la contracción que se base en el tirante dado de la sección 1, (M^T, con M_{crit}), determina el tipo de flujo o .

1. Si $M^T > M_{crit.}$, entonces se tiene un flujo como el de la figura 9.22*d*.

2. Si $M^T = M_{crit.}$, entonces se tiene un flujo como el de la figura 9.22*e*.

3. Si $M^T > M_{crit.}$, entonces se tiene un flujo como el de la figura 9.22*f*.

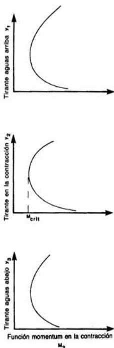


FIGURA 9.21 Relación de la función momentum en contracciones a tirantes *a*) aguas arriba de, *b*) dentro y *c*) aguas abajo de la contracción. (*Eichert y Peters, 1970b.*)

En este momento, debe notarse que para el caso del flujo mostrado en la figura 9.22*a*, Eichert y Peters (1970b) recomiendan el uso de la ecuación semiempírica de Yarnell; i.e., la ecuación (9.2.2). La forma de la ecuación empleada por Eichert y Peters (1970b) es

$$\Delta y = 2k\left(k + \frac{10\overline{u}_3^2}{2gy_3} - 0.6\right)\left[\frac{A_{P3}}{A_3} + 15\left(\frac{A_{P3}}{A_3}\right)^4\right]\frac{\overline{u}_3^2}{2g} \qquad (9.2.27)$$

donde $\Delta y = y_1 - y_3$ = diferencia entre las elevaciones aguas arriba y abajo y k = un coeficiente (tabla 9.1).

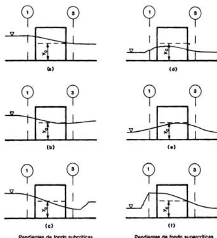


FIGURA 9.22 Seis casos de flujo bajo en contracciones. *(Eichert y Peters, 1970b.)*

9.3 CONTROL DE SALTOS HIDRÁULICOS

Cuando se presenta un salto hidráulico en una superficie lisa y horizontal, existe poca variación en los tirantes aguas arriba y aguas abajo del salto. En este caso puede haber una tendencia para que el salto se mueva aguas arriba o abajo, a no ser que se le mantenga en su lugar por algún tipo de estructura; e.g., un vertedor de cresta ancha o delgada, un escalón o vado, o un tanque amortiguador diseñado. En lo que sigue, se tratarán varias estructuras que pueden emplearse para controlar la ubicación del salto. Debe notarse que aunque en muchos casos el control del salto hidráulico se puede calcular analíticamente, es necesario recurrir a los experimentos si se requiere que los resultados cuantitativos sean razonablemente precisos. En el caso del control del salto por un umbral (i.e., un vertedor de cresta delgada o ancha, un escalón o un vado) el análisis dimensional indica que

$$\frac{\Delta z}{y_1} = \Theta\left(\mathbf{F}_1, \frac{X}{y_2}, \frac{y_3}{y_1}\right) \tag{9.3.1}$$

donde (véase la Fig. 9.23) $\mathbf{F}_1$ = número de Froude del flujo de llegada, Δz = altura del umbral, y_1 = tirante de llegada, y_2 = tirante inmediatamente aguas arriba del umbral, y_3 = tirante aguas abajo y X = distancia desde el

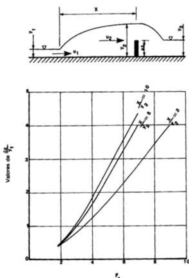


FIGURA 9.23 Relaciones empíricas entre F_1, $\Delta Z/y_1$ para un vertedor de cresta delgada.

pie del salto al umbral. El símbolo Θ indica una relación funcional que debe determinarse según el caso dado.

Vertedor de cresta delgada

Mediante análisis teóricos y experimentos, Forster y Skrinde (1950) desarrollaron una relación para el caso del vertedor de cresta delgada (Fig. 9.23) entre: el número de Froude de la sección de llegada, la razón $\Delta z/y_1$, y la razón X/y_2. La figura permite evaluar el efecto de un vertedor de cresta delgada si se conocen las condiciones del flujo aguas arriba y

$$y_3 < y_2 - 0.75\,\Delta z \tag{9.3.2}$$

La condición especificada por la ecuación (9.3.2) asegura que el tirante aguas abajo no afecta el gasto sobre el vertedor. Como consecuencia de lo anterior, la tercera razón (o sea, y_3/y_1) no se considera en la figura 9.23.

En la figura 9.23, las coordenadas (F_1, $\Delta z/y_1$) definen un punto único. Si este punto se encuentra entre las curvas experimentales, entonces se produce

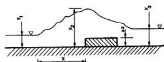


FIGURA 9.24 Control de un salto hidráulico con un vertedor de cresta ancha.

un salto hidráulico y el valor interpolado de X/y_2 indica la posición relativa del salto. Los puntos arriba de las curvas indican que el salto será forzado aguas arriba y en algunos casos será ahogado. Aunque se ahogue el salto, el vertedor servirá para desviar las corrientes de alta velocidad de fondo y proteger el canal aguas abajo. Si el punto cae abajo de la curva $X/y_2 = 5$, puede presentarse un salto acortado, incompleto o producirse un rociado (Forster y Skindre, 1950). En este último caso, sólo se puede hacer una predicción cualitativa del resultado, que depende de la distancia que existe desde el punto hasta la curva experimental. Forster y Skindre (1950) recomiendan además que la curva $X/y_2 = 5$ se emplee para el diseño bajo la condición de gasto máximo.

Vertedores de cresta ancha

Cuando un vertedor de cresta ancha se emplea para regular la ubicación de un salto hidráulico (Fig. 9.24), se tiene una solución analítica. Si el tirante aguas abajo del vertedor es menor que el crítico aguas arriba del vertedor o

$$y_3 < \frac{2y_2 + \Delta z}{3} \tag{9.3.3}$$

entonces las condiciones aguas abajo no afectan al flujo sobre el vertedor. Al desarrollar las relaciones analíticas para esta situación, Forster y Skrinde (1950) emplearon una relación desarrollada por Doeringsfeld y Barker (1941) para el gasto sobre un vertedor de cresta ancha rectangular, o

$$q = 0.433\sqrt{2g}\left(\frac{y_1}{y_1 + \Delta z}\right)^{1/2} H^{3/2} \tag{9.3.4}$$

donde q = gasto por unidad de ancho y H = carga sobre el vertedor o

$$H = y_2 - \Delta z \tag{9.3.5}$$

Una comparación de la ecuación (9.3.4) con la ecuación (9.3.3) —que se puede aplicar a la misma situación— expone algunas diferencias; pero en este análisis éstas no presentan ningún problema. Al usar la ecuación (9.3.5), la ecuación (9.3.4) puede reordenarse para dar $q = \bar{u}_1 y_1$ y $\mathbf{F}_1 = \bar{u}_1/\sqrt{gy_1}$

$$2.667\,\mathbf{F}_1^2\left[1 + \frac{(\Delta z/y_1)}{(y_2/y_1)}\right] = \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{\Delta z}{y_1}\right)^3 \tag{9.3.6}$$

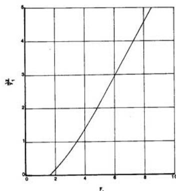


FIGURA 9.25 Relación analítica entre F_1 $\Delta Z/y_1$ para el control de un saldo hidráulico por un vertedor de cresta ancha.

Entonces al combinar la ecuación (9.3.4), que describe la relación de fricción que existe entre y_2/y_1 y F_1 para un salto hidráulico, con la ecuación (9.3.6) da

$$\frac{21.34\,F_1^2}{\sqrt{1+8F_1^2}-1} = \frac{[\sqrt{1+8F_1^2}-1-2\,(\Delta z/y_1)]^3}{\sqrt{1+8F_1^2}-1+2\,(\Delta z/y_1)} \qquad (9.3.7)$$

La ecuación (9.3.7) describe una relación funcional entre la razón $\Delta z/y_1$ y el número de Froude aguas arriba F_1. La ecuación (9.3.7) se grafica en la figura 9.25. Forster y Skrinde (1950) encontraron que la ecuación (9.3.7) describe sus resultados experimentales para $y_3 = y_c$ y $X = 5(\Delta z + y_3)$, donde y_c = tirante crítico. Dado que no se dispone de resultados experimentales adicionales, la ecuación (9.3.7) puede emplearse como guía en el diseño de tanques amortiguadores para el control del salto hidráulico por un vertedor de cresta ancha. En comparación con otros tipos de control de saltos (e.g., el vertedor de cresta delgada o el escalón) el vertedor de cresta ancha tiene las ventajas de la estabilidad estructural y de costos bajos de construcción.

Escalón Si la sección de llegada del canal aumenta bruscamente en el nivel de elevación de su plantilla a fondo, se produce un escalón que puede emplearse para el control de la ubicación del salto hidráulico (Fig. 9.26). Forster y Skrinde (1950) demostraron que este problema puede resolverse analíticamente si: 1) si se plantea la ecuación de cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2 para estimar la fuerza sobre la cara del escalón, 2) si se formula la ecuación de cantidad de movimiento entre las secciones 2 y 3, y si se usan los resultados del paso 1 y por último, 3) si se plantea la ecuación de continuidad

entre las secciones necesarias para eliminar y_2, $\bar{u}_2$, y $\bar{u}_3$ de las ecuaciones desarrolladas en el paso 2. El resultado es

$$\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 = 1 + 2\mathbf{F}_1^2\left(1 - \frac{y_1}{y_3}\right) + \frac{\Delta z}{y_1}\left(\frac{\Delta z}{y_1} - \sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1^2} + 1\right) \qquad (9.3.8)$$

La ecuación (9.3.8) se grafica en la figura 9.27. En esta figura las dos líneas que pasan por el origen dividen a la gráfica en tres regiones principales. La línea $\Delta z/y_1 = 0$ queda definida por la ecuación del salto hidráulico en un canal rectangular horizontal y por tanto representa la igualdad entre el tirante aguas abajo y_3 y el conjugado menor de un flujo supercrítico. La región sobre esta curva representa los casos en que $\Delta z < 0$, o sea cuando se necesita de una caída del fondo del canal, en vez de un escalón para mantener el salto hidráulico. Todas las curvas $\Delta z/y_1$ = constante que pasan por un valor mínimo del número de Froude de aguas arriba. La línea de valores mínimos de $\mathbf{F}_1$ se encuentra al derivar $\mathbf{F}_1$ en la ecuación (9.3.8) con respecto a y_3/y_1 y al igualar el resultado a cero. El resultado es

$$\frac{y_3}{y_1} = \mathbf{F}_1^{2/3} \qquad (9.3.9)$$

Puede demostrarse fácilmente que la ecuación (9.3.9) corresponde a la condición en la que el tirante aguas abajo es crítico. En la figura 9.27, la región debajo de la curva, dada por la ecuación (9.3.9), es el área donde $y_3 < y_c$. Por tanto, en esta región no se forma un salto hidráulico, así que el flujo supercrítico se dispara sobre el escalón. La región, que está entre las dos líneas definidas por $\Delta z/y_1 = 0$ y la ecuación (9.3.9), proporciona la solución de la ecuación (9.3.8); en esta región se forma un salto hidráulico que se desarrolla completamente justo antes del escalón.

La figura 9.28 es una gráfica de los resultados experimentales de Forster y Skindre (1950) para un escalón con $X = 5\,(\Delta z + y_3)$. En esta figura, se observa una gran desviación entre los resultados experimentales y los resultados teóricos resumidos en la figura 9.27. La figura 9.28 puede emplearse para diseñar cuando se conocen $\bar{u}_1$, y_1 y y_3.

Vado (caída brusca) Como se hizo notar en la sección anterior, si el tirante de aguas abajo es mayor que el conjugado mayor del salto, entonces se necesi-

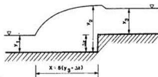


FIGURA 9.26 Control de un salto hidráulico con un escalón (elevación brusca).

FIGURA 9.27 Relación analítica entre F_1, $y_3/_1$, y $\Delta Z/y_1$ para un escalón (elevación brusca).

FIGURA 9.28 El salto hidráulico en un escalón (elevación brusca), datos de laboratorios. *(Forster y Skrinde, 1950.)*

ta un vado en el piso del canal para asegurar la formación del salto. Para un valor dado de $\mathbf{F}_1$, el tirante puede caer en cualquiera de las cinco secciones mostradas en la figura 9.29. El límite inferior de la región 1 es el tirante en el que el salto se empezaría a desplazar aguas arriba. El límite superior de la sección 5 es el tirante en el cual el salto se empezaría a mover hacia aguas abajo. Si el tirante aguas abajo del vado cae en cualquiera de estas dos regiones, el vado no será efectivo en el control del salto. El vado será efectivo sólo si el tirante cae en las regiones 2 o 4. La región 3 es una región intermedia en la que se presenta un salto ondular.

Hsu (1950) desarrolló las siguientes ecuaciones mediante las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento:

Para la región 2

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{y_3/y_1}{2\,[(y_3/y_1) - 1]}\left[-1 + \left(\frac{y_3}{y_1} - \frac{\Delta z}{y_1}\right)^2\right] \tag{9.3.10}$$

Para la región 4

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{y_3/y_1}{2\,[(y_3/y_1) - 1]}\left[-\left(\frac{\Delta z}{y_1} + 1\right)^2 + \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2\right] \tag{9.3.11}$$

Las ecuaciones (9.3.10) y (9.3.11) se grafican en la figura 9.30. En esta figura cada curva, para un valor dado de $\Delta z/y_1$, tiene dos brazos relativamente rectos, que están conectados por un tramo corto recto cerca de la mitad de la curva. El brazo izquierdo de estas curvas corresponde a la región 2 y el derecho a la 4. La validez de esta figura se ha establecido con datos experimentales (Hsu 1950), además puede emplearse para determinar la altura relativa del vado que es necesaria para estabilizar el salto.

Tanques amortiguadores

Por definición, un *tanque amortiguador* es un tramo corto de canal ubicado al final de un vertedor, o cualquier otra estructura que produzca flujo super-

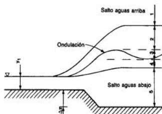


FIGURA 9.29 Formas del salto hidráulico en un vado (caída brusca). *(Hsu, 1950.)*

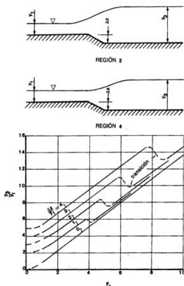


FIGURA 9.30 Relación entre $\mathbf{F}_1$ y y_3/y_1 para un salto hidráulico controlado por un vado (caída brusca).

crítico. A causa del uso generalizado de tanques amortiguadores, se han desarrollado varios diseños generalizados basados en estudios de modelos, así como en la experiencia y la observación de tanques amortiguadores existentes. En el material que sigue, se considerarán tres diseños generalizados de amortiguadores:

1. *Tanque Saint Anthony Falls (SAF):* se emplea con vertedores pequeños, obras de descarga y estructuras en canales donde

$$1.7 \leq \mathbf{F}_1 \leq 17$$

   Si se emplean los obstáculos diseñados para el tanque, se obtiene una reducción de longitud del tanque que representa entre el 70 a 90%.

2. *U.S. Bureau of reclamation (USBR) tanque II:* Se emplea comúnmente con estructuras de gran magnitud donde $\mathbf{F}_1 > 4.5$. Por lo general, la longitud del tanque puede reducirse en un 33% si se emplean los obstáculos apropiados para el tanque.

3. *USBR tanque IV:* Se usa con estructuras del canal y de desvío donde

$$2.5 \leq \mathbf{F}_1 \leq 4.5$$

Es efectivo en la reducción del oleaje asociado con saltos débiles.

Los obstáculos comúnmente asociados con los tanques amortiguadores se describen enseguida.

Bloques de entrada a caída Se emplean en la sección final del canal de descarga y próximas o en la entrada del tanque para canalizar el flujo y levantar parte de éste del fondo. El propósito de estos bloques es acortar la longitud del salto y estabilizarlo.

Umbral (Escalón), dentado o sólido El umbral dentado o sólido es un obstáculo que se ubica al final del tanque. Se utiliza para reducir, aún más, la longitud del salto y controlar la socavación. En tanques amortiguadores grandes; a menudo el umbral está dentado para facilitar la difusión del chorro de alta velocidad que puede llegar al final del tanque. *Nota:* El umbral dentado también se le conoce como *escalón de Rehbock* en honor a su creador, Theodor Rehbock.

Pilas Disipadoras (Dentellones Amortiguadores) Se ubican en secciones intermedias del tanque y su función principal es la de disipación de energía por impacto. Cuando las velocidades de llegada son pequeñas, las pilas disipadoras son muy efectivas; aunque cuando las velocidades son altas, este tipo de obstáculo quizá no sea el indicado, ya que existe la posibilidad de cavitación. En algunos casos, las pilas disipadoras deben diseñarse para aguantar el impacto de basuras y hielo. Como lo notó Chow (1959), los diseños generalizados que se presentan a continuación deben emplearse con mucha cautela, ya que son diseños genéricos que tal vez sean (o quizá no sean) los apropiados para un caso particular.

El tanque SAF (Fig. 9.31) se desarrolló para pequeñas estructuras de drenaje. Blaisdell (1948 y 1949) resumió las siguientes reglas de diseño:

1. La lontigut L_B del tanque amortiguador está dada por

$$L_B = \frac{4.5 y_2}{\mathbf{F}_1^{0.76}} \tag{9.3.12}$$

para

$$1.7 \leq \mathbf{F}_1 \leq 17 \tag{9.3.13}$$

2. La altura de los bloques de entrada y de piso (dentellones) es y_1, y la separación y el ancho de los bloques es $0.75 y_1$.

3. La distancia entre el inicio del tanque y la cara aguas abajo de los dentellones es $L_B/3$.

4. No deben ubicarse dentellones a una distancia menor de 3/8 y_1 respecto a la pared.

5. Los dentellones deben quedar alineados con las aberturas entre los bloques de entrada (Fig. 9.31).

6. Los dentellones ocupan, en general, del 40 al 55% del ancho del tanque amortiguador.

7. Para tanques amortiguadores divergentes, el ancho y las separaciones de los dentellones debe aumentarse en proporción al incremento del ancho del tanque amortiguador en la sección de los dentellones.

8. La altura del umbral, al final del tanque amortiguador, está dada por

$$C = 0.07y_2 \tag{9.3.14}$$

donde y_2 = conjugado mayor teórico correspondiente a y.

9. El tirante aguas abajo del tanque amortiguador está dado por

$$\begin{aligned} y_2' &= \left(1.10 - \frac{\mathbf{F}^2}{120}\right) y_2 \quad \text{para } 1.7 \leq \mathbf{F}_1 \leq 5.5 \\ &= 0.85y_2 \quad \text{para } 5.5 < \mathbf{F}_1 \leq 11 \\ &= \left(1.00 - \frac{\mathbf{F}_1^2}{800}\right) y_2 \quad \text{para } 11 < \mathbf{F}_1 \leq 17 \end{aligned} \tag{9.3.15}$$

donde y_2' = tirante aguas abajo.

10. La altura de la pared lateral sobre el tirante máximo aguas abajo está dado por

$$z = \frac{y_2}{3} \tag{9.3.16}$$

donde z = altura de la pared lateral sobre el tirante máximo de aguas abajo.

11. Los aleros (Fig. 9.31) deben tener una altura igual a las paredes laterales, y la parte superior de éstas debe tener un talud de 1 a 1.

12. Los aleros tiene que ponerse a un ángulo de 45° de la línea central de la salida.

13. Las paredes laterales del tanque amortiguador pueden ser paralelas, —como en el caso de un tanque amortiguador rectangular— o pueden ser divergentes, como en el caso de un tanque amortiguador trapecial.

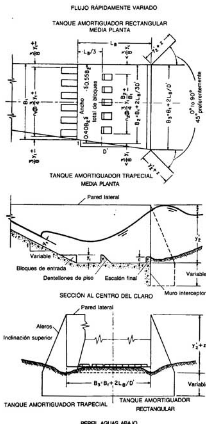


FIGURA 9.31 Dimensiones del tanque SAF.

14. Debe construirse un muro interceptor de profundidad nominal al final del tanque amortiguador.

15. El efecto de la inclusión de aire se desprecia en el proceso de diseño.

A partir de estudios intensivos de estructuras existentes y de investigaciones en laboratorios, el U.S. Bureau of Reclamation ha desarrollado un conjunto de diseños generalizados de tanques amortiguadores para muchas condiciones de flujo. Bradley y Peterka (1957) resumieron este trabajo en una serie de publicaciones. Aquí sólo se considerarán los tanques II y IV. El tanque USBR I se emplea para el control de saltos sobre un fondo plano sin obstáculos estructurales. El tanque USBR III es similar al tanque SAF, pero aquél tiene un factor de seguridad mayor. El tanque USBR V se emplea junto con pisos con pendiente.

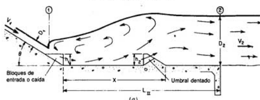
El tanque USBR II se diseñó para usarse junto con vertedores de presas de tierra, con presas altas de concreto con estructuras grandes de canales. Aunque se emplean bloques de entrada en el extremo de aguas arriba y un escalón dentado en el extremo de abajo, los dentellones intermedios no se usan por causa de la posibilidad de cavitación. Con referencia a la figura 9.32, las reglas de diseño recomendadas son:

1. La elevación del derramadero debe ser tal que, el tirante completo de aguas abajo —más un factor de seguridad— quede debajo de ésta. En la figura 9.32*b* las líneas punteadas son guías que basan en varias razones existentes entre tirantes reales aguas abajo y tirantes conjugados mayores. Aunque los estudios del U.S. Bureau of Reclamation indican que la mayor parte de los tanques amortiguadores se diseñaron para un valor igual o menor al tirante conjugado de aguas abajo, hay un límite inferior que se denomina *tirante de aguas abajo mínimo* en la figura 9.32*b*. Esta curva define el punto para el que el inicio del salto se separa de los bloques de entrada. Una baja adicional del tirante de aguas abajo ocasionaría que el salto se saliese completamente del tanque. Por ende, para propósitos de diseño, el tanque USBR II no debe diseñarse para un tirante menor al conjugado mayor, además debe agregásele un factor de seguridad mínimo igual al 5%.

2. Aunque el tanque USBR II es teóricamente efectivo hasta un valor mínimo igual a 4 del número de Froude, su utilidad para valores menores del número de Froude no está asegurada. Para valores pequeños del número de Froude, deben considerarse los tanques amortiguadores que incorporen atenuación de oleaje.

3. La figura 9.32*e* puede emplearse para estimar la longitud del tanque amortiguador requerido.

4. La altura de los bloques de entrada debe ser igual al tirante en la sección de llegada; el ancho y la separación lateral de estos bloques también debe ser igual al tirante de llegada, a fin de excluir la necesidad de bloques fraccionales. En las paredes laterales se recomienda una separación de $0.5y$ para reducir el rocío y mantener presiones deseables.



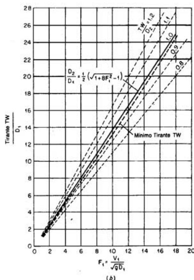


FIGURA 9.32 Curvas de diseño y dimensiones del tanque USBR II.

5. La altura del escalón dentado al final del tanque debe ser igual a $0.2y_2$. El ancho y la separación de los dentellones es $0.15y_2$. También se recomienda que quede pegado un bloque a cada pared lateral. La pendiente de la parte continua del escalón tiene que ser de 2:1. En tanques delgados, quizá sea aconsejable reducir la separación y el ancho de los dentellones para aumentar el número de éstos. En estos casos el ancho y la separación mínimos de los detellones están determinados por consideraciones estructurales.

(c)

(d)

(e)

FIGURA 9.32 *Continuación.*

6. No es necesario poner en forma alternada (a tresbolillo) los bloques de entrada con los dentellones del escalón.

7. Aparentemente la efectividad del tanque amortiguador no es una función de la pendiente del canal de llegada. Chow (1959) notó que esto se cumple si la distribución de velocidades y los tirantes del canal de llegada son uniformes. Si el canal de llegada es largo y plano, el flujo puede concentrarse en un área de la sección y producirse un salto asimétrico asociado con este problema. Cuando la pendiente del canal de llegada es mayor o igual a 1:1, se recomienda que la intersección aguda entre el canal y el tanque se reemplece por una curva de radio R, tal que

$$R \geq 4y_1$$

Las reglas de diseño anteriores sirven para un tanque amortiguador seguro, conservador para rápidas caídas de hasta 200 ft (61 m) y gastos de hasta 500 (ft^3/s)/ft de ancho de tanque amortiguador [46 (m^3/s)/m], *sólo si* el gasto entra al tanque amortiguador con una distribución uniforme de velocidad y tirante. En los casos de caídas mayores, de mayores gastos, o de distribución no uniforme de velocidades y tirantes, se debe hacer un estudio con un modelo.

El tanque USBR IV está diseñado para controlar el salto oscilatorio que se forma en un tanque amortiguador cuando su número de Froude, en la sección de llegada, está entre 2.5 y 4.5 inclusive. Este tanque está diseñado para eliminar este problema en su raíz, ya que intensifica el torbellino que se presenta en la parte superior del salto con chorros direccionales desviados desde bloques de entradas de gran magnitud (Fig. 9.33). Desde el punto de vista de funcionamiento hidráulico, se necesitan por lo menos tres bloques de entrada. Se obtiene un mejor funcionamiento hidráulico si los bloques son más delgados

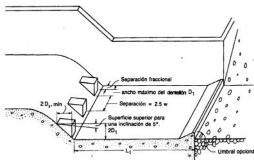


FIGURA 9.33 Dimensiones del tanque USBR IV.

que los mostrados en la figura 9.33 y el tirante aguas abajo es de 5 a 10% mayor que el conjugado mayor. El ancho óptimo del bloque de entrada es $0.75y'$. La longitud del tanque amortiguador se supone que es igual a la del salto hidráulico en un tanque amortiguador horizontal sin obstáculos. Puede usarse la figura 3.8 para estimar esta longitud. Debe notarse que el tanque USBR IV se aplica sólo en canales de sección rectangular.

9.4 DISIPADORES DE CAÍDA

El disipador de caída a menudo se emplea en estructuras pequeñas de drenaje para disipar energía. Una lámina vertedora de caída libre aereada en un vertedor de caída vertical invierte su curvatura, lo que a su vez produce un salto hidráulico (Fig. 9.34). Si se supone que el tirante en la caída libre es crítico, entonces Rand (1955) ha demostrado que al analizar los resultados experimentales

$$\frac{y_1}{\Delta z} = 0.54 \left(\frac{y_c}{\Delta z}\right)^{1.275} \tag{9.4.1}$$

$$\frac{y_1}{y_c} = 0.54 \left(\frac{y_c}{\Delta z}\right)^{0.275} \tag{9.4.2}$$

$$\frac{y_2}{\Delta z} = 1.66 \left(\frac{y_c}{\Delta z}\right)^{0.81} \tag{9.4.3}$$

$$\frac{L_d}{\Delta z} = 4.30 \left(\frac{y_c}{\Delta z}\right)^{0.09} \tag{9.4.4}$$

$$L_j = 6.9\,(y_2 - y_1) \tag{9.4.5}$$

donde y_c = tirante crítico, el resto de las variables se definen en la figura 9.34. El escalón de $y_2/6$ al final de la estructura sirve para ubicar el salto en la vecindad inmediata de la caída. Rand (1955) notó que las ecuaciones dadas arriba se apegaban a los datos experimentales con un error de 5% o menor.

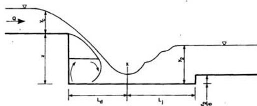


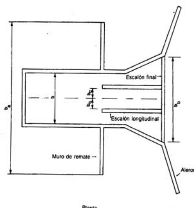
FIGURA 9.34 Esquema de la estructura de caída.

En la práctica, se emplean muchas variantes del diseño de caída descrito arriba. En la figura 9.35 se muestra un diseño de una estructura en forma de caja imbuida presentado por Blaisdell y Donnelly (1956). Esta estructura tiene la ventaja de que disipa más energía al hacer chocar tres chorros abajo de la estructura. Las reglas de diseño presentadas por Blaisdell y Donnelly (1956) para esta estructura son:

1. El tirante real en la sección recta de la estructura es

$$y_c = \left[\frac{(Q/b)^2}{g}\right]^{1/3} \tag{9.4.6}$$

donde b = ancho de la sección recta (Fig. 9.35) y Q = gasto total.



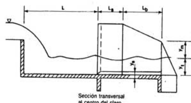


FIGURA 9.35 Definición de las variables para el diseño de cubetas *(Blaisdell y Donnelly, 1956.)*

2. El tirante crítico al final del tanque amortiguador es

$$y_c' = \left[\frac{(Q/b_b)^2}{g}\right]^{1/3} \tag{9.4.7}$$

donde b_b = ancho de la sección final del tanque amortiguador.

3. Para valores de $L/b \geq 0.25$, la longitud mínima de la sección recta está dada por

$$L_s = y_c\left(\frac{0.2}{L/b} + 1\right) \tag{9.4.8}$$

donde todas las variables se definen en la figura 9.35.

4. El acampanado de las paredes laterales puede variar desde 1 hasta ∞, o sea, extensiones paralelas de las paredes en la sección recta, desde 1 hasta 2.

5. Para valores de $L/b \geq 0.25$, la longitud mínima del tanque amortiguador está dada por

$$L_b = \frac{L_c}{2L/b} \tag{9.4.9}$$

donde L_c = longitud de cresta, definida como

$$L_c = 2L + b \tag{9.4.10}$$

(Blaisdell y Donnelly, 1956).

6. Donde

$$b_b < 11.5y_c'$$

por lo que el tirante mínimo de aguas abajo sobre el piso del tanque está dado por

$$y_t = 1.6y_c' \tag{9.4.11}$$

donde y_t = tirante aguas abajo. Cuando

$$b_b \geq 11.5y_c'$$

el tirante mínimo aguas abajo sobre el piso del canal está dado por

$$y_t = y_c' + 0.052b_b \tag{9.4.12}$$

Si se emplean tirantes aguas abajo menores que los predichos por las ecuaciones (9.4.11) y (9.4.12), es de esperarse que exista un aumento en la socavación aguas abajo de la estructura.

7. La altura del escalón al final del canal está dada por

$$y_s = \frac{y_t}{6} \tag{9.4.13}$$

donde y_s = altura del escalón final.

8. Los escalones longitudinales mostrados en la figura 9.35 mejoran la distribución del gasto a la salida. Blaisdell y Donnelly (1956) recomendaron que estos escalones se ubiquen de la siguiente forma:

   a. Si las paredes laterales son paralelas, entonces no se necesitan escalones longitudinales.

   b. El par de escalones longitudinales debe extenderse desde la salida de la caja a través de la sección recta y del tanque amortiguador hasta el escalón final.

   c. Cuando

   $$b_b < 2.5b$$

   sólo se necesitan dos escalones; éstos deben ubicarse a una distancia b_c a cada lado de la línea central donde

   $$\frac{b}{6} \leq b_c \leq \frac{b}{4}$$

   d. Cuando

   $$b_b > 2.5b$$

   se necesitan dos escalones adicionales paralelos a la línea central de la salida, y a la mitad entre los escalones centrales y las paredes laterales a la salida del tanque amortiguador.

   e. La altura de los escalones longitudinales debe ser igual a la del escalón final. [Ec. (9.4.13)].

9. La altura mínima de las paredes laterales sobre la superficie del agua en la salida, está dada por

$$y_m = \frac{y_t}{3} \tag{9.4.14}$$

Bajo ninguna circunstancia la altura de las paredes laterales será menor que el tirante aguas abajo.

10. Los aleros deben ser triangulares en planta y tener taludes superiores (entre 30° y 45°). Además, en planta, los taludes deben tener un ángulo acampanado entre 45 y 60°. No se recomiendan los aleros paralelos a la línea central de la salida (Blaisdell y Donnelly, 1956). Debe notarse que las ecuaciones (9.4.8) y (9.4.14) son empíricas y que sólo son válidos para el sistema inglés de unidades.

9.5 ESTRUCTURA DE TRANSICIÓN

El término *estructura de transición* implica el diseño de un obstáculo en el canal cuyo propósito es cambiar la forma de la sección transversal de éste. La función de esta estructura es:

1. Evitar pérdidas excesivas de energía.

2. Eliminar ondas cruzadas, ondas estacionarias y otras turbulencias.

3. Proporcionar seguridad para la estructura de transición y el canal.

La forma geométrica de una estructura de transición puede variar desde un diseño de línea recta hasta un diseño complejo, aerodinámico, que presenta superficies alabeadas. Los tipos comunes de transiciones son las transiciones de entrada y salida entre canales y los sifones invertidos. A continuación se considerará el diseño de transiciones para el flujo subcrítico.

Transición entre un canal y un medidor* o túnel

Al diseñar una transición entre un canal y un medidor o túnel, Chow (1959) señaló las siguientes características importantes:

1. *Proporcionamiento:* el ángulo óptimo máximo entre el eje del canal y una línea que conecta los lados del canal entre las secciones de entrada y salida mide 12.5°. Los Ángulos agudos —ya sea en la superficie del agua o en la estructura misma que produzca ondas estacionarias o turbulencia— deben evitarse.

2. *Pérdidas:* la pérdida total de energía que se produce en una transición se compone de dos partes: pérdida por fricción y por transición. La pérdida por fricción, que puede estimarse con la ecuación de Manning, es comúnmente pequeña; tiene un efecto muy pequeño sobre el perfil del flujo, y a menudo se ignora en el diseño preliminar.

   En el caso de transiciones de entrada, la velocidad de entrada es menor que la de salida. En este caso, la superficie del agua debe disminuir, por lo menos, la diferencia entre las dos cargas de velocidad y una distancia pequeña conocida como la *pérdida de conversión.* La pérdida de conversión para una entrada puede estimarse por

$$\Delta y' = \Delta h_u + C_i \Delta h_u = (1 + C_i)\, \Delta h_u \qquad (9.5.1)$$

donde $\Delta y'$ = caída en la elevación de la superficie del agua ocasionada por la pérdida de entrada
Δh_u = diferencia de carga de velocidad en la transición
C_i = coeficiente de pérdida de entrada

* Nota del traductor: se emplea el término medidor como traducción de "flume", pero como en el capítulo anterior "flume" se refería a medidor de flujo crítico, otro término podría ser canalón.

TABLA 9.4 Valores medios seguros de diseño de C_i y C_o (Chow, 1959)

Tipo de transición	C_i	C_o
Alabeado	0.10	0.20
Cilindro-cuadrante	0.15	0.25
Línea recta simplificada	0.20	0.30
Línea recta	0.30	0.50
Extremos cuadrados	0.30+	0.75

En el caso de transiciones de salida, la velocidad se reduce y la superficie del agua debe elevarse (la carga de velocidad se recupera), esta elevación está acompañada por una pérdida de conversión conocida como pérdida de salida o

$$\Delta y' = \Delta h_u - C_0\, \Delta h_u = (1 - C_0)\, \Delta h_u \qquad (9.5.2)$$

donde C_0 = coeficiente de pérdida de salida. Los valores de C_i y C_0 se presentan en la tabla 9.4 para varios tipos de transiciones.

3. *Bordo libre:* para tirantes en la transición menores a los 12 ft (4.7 m) el bordo libre debe diseñarse con los métodos descritos en el capítulo 7. Cuando el tirante exceda los 12 ft (3.7 m), se debe prestar especial atención al diseño del bordo libre dentro de la transición.

Para un conjunto dado de condiciones de entrada, el tirante y la velocidad dentro de la transición están gobernados por las tres condiciones de frontera o

$$b = f_1(x) \qquad (9.5.3)$$

$$\Delta z = f_2(x) \qquad (9.5.4)$$

$$m = f_3(x) \qquad (9.5.5)$$

donde b = ancho de fondo de la transición
Δz = cambio en la elevación del fondo del canal dentro de la transición
m = inverso del talud del canal
x = distancia longitudinal medida desde el principio de la transición (Fig. 9.36)

La relación entre el tirante en la transición y el gasto está dada por la ecuación de continuidad o

$$Q = (b + my)\, y\bar{u} \qquad (9.5.6)$$

donde y = tirante y u = velocidad media del flujo. Se puede deducir una relación entre el tirante, la velocidad y la pérdida de energía si la ecuación de Bernoulli se aplica entre las secciones i e $i + 1$ o

$$-\Delta z_i + (\Delta z_i + y_f + \Delta y_i) + \frac{\overline{u}_i^2}{2g} = -\Delta z_{i+1} + (\Delta z_{i+1} + y_f + \Delta y_{i+1}) + \frac{\overline{u}_{i+1}^2}{2g} + h_{Li,i+1} \tag{9.5.7}$$

donde y_f = tirante en el medidor o parte rectangular de la transición (Fig. 9.36) y $h_{Li,i+1}$ = pérdida de energía entre las secciones i e $i + 1$. Nótese que en la ecuación (9.5.7) Δz se considera positiva si se mide hacia abajo del fondo del medidor y Δy se considera positiva si el nivel de la superficie del agua en la transición es mayor que el del medidor. La ecuación (9.5.7) también puede escribirse como

$$E_{i+1} = E_i + \Delta z_{i,i+1} - h_{Li,i+1} \tag{9.5.8}$$

donde E = energía específica y

$$\Delta z_{i,i+1} = \Delta z_{i+1} - \Delta z_i \tag{9.5.9}$$

La ecuación para estimar la pérdida a través de la transición es

$$h_{Li,i+1} = K_H\left(\frac{\overline{u}_i^2 - \overline{u}_{i+1}^2}{2g}\right) = K_H \Delta h_u \tag{9.5.10}$$

(Hinds, 1928).

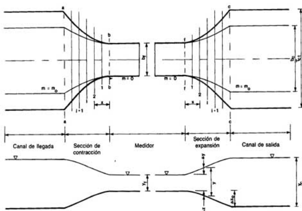


FIGURA 9.36 Esquema de definición de una transición *(Vittal y Chiranjeevi, 1983.)*

Después de definir la forma geométrica de la transición [Ecs. (9.5.3) y (9.5.5)] y de especificar las condiciones iniciales en la entrada de la transición, se tienen varias técnicas para la selección de la geometría de la transición. Un buen diseño de transiciones requiere un establecimiento de la sección que produzca la menor pérdida de energía y que sea consistente con la conveniencia de diseño y construcción.

La técnica desarrollada por Hinds (1928) supone que el perfil de la superficie del agua, i.e.,

$$\Delta y = f_4(x) \qquad (9.5.11)$$

en la transición, es una curva compuesta por dos parábolas con un punto de inflección en el centro de la transición y que unen la superficie del agua en los dos lados de la transición en forma tangencial. La ecuación de las parábolas es

$$\Delta y = C_1 x^2 \qquad (9.5.12)$$

donde C_1 = un coeficiente y x se mide a la derecha de la sección *f-f* en la figura 9.36 para la primera parábola y a la izquierda de la sección *c-c* para la segunda parábola. Hinds (1928) también supuso un aumento o decremento lineal de la elevación del fondo del canal o

$$\Delta z = C_2 x \qquad (9.5.13)$$

donde c_2 = una constante. La transición se divide ahora en N subtramos (secciones 1-1, 2-2, . . . , en la Fig. 9.36) y en un valor arbitrario de valores de m, donde

$$0 \leq m \leq m_{0)} \qquad (9.5.14)$$

donde m_0 = talud a la entrada o salida del canal. Entonces, la pérdida en la sección completa de transición, así como en las subsecciones de la transición, puede estimarse. Nótese que la ecuación (9.5.10) puede reordenarse para dar una función explícita de la elevación de la superficie del agua al sustituir la ecuación (9.5.10) en la (9.5.8) o

$$\Delta h_u = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{1 - K_H}$$

y por tanto

$$h_{Li,i+1} = \frac{K_H\,(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i)}{1 - K_H} \qquad (9.5.15)$$

La sustitución de la ecuación (9.5.15) en la (9.5.7) determina la velocidad media del flujo en la subsección; además, la sustitución de este valor en la ecuación (9.5.6) proporciona el valor del ancho de la subsección.

La técnica descrita arriba empieza con el primer subtramo y continúa hacia aguas abajo. Si el perfil del ancho de la transición no resulta suave y continuo,

TABLA 9.5 Relaciones para estimar las razones de taludes laterales en transiciones alabeadas

Relación	Límite de aplicación
$\frac{m}{m_0} = \frac{x}{L}$	$0 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^{1/2}$	$0 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = 1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$	$0 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^2$	$0 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = 0.5 - 2\left(0.5 - \frac{x}{L}\right)^2$ $= 0.5 + 2\left(\frac{x}{L} - 0.5\right)^2$	$0 \le \frac{x}{L} < 0.50$ $0.50 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{x}{2L}\right)^{1/2}$ $= 1 - \left[0.5\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]^{1/2}$	$0 \le \frac{x}{L} < 0.50$ $0.50 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = 0.5 - \left(0.25 - \frac{x}{2L}\right)^{1/2}$ $= 0.5 + \left(\frac{x}{2L} - 0.25\right)^{1/2}$	$0 \le \frac{x}{L} < 0.50$ $0.50 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = 2\left(\frac{x}{L}\right)^2$ $= 1 - 2\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$	$0 \le \frac{x}{L} < 0.50$ $0.50 \le \frac{x}{L} \le 1$
$\frac{m}{m_0} = \frac{x/L}{[(1 - x/L)(T_{ct}/b_f) + (x/L)][(1 - x/L)(b_c/b_f) + x/L]}$	$0 \le \frac{x}{L} \le 1$

entonces se repiten los cálculos con un nuevo juego de valores de m. Respecto al método de Hinds (1928), Vittal y Chiranjeevi (1983) ofrecieron los siguientes comentarios:

1. Dado que las funciones que determinan la superficie del agua y la elevación de fondo son, por definición, suaves y continuas, el ancho de transición también debe ser una función continua y suave, siempre que los valores de m se estimen a partir de una función continua y suave [Ec. (9.5.5)]. En la tabla 9.5, se resumen varias relaciones para estimar la razón m/m_0. En

esta tabla, L = longitud de la transición, b_f = ancho de fondo del medidor, b_c = ancho de fondo del canal y T_{ct} = ancho de la superficie del agua a la salida del canal.

2. Aunque se obtenga un perfil de ancho continuo y suave en el fondo, esto no es garantía de que el diseño no provoque separación de flujo, turbulencia y las altas pérdidas de carga asociadas con estos fenómenos.

3. Cuando se aplica la ecuación (9.5.15) a todos los N subtramos que componen la transición, se observa que, en el método de Hinds, las pérdidas en la transición son una función sólo de las condiciones de entrada y salida. Esto es ilógico y recalca una de las debilidades teóricas de esta técnica de diseño.

El diseño de contracciones involucra un flujo acelerante; por lo que, cualquier diseño suave y continuo es generalmente aceptable. En el caso de una expansión, se debe tener más cuidado. Vittal y Chiranjeevi (1983) examinaron varios métodos para diseñar una expansión entre un medidor y un canal, asimismo, desarrollaron lo que ellos afirman que es una metodología superior. Basándose en evidencias experimentales y teóricas, Vittal y Chiranjeevi (1983) sugieren las siguientes ecuaciones para el diseño.

Ancho de fondo de la transición

$$\frac{b - b_f}{b_c - b_f} = \frac{x}{L}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\Gamma}\right] \qquad (9.5.16)$$

donde

$$\Gamma = 0.80 - 0.26\sqrt{m_0} \qquad (9.5.17)$$

$$L = 2.35\,(b_c - b_f) + 1.65\, m_0 y_{ch} \qquad (9.5.18)$$

b = ancho de fondo de la transición y y_{ch} = tirante en el canal.

Variación en el talud

$$\frac{m}{m_0} = 1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{1/2} \qquad (9.5.19)$$

La ecuación (9.5.19) proporciona variaciones en el talud de la transición, que varían de manera gradual en la parte inicial de la transición (donde la velocidad del flujo es alta) varían en forma rápida al final de la transición, donde la velocidad de flujo es lenta.

Perfil de la elevación del fondo

$$\Delta z_{i,i+1} = \frac{\Delta z_0}{L}\,(x_{i+1} - x_i) \qquad (9.5.20)$$

donde Δz_0 = cambio total en la elevación de fondo sobre la longitud de la transición.

Respecto a este diseño, debe notarse que la base teórica son la minimización de pérdidas de energía y la consideración sobre la separación de flujo en campos de flujo expansivos. Esta técnica puede emplearse en esquemas de diseño basados en los conceptos de tirante variable-energía específica variable y energía específica constante. Además, en contraste con el procedimiento de diseño de Hinds (1928), que supone una superficie de flujo y posteriormente define las fronteras, en esta técnica se definen primero las fronteras y después se determina el perfil del flujo.

EJEMPLO 9.2

Dado los siguientes datos, diséñese una transición entre un medidor y un canal trapecial.

$$Q = 357 \text{ m}^3/\text{s} \ (12\,600 \text{ ft}^3/\text{s})$$
$$\Delta z_0 = 0.5 \text{ m (medidor más elevado) (1.6 ft)}$$
$$b_f = 15.0 \text{ m (49 ft)}$$
$$b_c = 23.0 \text{ m (75 ft)}$$
$$m_o = 2.0$$
$$y_{ch} = 6.7 \text{ m (22 ft)}$$

Nota: Vittal y Chiranjeevi presentaron este ejemplo en (1983).

Solución

En este caso, la elevación de fondo del medidor relativa al canal está predeterminada. La energía específica en el medidor es

$$E_f = y_f + \frac{Q^2}{2gb_f^2y_f^2} = E_{ch} - \Delta z_0 + h_L$$

donde h_L = pérdida de carga a través de la transición, la cual se estima con la ecuación (9.5.10) o la (9.5.15), u otra formulación. Para estimar h_L, se necesitan conocimientos que todavía no se tienen sobre el flujo en el medidor; así que, por el momento, se despreciará E_f y, con esta suposición,

$$E_{ch} = y_{ch} + \frac{Q^2}{2gA_{ch}^2}$$

donde $A_{ch} = (b_c + m_0y_{ch})y_{ch}$

$$= [23 + 2(6.7)]\ 6.7 = 244 \text{ m}^2 \ (2630 \text{ ft}^2)$$

$$E_{ch} = 6.7 + \frac{(357)^2}{2(9.8)(244)^2} = 6.81 \text{ m (22.3 ft)}$$

Por tanto, una estimación inicial de la energía específica en el medidor es

$$E_f = E_{ch} - \Delta z_0 = 6.81 - 0.50 = 6.31 \text{ m (20.7 ft)}$$

El tirante en el medidor se estima al resolver

$$E_f = 6.31 = y_f + \frac{Q^2}{2g\, b_f^2 y_f^2} = y_f + \frac{(357)^2}{2(9.8)(15)^2 y_f^2}$$

$$6.31 = y_f + \frac{28.9}{y_f^2}$$

por tanteo

$$y_f = 5.27 \text{ m (17.3 ft)}$$

y $$\overline{u}_f = \frac{Q}{A_f} = \frac{357}{b_f y_f} = \frac{357}{(15)(5.27)} = 4.52 \text{ m/s (14.8 ft/s)}$$

El término de pérdida h_L puede evaluarse ahora mediante

$$h_L = K_4\left(\frac{\overline{u}_f^2 - \overline{u}_{ch}^2}{2g}\right)$$

con $K_4 = 0.3$, como recomendaron Vittal y Chiranjeevi (1983) para este ejemplo.

$$h_L = 0.3\left[\frac{(4.52)^2 - (357/244)^2}{2(9.8)}\right] = 0.28 \text{ m (0.92 ft)}$$

En este momento, los cálculos anteriores para las condiciones de flujo en el medidor pueden revisarse, a fin de tomar en cuenta la pérdida o

$$E_f = E_{ch} - \Delta z_0 + h_L = 6.81 - 0.50 + 0.28$$

y $$= 6.59 \text{ m (21.6 ft)}$$

$$= 6.59 = y_f + \frac{28.9}{y_f^2}$$

De nuevo, por tanteo

$$y_f = 5.61 \text{ m (18.4 ft)}$$

$$\overline{u}_f = \frac{Q}{A_f} = \frac{357}{15(5.61)} = 4.24 \text{ m/s (13.9 ft/s)}$$

Con esta estimación revisada de la velocidad en el medidor, la pérdida es

$$h_L = 0.3\left[\frac{(4.24)^2 - (357/244)^2}{2(9.8)}\right] = 0.24 \text{ m (0.79 ft)}$$

Se concluye que no es necesario realizar más tanteos, ya que la estimación de pérdidas cambió muy poco.

La longitud de diseño de la transición se estima con la ecuación (9.5.18) o

$$L = 2.35\,(b_c - b_f) + 1.65\,m_0 y_{ch}$$
$$= 2.35\,(23 - 15) + 1.65(2)(6.7) = 40.9 \text{ m} \simeq 41 \text{ m } (134 \text{ ft})$$

Recuérdese que anteriormente se dijo que el ángulo máximo entre el eje del canal y una línea que conecta los lados del canal entre las secciones de entrada y salida mide 12.5°. En el caso considerado aquí, el ángulo es

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(b_{ch} - b_f)/2}{L}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{(23 - 15)/2}{41}\right] = 5.6°$$

que es significativamente menor al máximo permitido.

La transición se divide ahora en nueve subtramos de 4 m (13 ft) y un décimo subtramo de 5 m (16 ft). Los cálculos adicionales requeridos para este diseño se resumen en la tabla 9.6:

Columna 1 A cada subtramo se le asigna un número para su identificación.

Columna 2 Es la distancia desde el inicio de la transición

Columna 3 Se especifica la longitud del subtramo.

TABLA 9.6 **Cálculos para el diseño del ejemplo 9.5 (Vittal y Chiranjeevi, 1983).**

Sección (1)	x, m (2)	b, m (3)	m (4)	Δz, m (5)	y, m (6)
f-f	0.0	15.00	0.000	0.000	5.64
1	4.0	15.03	0.100	0.049	5.79
2	8.0	15.14	0.206	0.098	5.92
3	12.0	15.32	0.318	0.147	6.04
4	16.0	15.60	0.438	0.196	6.16
5	20.0	15.98	0.569	0.245	6.25
6	24.0	16.48	0.712	0.294	6.36
7	28.0	17.13	0.874	0.343	6.44
8	32.0	18.00	1.063	0.392	6.52
9	36.0	19.18	1.302	0.441	6.60
c-c	41.0	23.00	2.000	0.500	6.70

Columna 4 Si emplean las ecuaciones (9.5.16) a (9.5.18) se estima el ancho de fondo del canal de transición. De la ecuación (9.5.16)

$$b = b_f + (b_c - b_f)\left(\frac{x}{L}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\Gamma}\right]$$

donde

$$\Gamma = 0.80 - 0.26\sqrt{m_0}$$
$$= 0.80 - 0.26\sqrt{2} = 0.43$$

Entonces

$$b = 15 + 8\left(\frac{x}{41}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{x}{41}\right)^{0.43}\right]$$

Por ejemplo, en la sección 5

$$x = 20 \text{ m } (65.6 \text{ ft})$$
$$b_5 = 15 + 8\left(\frac{20}{41}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{20}{41}\right)^{0.43}\right]$$
$$= 15.98 \text{ m } (52.4 \text{ ft})$$

Columna 5 De la ecuación (9.5.19), el talud del canal de transición —como una función de la distancia desde el inicio de la transición— es:

$$m = m_0\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{1/2}\right]$$
$$= 2\left[1 - \left(1 - \frac{x}{41}\right)^{1/2}\right]$$

Por ejemplo, en la sección 5

$$x = 20.0 \text{ m } (65.6 \text{ ft})$$

y

$$m = 2\left[1 - \left(1 - \frac{20}{41}\right)^{1/2}\right] = 0.569$$

Columna 6 Se resume la caída acumulada en la elevación del fondo relativa a la elevación del canal. Por ejemplo en la sección 5

$$x = 20 \text{ m } (65.6 \text{ ft})$$

y

$$\Delta z_5 = \frac{\Delta z_0}{L}x = \frac{0.5}{41}(20) = 0.244 \text{ m } (0.80 \text{ ft})$$

La caída en la elevación de fondo entre las secciones 4 y 5 es

$$\Delta z_{4,5} = \frac{\Delta z_0}{L}(x_5 - x_4) = \frac{0.5}{41}(20 - 16)$$
$$= 0.049 \text{ m } (0.16 \text{ ft})$$

Columna 7 El tirante de cada subtramo se estima con una solución por tanteo de la ecuación de energía específica o

$$E_{i+1} = y_{i+1} + \frac{Q^2}{2gA_{i+1}^2} = E_i + \Delta z_{i,i+1} - h_{Li,i+1}$$

donde
$$h_{Li,i+1} = K_H\left(\frac{\overline{u}_i^2 - \overline{u}_{i+1}^2}{2g}\right)$$

Por ejemplo, en la sección 5

$$x_5 = 20.0 \text{ m } (65.6 \text{ ft})$$
$$m_5 = 0.569$$
$$b_5 = 15.98 \text{ m } (52.4 \text{ ft})$$
$$\Delta z_{4,5} = 0.049 \ (0.16 \text{ ft})$$

y de la tabla 9.6

$$b_4 = 15.60 \text{ m } (51.2 \text{ ft})$$
$$y_4 = 6.16 \text{ m } (20.2 \text{ ft})$$
$$m_4 = 0.438$$

De donde,

$$A_4 = (b_4 + m_4 y_4)y_4$$
$$= [15.6 + 0.438\,(6.16)]\,6.16$$
$$= 113 \text{ m}^2 \ (1220 \text{ ft}^2)$$
$$\overline{u}_4 = \frac{Q}{A_4} = \frac{357}{113} = 3.16 \text{ m/s } (10.4 \text{ ft/s})$$

$$E_4 = y_4 + \frac{\overline{u}_4^2}{2g} = 6.16 + \frac{(3.16)^2}{2(9.8)} = 6.67 \text{ m } (21.9 \text{ ft})$$

Un valor correcto de y_5 se obtiene al ignorar inicialmente el parámetro $h_{Li,i+1}$ en la ecuación de energía específica o

$$E_5 = y_5 + \frac{Q^2}{2g(b_5 + m_5 y_5)^2 y_5^2} \simeq E_4 + \Delta z_{4,5}$$
$$= y_5 + \frac{(357)^2}{2(9.8)(15.98 + 0.569y_5)^2 y_5^2} \simeq 6.67 + 0.049$$
$$= y_5 + \frac{(357)^2}{19.6(15.98 + 0.569y_5)^2 y_5^2} \simeq 6.72$$

De donde, por tanteo

$$y_5 = 6.26 \text{ m } (20.5 \text{ ft})$$

y $$\overline{u}_5 = \frac{Q}{A_5} = \frac{357}{[15.98 + 0.569(6.26)]\ 6.26}$$
$$= 2.92 \text{ m/s } (9.58 \text{ ft/s})$$

La pérdida en el subtramo es

$$h_{L4,5} = K_H\left(\frac{\overline{u}_4^2 - \overline{u}_5^2}{2g}\right) = 0.3\left[\frac{3.16^2 - 2.92^2}{2(9.8)}\right]$$
$$= 0.022 \text{ m } (0.072 \text{ ft})$$

Con esto se obtiene la estimación revisada de y_5 mediante una solución de tanteo de la ecuación completa de energía específica o

$$E_5 = y_5 + \frac{Q^2}{2gA_5^2} = E_4 + \Delta z_{4,5} - h_{L4,5}$$

$$y_5 + \frac{(357)^2}{2(9.8)(15.98 + 0.569y_5)^2 y_5^2} = 6.67 + 0.049 - 0.022 = 6.70$$

Con tres cifras significativas

$$y_5 = 6.25 \text{ m } (20.5 \text{ ft})$$

Los cálculos anteriores ilustran el uso del método de Vittal y Chiranjeevi (1983) para el diseño de una expansión, en donde las condiciones de fondo y la energía específica son variables. La misma metodología puede emplearse para diseñar la transición, con condiciones de energía específica constante o de tirante constante.

En los párrafos anteriores se discutió el análisis y diseño de transiciones graduales. En la práctica, algunas transiciones deben ser relativamente bruscas; i.e., el cambio en las dimensiones de sección transversal ocurre sobre una distancia relativamente corta, por lo que se produce un flujo rápidamente variado. Estas transiciones pueden incluir contracciones bruscas verticales, horizontales, o ambas (Fig. 9.37).

Un ejemplo de cómo se tratan los cambios rápidos en secciones transversales es la contracción horizontal de la figura 9.38. Si se aplica la ecuación de cantidad de movimiento unidimensionalmente al volumen de control se tiene

$$\frac{\gamma Q}{g}(\beta_3\overline{u}_3 - \beta_1\overline{u}_1) = P_1 - P_2 - P_3 - F_f$$

o

$$\frac{\gamma Q}{g}(\beta_3\overline{u}_3 - \beta_1\overline{u}_1) = \tfrac{1}{2}\gamma b_1 y_1^2 - \tfrac{1}{2}\gamma (b_1 - b_3)\, y_2^2 - \tfrac{1}{2}\gamma b_3 y_3^2 - F_f \quad (9.5.21)$$

donde todas las variables se encuentran definidas esquemáticamente en la figura 9.38. Con la ayuda de la ecuación de continuidad

$$Q = \overline{u}_1 b_1 y_1 = \overline{u}_3 b_3 y_3$$

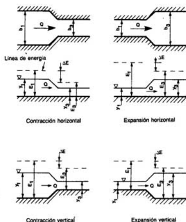


FIGURA 9.37 Transiciones horizontales y verticales bruscas.

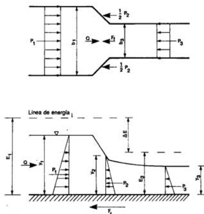


FIGURA 9.38 Contracción horizontal brusca.

y si se supone que $F_f = 0$, $\beta_1 = \beta_3 = 1$, y $y_2 = y_3$, la ecuación (9.5.21) puede reordenarse para dar

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{(y_3/y_1)\,[(y_3/y_1)^2 - 1]}{2\,[(y_3/y_1) - (b_1/b_3)]} \tag{9.5.22}$$

donde $\mathbf{F}_1$ = número de Froude en la sección 1. Esta ecuación se grafica, para valores positivos de $\mathbf{F}_1$ y y_3/y_1, en la figura 9.39; respecto a esta figura, son relevantes las siguientes observaciones:

1. Todas las curvas que pertenecen a la familia de curvas definidas por la ecuación (9.5.22) pasan a través de los puntos ($\mathbf{F}_1 = 0$; $y_3/y_1 = 0$) y ($\mathbf{F}_1 = 0$; $y_3/y_1 = 1$), además son asintóticas a la recta $y_3/y_1 = b_1/b_3$.

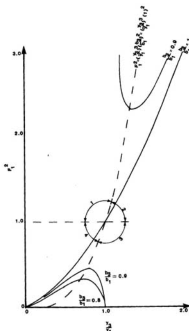


FIGURA 9.39 $\mathbf{F}_1^2$ en función de y_3/y_1 y b_3/b_1 para una contracción horizontal brusca.

2. El flujo aguas arriba es crítico o subcrítico cuando $\mathbf{F}_1 \geq 1$. El flujo es crítico o subcrítico aguas abajo cuando $\mathbf{F}_1^2 \geq (y_3/y_1)^3\ (b_3/b_1)^2$ y subcrítico cuando $\mathbf{F}_1^2 < (y_3/y_1)^3\ (b_3/b_1)^2$. Por lo que se presentan en la figura 9.39 cuatro tipos de regímenes de flujo:

   Región 1 El flujo es supercrítico en toda la transición.

   Región 2 El flujo pasa de supercrítico a subcrítico a través de la transición.

   Región 3 El flujo es subcrítico en toda la transición.

   Región 4 El flujo pasa de subcrítico a supercrítico a través de la transición.

3. Teóricamente, algunas de las regiones de las curvas mostradas en la figura 9.39 son imposibles porque requieren de un aumento de energía. La diferencia de energía a través de la transición está dada por

$$\Delta E = y_1 + \frac{\overline{u}_1^2}{2g} - y_3 - \frac{\overline{u}_3^2}{2g} \tag{9.5.23}$$

o

$$\frac{\Delta E}{y_1} = 1 + \frac{\mathbf{F}_1^2}{2} - \left[\frac{y_3}{y_1} + \frac{\mathbf{F}_1^2}{2(y_3/y_1)^2\,(b_3/b_1)^2}\right] \tag{9.5.24}$$

Con estas ecuaciones se pueden examinar las curvas de la figura 9.39, y no tomar en cuenta las regiones donde $\Delta E > 0$. En la práctica, este análisis teórico puede dar resultados erróneos porque las suposiciones $(F_f = 0$, $\mathrm{B}_1 = \beta_3 = 1$, $y_2 = y_3)$ pueden no ser válidas.

En forma completamente análoga a la descrita para una contracción brusca, la ecuación teórica que gobierna una expansión brusca es

$$\mathbf{F}_1^2 = \frac{(b_3/b_1)\,(y_3/y_1)\,[1 - (y_3/y_1)^2]}{2\,[(b_1/b_3) - (y_3/y_1)]} \tag{9.5.25}$$

En este momento es relevante notar que el diseño de una transición brusca por procedimientos puramente teóricos puede no resultar satisfactorio. Las suposiciones inherentes en los resultados teóricos limitan la utilidad de los resultados y, en general, se requieren estudios con modelos físicos.

BIBLIOGRAFÍA

Anonymous, "Hydraulics of Bridge Waterways," U.S. Bureau of Public Roads, Washington, 1960.

Anonymous, "Computation of Water Surface Profiles," *Surface Water Techniques*, book 1, chapter 1, U.S. Geological Survey, Washington, 1964.

Anonymous, "HEC-2 Water Surface Profiles," U.S. Hydrologic Engineering Center, Davis, Calif., August 1979.

Blaisdell, F. W., "Development and Hydraulic Design, Saint Anthony Falls Stilling Basin," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 113, 1948, pp. 483–520.

Blaisdell, F. W., "The SAF Stilling Basin," *SCS-TP-79*, U.S. Soil Conservation Service, Washington, 1949.

Blaisdell, F. W., and Donnelly, C. A., "The Box Inlet Drop Spillway and Its Outlet," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 121, 1956, pp. 955–986.

Bradley, J. M., and Peterka, A. J., "The Hydraulic Design of Stilling Basins," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY5, October 1957.

√ Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Doeringsfeld, H. A., and Barker, C. L., Pressure-Momentum Theory Applied to the Broad-Crested Weir," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 106, 1941, pp. 934–946.

Eichert, B. S., "Survey of Programs for Water-Surface Profiles," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY2, February 1970a, pp. 547–563.

Eichert, B. S., and Peters, J., "Computer Determination of Flow through Bridges," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY7, July 1970b, pp. 1455–1468.

Feldman, A. D., "HEC Models for Water Resources System Simulation: Theory and Experience," *Advances in Hydroscience*, vol. 12, 1981, pp. 297–423.

Forster, J. W., and Skrinde, R. A., "Control of Hydraulic Jump by Sills," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 115, 1950, pp. 973–987.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, The Macmillan Company, New York, 1966.

Hinds, J., "The Hydraulic Design of Flume and Syphon Transitions," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 92, 1928, pp. 1423–1459.

Hsu, E. Y., Discussion of "Control of the Hydraulic Jump by Sills" by J. W. Forster and R. A. Skrinde, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 115, 1950, pp. 988–991.

Matthai, H. F., "Measurement of Peak Discharge at Width Contractions by Indirect Methods," *Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey*, U.S. Geological Survey, Washington, 1976.

Rand, W., "Flow Geometry at Straight Drop Spillways," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 81, September 1955, pp. 791-1, 791-13.

Vittal, N., and Chiranjeevi, V. V., "Open Channel Transitions: Rational Method of Design." *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 109, no. 1, January 1983, pp. 99-115.

Yarnell, D. L., "Pile Trestles as Channel Obstructions," Technical Bulletin 429, U.S. Department of Agriculture, Washington, July, 1934a.

Yarnell, D. L., "Bridge Piers as Channel Obstructions," Technical Bulletin 442, U.S. Department of Agriculture, Washington, November 1934b.

DIEZ

Difusión turbulenta y dispersión en canales abiertos con flujo permanente

SINOPSIS

En este capítulo se tratan los procesos de transporte conocidos como difusión turbulenta y dispersión. Primero se desarrollan las ecuaciones que rigen el fenómeno para una y dos dimensiones, y posteriormente se discuten las técnicas para la estimación de los coeficientes de difusión turbulenta transversal y de dispersión longitudinal. Se presentan métodos numéricos para resolver las ecuaciones fundamentales, y se considera el problema de dispersión numérica. El capítulo concluye con una breve discusión de las técnicas de estimación del coeficiente de difusión vertical en un medio estratificado.

10.1 INTRODUCCIÓN

El tema del modelado de calidad del agua de ríos es casi inseparable del de la hidráulica de canales abiertos; la conexión entre ambos se establece por un interés común y esencial en la mecánica del transporte de masa. En este capítulo se analiza la difusión turbulenta y la dispersión desde el punto de vista del entendimiento y cuantificación del fenómeno, más que del de la cuantificación de los efectos del transporte de contaminantes. Por ende, no se hará mención a ningún contaminante específico; se tratarán trazadores ambientalmente neutros. Este capítulo también tendrá la forma de un resumen. Un tratado completo sobre la difusión turbulenta y sobre los procesos de transporte por dispersión, desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica, se encuentra en Fischer, *et al.*, (1979) y, desde el punto de vista de la ingeniería ambiental, están en Krenkel y Novotny (1980).

Uno de los problemas fundamentales en el tratado de los procesos de transporte es el aspecto semántico, que comenzó hace muchos años al darse definiciones imprecisas y sin consenso de los procesos involucrados. Según Fischer, *et. al.*, (1979) —en la categoría amplia de procesos de mezclado— se tienen dos categorías de interés para el flujo en canales abiertos-difusión turbulenta y dispersión. El término *difusión turbulenta* se refiere a la propagación al azar de partículas dentro de un flujo, ocasionada por movimientos turbulentos. La *dispersión* es el movimiento de partículas causado por el efecto combinado de cortante y de difusión turbulenta transversal. En este capítulo, trataremos más los procesos de transporte advectivo (i.e., el transporte por sistemas forzados de velocidad) que el transporte convectivo, el cual implica transporte, porque presenta inestabilidades hidrodinámicas que están comúnmente asociadas a gradientes de temperatura. El término *cortante* se refiere a la advección de un fluido a diferentes velocidades en diferentes posiciones dentro del flujo. Por ejemplo, el perfil vertical de velocidades, definido por la ecuación (1.4.14) produce cortante, ya que las partículas que están cerca de la superficie del agua se mueven más rápido que las cercanas al fondo.

10.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Para empezar, considérese el volumen de control definido en la figura 10.1 y supóngase que el movimiento molecular causa la transferencia de masa de un trazador a través de las superficies de control en la dirección x. Si se supone que el transporte de masa a través de la superficie de control es proporcional al gradiente de concentraciones, entonces, al aplicar la ley de conservación de la masa, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{10.2.1}$$

donde c = concentración del trazador y D = coeficiente de difusión molecular, con la suposición tácita que $D \neq f(x)$. La ecuación (10.2.1) es un planteamiento matemático de la primera ley de difusión de Fick. La solución fundamental de la primera ley de Fick se obtiene en las siguientes condiciones:

$$c(x, 0) = \delta(x)$$

y

$$c(\pm\infty, t) = 0$$

donde $\delta(x)$ designa la función delta de Dirac. Esta función tiene la propiedad de valer cero para cualquier valor x excepto para $x = 0$ y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Con estas condiciones iniciales y de frontera, la solución de la ecuación (10.2.1) es

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{10.2.2}$$

La ecuación (10.2.2) es una distribución gaussiana, y cuando la masa bajo la curva de distribución es unitaria, se le conoce como distribución normal. En el material que sigue, el estudio se centrará en varios de los momentos de la ecuación (10.2.2), donde éstos se definen por

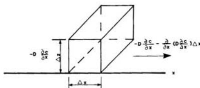


FIGURA 10.1 Difusión molecular.

$$M_n \int_{-\infty}^{\infty} x^n c(x, t)\, dx \quad (10.2.3)$$

Por ende, el momento 0 de la solución fundamental está dado por

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t)\, dx$$

La media μ y la varianza σ^2 de la distribución normal o gaussiana puede definirse en términos de los momentos o

$$\mu = \frac{M_1}{M_0} \quad (10.2.4)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{M_2}{M_0} - \mu^2 \quad (10.2.5)$$

Para una distribución normal,

$$\mu = 0$$

y

$$\sigma^2 = 2Dt$$

En este momento, nótese que

1. La varianza de la distribución es una medida de dispersión de la distribución alrededor del origen. Recuérdese de estadística (véase p. ej., Benjamín y Cornell, 1970) que, para una distribución gaussiana, una dispersión igual a 4σ incluye aproximadamente el 95% del área total bajo la curva de concentración.
2. En estudios prácticos, el coeficiente de difusión se suele determinar mediante

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D \quad (10.2.6)$$

3. La primera ley de Fick —y sus condiciones de frontera normales— pertenecen a un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que se puede aplicar el principio de superposición; i.e., la ecuación y sus condiciones de frontera comunes son lineales. Ésta es una observación importante, ya que en la mayor parte de las aplicaciones prácticas de la ecuación (10.2.1) existen fronteras a través de las cuales no puede ocurrir difusión. Por ejemplo, supóngase que se presentan fronteras en $x = \pm L$ a través de las que no se tiene difusión (Fig. 10.1). Según la ecuación (10.2.1) las condiciones de frontera apropiadas son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = \pm L$$

Para satisfacer las condiciones de frontera en $x = -L$, se añade una fuente de trazador imagen en $x = -2L$; en forma análoga, para satisfacer la condición de frontera en $x = L$, se añade una fuente imagen en $x = 2L$. La fuente imagen en $x = -2L$ hace que $\partial c/\partial x = 0$ en $x = -L$, pero produce un gradiente positivo en $x = +L$; por lo que se debe agregar otra fuente imagen en $x = +4L$. Asimismo, un razonamiento análogo requiere fuentes adicionales en $x = -6L$, $+8L$, *ad infinitum*. La solución es entonces

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, Dt}} \sum_{n=\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x + 2nL}{4Dt}\right) \qquad (10.2.7)$$

Ahora considérese un flujo bidimensional en un canal (Fig. 10.2), definido de tal forma que ningún parámetro varíe en la dirección perpendicular al plano de la hoja. En el tiempo t, un trazador inerte se inyecta al flujo que se mueve de izquierda a derecha, con la distribución de velocidades mostrada. A medida que el trazador se desplaza aguas abajo, éste se abre o se dispersa y su concentración máxima se reduce por dilución. Para obtener una ecuación que represente el transporte en esta situación, defínase un volumen de control elemental con dimensiones dx por dz y un área dA (Fig. 10.2). Se puede aplicar el principio de conservación de masa, a fin de encontrar una ecuación que describa la situación.

Para este desarrollo inicial, supóngase que la propagación de la nube trazadora se debe sólo a la difusión molecular. Asimismo se sugieren dos métodos para calcular el movimiento del trazador a través del volumen de control. Primero, puede describirse el movimiento de cada molécula de la nube del trazador. Aunque este enfoque tiene méritos teóricos, se vuelve tosco para describir el movimiento de cada molécula. El segundo método es el de un enfoque de mecánica del medio continuo, similar al usado para obtener la primera ley de Fick; i.e., se supone que el fluido lleva un trazador consigo, con un ritmo que depende de la velocidad u en la dirección longitudinal y con la concentración c. Sin embargo, el enfoque de mecánica del medio continuo es sólo aproximado, ya que muchas de las moléculas trazadoras tienen velocidades distintas a

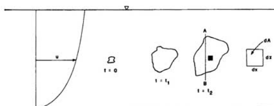


FIGURA 10.2 Transporte en un flujo bidimensional. *(Holley, 1969.)*

u. Por tanto, se necesita introducir el coeficiente de difusión molecular D para corregir la aproximación de esta solución. La aplicación de la mecánica del medio continuo a la formulación del balance requerido de masa da

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\substack{\text{Velocidad de}\\ \text{cambio de la}\\ \text{concentración}\\ \text{en un punto}}} + \underbrace{u\frac{\partial c}{\partial x}}_{\substack{\text{advección del}\\ \text{fluido con}\\ \text{trazador}}} = \underbrace{D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}}_{\substack{\text{difusión}\\ \text{molecular}}} \tag{10.2.8}$$

que se conoce también como segunda ley de Fick (Holley, 1969).

Ahora, supóngase que el fluido es turbulento. En la figura 10.3*a* y *b*, se muestran las velocidades y la concentración del trazador en el volumen de control incremental, que se definió en la figura 10.2. En estas figuras, las líneas punteadas representan los valores medios de u y c en función del tiempo. En una forma similar a la usada en el caso de difusión advectiva molecular, la balanza de masa para esta situación es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial z} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{10.2.9}$$

donde u y v son los valores instantáneos de las velocidades turbulentas en las direcciones x y z, respectivamente, y c es el valor instantáneo de la concentración del trazador. Nótese que se incluye un término para la advección en la dirección z dada, que a pesar de que la dirección primordial del flujo es x, se

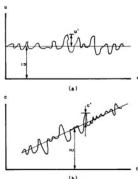


FIGURA 10.3 Fluctuaciones turbulentas de la velocidad y concentración en un volumen de control elemental.

tiene movimiento turbulento en la dirección z. La ecuación (10.2.9) toma en cuenta, en forma directa, el efecto de transporte por difusión turbulenta porque u y v son los componentes instantáneas de velocidad. Ya que a menudo no se tienen los valores instantáneos de u y v, esta incorporación directa de los efectos de turbulencia en la ecuación de transporte determina una ecuación que no puede resolverse.

Desde un punto de vista práctico, el efecto del transporte turbulento del trazador a través de un volumen de control incremental dA debe expresarse en términos de los valores medios de u, v, y c en función del tiempo o

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = v'$$

y

$$c = \bar{c} + c'$$

donde la barra indica el valor medio en el tiempo de la variable, y las variables "primas" son las fluctuaciones turbulentas de la variable. También recuérdese que, por definición, no hay una velocidad media en la dirección z. Al sustituir estas ecuaciones (para u, v, y c) en la ecuación (10.2.9) y al tomar el promedio de la ecuación resultante respecto al tiempo, da

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} + \frac{\partial(-\overline{u'c'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\overline{v'c'})}{\partial z} \qquad (10.2.10)$$

Entonces los coeficientes de difusión turbulenta ϵ_x y ϵ_z se definen análogamente a la difusión molecular o

$$\overline{u'c'} = -\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (10.2.11)$$

y

$$\overline{v'c'} = -\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \qquad (10.2.12)$$

Si se supone que $\epsilon_x \neq f(x)$ y $\epsilon_z \neq f(z)$, la sustitución de estas variables en la ecuación (10.2.10) da

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = (D + \epsilon_x)\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + (D + \epsilon_z)\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \qquad (10.2.13)$$

La ecuación (10.2.10) representa el transporte del trazador causado por la difusión molecular y la turbulenta. El término *difusión turbulenta* surge, como fue el caso de la difusión molecular, porque el término de transporte advectivo —escrito en términos de $\bar{u}$— no representa el proceso completo de transporte advectivo; por lo que se requieren factores correctivos.

En la figura 10.4, se muestra cómo la nube trazadora avanza en el tiempo hasta un tiempo t_4. Para este tiempo, el transporte turbulento ha mezclado completamente el trazador en la dirección vertical. Después de ocurrido el mezclado completo en la dirección vertical, la variación principal en la con-

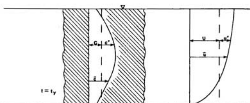


FIGURA 10.4 Transporte unidimensional. *(Holley, 1969.)*

centración de la nube del trazador en el problema bidimensional definido aquí, se da en la dirección longitudinal. Aunque la ecuación (10.2.13) es aún válida, proporciona más información de la que se necesita, ya que describe la variación de c en la dirección x y z. Para tener mayor eficiencia, se buscará una simplificación de esta ecuación. Al definir

$$\bar{u} = U + u'' \qquad (10.2.14)$$

y

$$\bar{c} = C + c'' \qquad (10.2.15)$$

donde U y C son los valores medios de la velocidad y de la concentración del trazador, respectivamente, *en la sección transversal.* Al sustituir las ecuaciones (10.2.14) y (10.2.15) en la ecuación (10.2.13) se tiene, después de promediar en la sección transversal,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = (D + \epsilon_x)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial(-\overline{\overline{u''c''}})}{\partial x} \qquad (10.2.16)$$

donde la barra doble indica la media sobre la sección transversal. Taylor (1953, 1954) demostró que, en ciertas condiciones, u'' es proporcional al gradiente longitudinal de C o

$$E\frac{\partial C}{\partial x} = -\overline{\overline{u''c''}} + (D + \epsilon_x)\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (10.2.17)$$

El transporte definido por la ecuación (10.2.17) se denomina *dispersión longitudinal*, y el coeficiente E es el coeficiente de dispersión longitudinal. Al sustituir la ecuación (10.2.17) en la ecuación (10.2.16) se obtiene una ecuación unidimensional de dispersión longitudinal o

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (10.2.18)$$

Respecto a las ecuaciones (10.2.17) y (10.2.18), se debe notar lo siguiente:

1. Esta ecuación se puede aplicar siempre y cuando el mezclado transversal y vertical estén completos, i.e., cuando el trazador haya llenado por comple-

to la sección transversal y cuando la variación primaria de concentración esté en la dirección longitudinal.

2. La ecuación (10.2.17) incluye tanto el efecto $\overline{u''c''}$ como a las difusiones turbulenta y molecular. Después de que se ha logrado obtener un mezclado completo, la difusión actúa para suavizar (o alisar) la distribución; i.e., después de que se ha alcanzado el punto de mezclado completo, el efecto de la difusión es relativamente pequeño si se le compara con el efecto del gradiente de velocidad.
3. El papel del gradiente de velocidad es muy importante y se refleja en el término $\overline{u''c''}$.
4. Las ecuaciones (10.2.17) y (10.2.18) tienen una aplicación limitada, ya que la suposición de Taylor se basaba en el hecho de que después de un periodo inicial, el ritmo de transporte advectivo u' aguas abajo o aguas arriba de un plano vertical que se mueve con una velocidad U, depende sólo del gradiente de concentración del trazador y de E, que es constante para un flujo uniforme. En general, la ecuación (10.2.18) es válida sólo después de un intervalo de tiempo, porque la suposición de Taylor no es válida antes del paso de este periodo que no se ha especificado con antelación.
5. La ecuación (10.2.18) rige un caso especial en el que el flujo es permanente y uniforme, el canal es prismático y E es constante. Un caso mucho más general está representado por

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC) + \frac{\partial}{\partial x}(UAC) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (10.2.19)$$

En esta situación, U, A, y E pueden variar con la distancia y/o el tiempo.

En este momento conviene notar algunas de las soluciones de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = \Theta\frac{\partial^2 C}{\partial x} \qquad (10.2.20)$$

donde U y Θ son constantes. La solución de esta ecuación depende de las condiciones iniciales y de la frontera que se especifiquen. Por ejemplo, si

$$C(x, 0) = \begin{cases} 0 \text{ para } x > 0 \\ C_0 \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

entonces la solución de la ecuación (10.2.20) es

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{x - Ut}{\sqrt{4\Theta t}}\right)\right] \qquad (10.2.21)$$

donde *erf* designa la función de error. Por ejemplo, las condiciones iniciales anteriores pueden representar el caso en que un fluido en un canal abierto esté

siendo desplazado por un segundo fluido que lleva un trazador con una concentración C_0 y en donde el fluido se desplaza con una velocidad media en la sección transversal U.

Un caso mucho más complejo e importante surge cuando la frontera y las condiciones iniciales son

$$C(0, t) = C_0 \quad \text{para } 0 < t < \infty$$

$$C(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \infty$$

En este caso, la solución de la ecuación (10.2.18) es

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - Ut}{\sqrt{4\Theta t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x + Ut}{\sqrt{4\Theta t}}\right)\exp\left(\frac{Ux}{\Theta}\right)\right] \quad (10.2.22)$$

donde *erfc* designa la función de error complementaria. Este conjunto de fronteras y condiciones iniciales puede representar una situación en la que se introduce una concentración de trazador C_0 en el origen del sistema de coordenadas en el tiempo cero y se continúa su introducción. Es obvio que en este caso si $t \to \infty$, $C(x, t) \to C_0$.

Otro problema de interés para el ingeniero hidráulico es el de la propagación de una fuente trazadora en un flujo tridimensional. La ecuación que rige esta situación es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = \Theta_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \Theta_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \Theta_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

donde Θ_x, Θ_y, y Θ_z son los coeficientes de difusión en las direcciones x, y, y z, respectivamente. Esta ecuación puede simplificarse significativamente si se supone que $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \Theta$. La ecuación que rige el fenómeno se convierte entonces en

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = \Theta\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) \quad (10.2.23)$$

Aunque una solución general de la ecuación (10.2.23) puede obtenerse para algunos casos, a menudo se puede reducir un problema tridimensional a uno bidimensional. Por ejemplo, en el flujo en canales abiertos la difusión en la dirección longitudinal puede despreciarse normalmente (e.g., Fischer *et al.*, 1979). Si este es el caso, entonces para una inyección instantánea de trazador con masa M el origen del sistema de coordenadas, la concentración resultante aguas abajo es

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi\Theta x}\exp\left[-\frac{(y^2 + z^2)U}{4x\Theta}\right] \quad (10.2.24)$$

En el caso en que la inyección del trazador no es instantánea pero el trazador se agrega en forma continua con un gasto másico de $\dot{M}$, la solución correcta

del problema está dada por

$$C(x, y) = \frac{\dot{M}}{U\sqrt{4\pi\Theta x/U}} \exp\left(-\frac{y^2U}{4x\Theta}\right) \tag{10.2.25}$$

Nótese que las soluciones dadas por la ecuación (10.2.24) y la (10.2.25) son válidas, sólo cuando se satisface la siguiente condición:

$$t \gg \frac{2\Theta}{U^2} \tag{10.2.26}$$

En la generalidad de los casos, esta condición se satisface para valores muy pequeños de t.

10.3 DIFUSIÓN TURBULENTA VERTICAL Y TRANSVERSAL, Y DISPERSIÓN LONGITUDINAL

Cuando se inyecta un trazador en un flujo homogéneo de un canal, el proceso completo de transporte advectivo se puede visualizar como si estuviera compuesto de tres etapas. En la primera etapa, el trazador se diluye por el flujo en el canal, como consecuencia de su cantidad de movimiento inicial. En la segunda etapa, el trazador se mezcla en toda la sección transversal por los procesos de transporte turbulentos. Y, en la tercera etapa, la dispersión longitudinal tiende a borrar cualquier variación longitudinal en la concentración del trazador. En algunos casos, la segunda etapa se elimina porque el gasto del trazador tiene una cantidad de movimiento inicial significativa; pero, en muchos casos, el gasto del trazador es pequeño y tiene una cantidad de movimiento insignificante asociada a él. En este último caso, la primera etapa del transporte se elimina. En esta sección sólo se tratarán las segunda y tercera etapas del transporte, con la suposición tácita de que si se presentase una primera etapa, ésta podría tratarse en forma separada.

Para desarrollar una expresión cuantitativa para el coeficiente de difusión turbulento, considérese un flujo muy somero en un canal rectangular ancho (Fig. 10.5). Del capítulo 1, se sabe que el transporte vertical de cantidad de

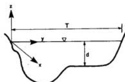


FIGURA 10.5 Definición del sistema de coordenadas.

movimiento en este flujo está dado por

$$\tau = \epsilon_z \rho \frac{du}{dz} \tag{10.3.1}$$

donde τ = esfuerzo cortante a una distancia z arriba de la frontera inferior
ρ = densidad del fluido
ϵ_z = coeficiente de difusión vertical turbulenta
u = velocidad longitudinal

Además, en un flujo bidimensional, como el definido en la figura 10.4, el perfil vertical de velocidades puede suponerse que está dado por

$$u = \frac{u_*}{k}\left(1 + \ln\frac{z}{d}\right) \tag{10.3.2}$$

donde u_* = velocidad al cortante
k = coeficiente de turbulencia de von Karman (k = 0.40)
d = tirante

Se supone una distribución de esfuerzo cortante similar a la que prevalece en un tubo circular o

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{z}{d}\right) \tag{10.3.3}$$

donde $\tau_0 = \rho g d S$ = esfuerzo cortante de fondo. Entonces, como lo demostró Elder (1959), al combinar la ecuación (10.3.1) con la (10.3.3) se tiene

$$\epsilon_z = k u_* d z'(1 - z') \tag{10.3.4}$$

donde $z' = z/d$. El promedio en la profundidad de ϵ_z es

$$\bar{\epsilon}_z = \frac{1}{d}\int_0^d \epsilon_z \, dz = 0.067 d u_* \tag{10.3.5}$$

En el canal infinitamente ancho, que se supone para obtener la ecuación (10.3.4), no existe un perfil de velocidades transversal. Por ende, no puede derivarse una expresión para ϵ_y (el coeficiente de difusión turbulento transversal) en forma análoga a la empleada para ϵ_z. En cambio, las expresiones para ϵ_y deben deducirse a partir de resultados experimentales. Se han efectuado muchos de estos experimentos y sus resultados se resumen en Fischer, *et al.* (1979), y Lau y Krishnappen (1977). En canales rectos rectangulares, una media aproximada de los resultados disponibles es

$$\epsilon_y \simeq 0.15 d u_* \pm 50\% \tag{10.3.6}$$

donde ±50% indica la magnitud del error incurrido al estimar ϵ_y. En canales naturales, el valor de ϵ_y es mayor que el estimado por la ecuación (10.3.6). En

canales que pueden clasificarse como "meandros suaves" con sólo algunas irregularidades moderadas de fronteras, se obtiene

$$\epsilon_y \simeq 0.60du_* \pm 50\% \tag{10.3.7}$$

Si el canal tiene curvas con pequeños radios, cambios bruscos en la geometría del canal, o irregularidades fuertes en los taludes (e.g., aristas) entonces el valor de ϵ_y será mayor que el estimado por la ecuación (10.3.7). Por ejemplo, en el caso de meandros, Fischer (1969) estimó que

$$\epsilon_y = 25\,\frac{\overline{u}^2 d^3}{R_c^2 u_*} \tag{10.3.8}$$

donde R_c = radio de curvatura. En este momento, es cuestión de juicio personal considerar a un canal como de meandros suaves y emplear la ecuación (10.3.7) para la estimación de ϵ_y, o emplear un valor mayor de ϵ_y. Fischer, *et. al.* (1979), sugirió que un canal de meandros suaves es aquel que

$$\frac{T\,\overline{u}}{R_c u_*} < 2 \tag{10.3.9}$$

donde T = ancho del canal
$\overline{u}$ = velocidad media del flujo
R_c = radio de curvatura

En el mejor de los casos, la ecuación (10.3.9) proporciona sólo una estimación burda de la sinuosidad relativa del canal con ϵ_y.

Como se notó en el primer párrafo de esta sección, el proceso completo de transporte advectivo en un flujo bidimensional en canales, puede visualizarse convenientemente como si estuviera compuesto por tres etapas. En la segunda etapa, el mecanismo de transporte primordial es el de difusión turbulenta, en donde los coeficientes de difusión están definidos por las ecuaciones (10.3.5) y (10.3.7), o en algunos casos por la ecuación (10.3.8). Una comparación de las ecuaciones (10.3.5) y (10.3.7) demuestra que

$$\epsilon_y \simeq 10\,\epsilon_z$$

o que el coeficiente de mezclado transversal es más o menos 10 veces mayor que el coeficiente de mezclado vertical. De aquí, la velocidad a la que una pluma de trazador se dispersa en forma lateral es un orden de magnitud mayor que la velocidad de dispersión en la dirección vertical. Siempre y cuando el canal, en casi todos los casos, sea mucho más ancho que profundo; e.g., las dimensiones típicas de un canal natural pueden ser de 100 ft (30 m) y tirantes de 3.0 ft (1.0 m). Un examen de las ecuaciones que rigen la propagación de una pluma, por ejemplo la ecuación (10.2.25), demuestra que el tiempo de mezclado puede definirse como proporcional al cuadrado de la distancia dividida por el coeficiente de mezclado. Entonces, se tiene que en un canal típico el tiempo en que una pluma se propague completamente a través del canal es 90 veces

mayor que lo que le toma mezclarse en la dirección vertical. En la generalidad de los problemas prácticos, es conveniente y correcto empezar por suponer que el trazador se distribuye uniformemente sobre la vertical.

Recuérdese de la Sección 10.2 que, en un proceso de difusión donde el trazador se agrega en forma constante con un gasto másico M a un canal sin fronteras, la concentración aguas abajo del trazador está dada en forma aproximada por

$$C = \frac{\dot{M}}{\overline{u}d(4\pi\epsilon_y x/\overline{u})^{1/2}} \exp - \left(\frac{y^2\overline{u}}{4x\epsilon_y}\right) \tag{10.3.10}$$

Si el canal tiene un ancho T, entonces la solución debe satisfacer las condiciones de frontera.

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0$$

y

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = T$$

En este momento conviene definir las siguientes variables adimensionales:

$$\hat{C} = \frac{\dot{M}}{\overline{u}\, dT}$$

$$\hat{x} = \frac{x\epsilon_y}{\overline{u}T^2}$$

y

$$\hat{y} = \frac{y}{T}$$

Si la fuente del trazador se ubica en $y = y_0$ donde $\hat{y} = \hat{y}_0$, entonces la concentración aguas abajo es

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{(4\pi\hat{x})^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\hat{y} - 2n - \hat{y}_0)^2}{4\hat{x}} \right] + \exp\left[-\frac{(\hat{y} - 2n + \hat{y}_0)}{4\hat{x}} \right] \right\} \tag{10.3.11}$$

donde el principio de superposición (secc. 10.2) se ha empleado para cumplir las condiciones de frontera. En la figura 10.6, la ecuación (10.3.11) se grafica para una inyección al centro del claro del trazador; i.e., $\hat{y}_0 = 0.5$, asimismo, las concentraciones relativas del trazador a lo largo de la línea central del canal y en los lados del canal se muestran como funciones de $\hat{x}$. En esta figura, nótese que para $\hat{x} \geq 0.1$ la concentración C está dentro del 5% de C_0 a través de toda la sección transversal del canal. A esta situación se le conoce, a veces, como *mezclado completo*; para una inyección en la línea central, la

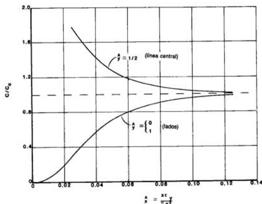


FIGURA 10.6 Concentración de trazador aguas abajo que resultan de una inyección continua al centro del canal.

distancia a la cual se logra el mezclado completo está dada por

$$L = \frac{0.1\bar{u}T^2}{\epsilon_y} \tag{10.3.12}$$

Si el trazador se inyecta en el lado del canal, el ancho sobre el cual debe mezclarse la pluma es el doble que el de una inyección al centro, siempre y cuando permanezcan idénticas las otras condiciones de frontera y se puedan emplear las otras ecuaciones disponibles para obtener una solución.

EJEMPLO 10.1

Se inyecta un trazador en el centro de un canal de meandro suave con un gasto de 0.15 m³/s (5.3 ft³/s). Si la concentración de trazador en el punto de inyección es de 300 mg/L (300 partes por millón, ppm), el ancho del canal es de 300 m (984 ft), el tirante es de 10 m (33 ft), la pendiente del canal es 0.0001, y el área total de flujo es de 1600 m³/s (57 000 ft³/s), determínese la concentración máxima del trazador a 500 m (1600 ft) aguas abajo del punto de inyección y estímese el ancho de la pluma del trazador en este punto.

Solución

Se supone que el trazador se encuentra completamente mezclado sobre la dimensión vertical en el punto de inyección. La velocidad al cortante se estima entonces de

$$u_* = \sqrt{gRS} = \sqrt{9.8(10)(0.0001)} = 0.099 \text{ m/s } (0.32 \text{ ft/s})$$

donde R (el radio hidráulico) se toma como el tirante. De la ecuación (10.3.7) el coeficiente de difusión transversal turbulento es

$$\epsilon_y = 0.60du_* = 0.60(10)(0.099) = 0.59 \text{ m}^2\text{/s } (6.4 \text{ ft}^2\text{/s})$$

El flujo másico del trazador es

$$\dot{M} = Q_T C = 0.15(300) = 45 \text{ (m}^3 - \text{mg)/(s} - \text{L) } (1600 \text{ ft}^3 - \text{ppm/s})$$

donde Q_T = gasto asociado al trazador. La velocidad media del flujo se estima al suponer que la sección transversal del canal es aproximadamente rectangular; entonces

$$\overline{u} = \frac{Q}{A} = \frac{1600}{300(10)} = 0.53 \text{ m/s } (1.7 \text{ ft/s})$$

El ancho de la pluma en $x = 500$ m (1640 ft) se estima primero, para determinar si las fronteras laterales del canal pueden ignorarse en el cálculo de la concentración máxima a esta distancia. El ancho de la pluma del trazador está dado aproximadamente por

$$b = 4\sigma = 4\sqrt{2\epsilon_y t}$$

donde t puede estimarse si $t = x/\overline{u}$. Entonces

$$b = 4\sqrt{2(0.59)\left(\frac{500}{0.53}\right)} = 130 \text{ m } (430 \text{ ft})$$

Por tanto, el ancho de la pluma del trazador es menor que el ancho del canal en $x = 500$ m (1640 ft), además, el efecto de las fronteras laterales del canal puede ignorarse al calcular la concentración máxima de trazador en esta distancia. La concentración máxima del trazador, en esta situación, se estima mediante la ecuación (10.2.25).

$$C_{\text{máx}} = \frac{\dot{M}}{\overline{u}d\sqrt{4\pi\epsilon_y x/\overline{u}}} \exp\left(-\frac{y^2\overline{u}}{4x\epsilon_y}\right)$$

$$= \frac{45}{0.53(10)[4\pi(0.59)(500)/0.53]^{1/2}} \exp\left(\frac{0(0.53)}{4(500)(0.59)}\right)$$

$$= 0.10 \text{ mg/L } (1 \text{ ppm})$$

Nota: y se considera como cero, ya que se requiere una estimación de la concentración máxima.

EJEMPLO 10.2

Para los datos del ejemplo 10.1, determínese la distancia longitudinal requerida para producir un mezclado completo en la dirección transversal; i.e., la ubicación en la que la concentración no varíe más del 5% a través de la sección transversal, para: *a*) inyección del trazador al centro del claro y *b*) inyección del trazador en el lado del canal. ¿Cómo se vería afectada esta distancia al punto de mezclado completo, si el mezclado ocurriese donde el canal tuviese una curva con un radio de 50 m (160 ft)?

Solución

De nuevo, se supone que el trazador se encuentra completamente mezclado sobre la dimensión vertical en el punto de inyección. Entonces, la distancia al punto de mezclado completo puede calcularse por la ecuación (10.3.12) con $\bar{u}$ = 0.53 m/s (1.7 ft/s) y ϵ_y = 0.59 m²/s (6.4 ft²/s).

1. Cuando la inyección del trazador es al centro del canal, el valor correcto de T es 300 m (980 ft), y

$$L = \frac{0.1\bar{u}T^2}{\epsilon_y} = \frac{0.1(0.53)(300)^2}{0.59} = 8100 \text{ m } (27\,000 \text{ ft})$$

2. Cuando el trazador se inyecta en el lado del canal, se emplea $2T$ en la ecuación (10.3.12) para el ancho o

$$L = \frac{0.1\bar{u}(2T)^2}{\epsilon_y} = \frac{0.1(0.53)[2(300)]^2}{0.59} = 32\,000 \text{ m } (105\,000 \text{ ft})$$

Cuando el mezclado ocurre en una curva, el coeficiente de difusión turbulento transversal aumenta, y la distancia al punto de mezclado completo disminuye. Para los datos especificados, ϵ_y es, por la ecuación (10.3.8),

$$\epsilon_y = 25\frac{\bar{u}^2 d^3}{R_c^2 \bar{u}_*} = 25\left[\frac{(0.53)^2(10)^3}{(50)^2(0.099)}\right] = 28 \text{ m}^2/\text{s } (300 \text{ ft}^2/\text{s})$$

De donde, para una inyección en el centro del canal

$$L = \frac{0.1\bar{u}T^2}{\epsilon_y} = \frac{0.1(0.53)(300)^2}{28} = 170 \text{ m } (560 \text{ ft})$$

y para inyección en el lado del canal

$$L = \frac{0.1\bar{u}(2T)^2}{\epsilon_y} = \frac{0.1(0.53)[2(300)]^2}{28} = 680 \text{ m } (2200 \text{ ft})$$

Por lo que, la distancia requerida en ambos casos para el mezclado completo se reduce en forma significativa.

Antes de iniciar un análisis de dispersión longitudinal, es apropiado notar que gran parte de las investigaciones de difusión turbulenta transversal han atacado el problema desde el punto de vista de canales con una superficie libre. Aunque el proceso de difusión transversal en canales cubiertos por hielo ha recibido alguna consideración (véase, p. ej., Engmann, 1977), los resultados disponibles en este momento deben tomarse como indicativos, más que como absolutos. Aparentemente, el efecto de la cubierta de hielo es causar una baja aproximada del 50% en el valor absoluto de ϵ_y cuando condiciones hidráulicas similares —tirante, ancho, y gastos constantes— se comparan. Por ende, en un canal cubierto por hielo, la pluma trazadora satisfará el criterio de mezclado completo mucho más aguas abajo que una pluma trazadora en un canal con superficie libre comparable. Los resultados de Engmann también indican que el coeficiente de difusión adimensional (i.e., ϵ_y/Ru_*) para canales cubiertos por hielo no difiere en forma importante del coeficiente correspondiente a la condición de superficie libre.

En la sección 10.2 la ecuación de dispersión longitudinal [Ec. (10.2.18)] se desarrolló siguiendo el enfoque empleado por Elder (1959). En ese caso, se notó que esta ecuación estaba sujeta a una serie de restricciones. La más crucial de éstas es que la ecuación (10.2.18) no puede aplicarse hasta que haya transcurrido un tiempo inicial y el ritmo de transporte advectivo —ya sea aguas arriba o abajo de un plano vertical, que se desplaza a la velocidad media de la sección transversal— dependa sólo de la concentración del trazador y de E. El periodo inicial durante el cual la ecuación (10.2.18) no es válida, en términos de la distancia adimensional, está dado por

$$0 < x' < 0.4$$

donde

$$x' = \frac{x\epsilon_y}{\bar{u}T^2} \qquad (10.3.13)$$

donde x es la distancia longitudinal.

Elder (1959) supuso en su desarrollo que la velocidad variaba sólo en la dimensión vertical y conforme a la ecuación (10.3.2). Con esta suposición, se puede derivar una expresión para el coeficiente de dispersión longitudinal.

$$E = 5.93\, du_* \qquad (10.3.14)$$

En la tabla 10.1, se resume un número de valores de E determinados en campo y laboratorio junto con los estimados por la ecuación (10.3.14). De esta tabla se desprende que la ecuación de Elder da estimaciones muy pobres de E para canales artificiales o naturales. Esto se debe a la exclusión, por parte de Elder, del efecto del perfil transversal de velocidades. Fischer (1967) presentó

la siguiente ecuación para estimar E en un canal natural, cuando se tiene una sección transversal definida y medida:

$$E = -\frac{1}{A\partial c/\partial x}\int\int_A u'c'\,dA$$

$$= -\frac{1}{A}\int_0^T u'd\int_0^y \frac{1}{\epsilon_y d}\int_0^y u'\,d\;dy\;dy\;dy \qquad (10.3.15)$$

En la práctica, las integrales de la ecuación (10.3.15) se reemplazan por sumatorias o

$$E = -\frac{1}{A}\sum_{k=2}^{N} q_k'\,\Delta y\left[\sum_{j=2}^{k}\frac{\Delta y}{\epsilon_y d_j}\left(\sum_{i=1}^{j-1} q_i'\,\Delta y\right)\right] \qquad (10.3.16)$$

donde $q_i' = [(d_i + d_{i+1})/2]u_i'$
u_i = velocidad media en el elemento i de la sección transversal
$u_i' = u_i - \bar{u}$
$\bar{u}$ = velocidad media del flujo en la sección transversal
d_i = tirante al inicio del elemento transversal i
Δy = ancho del elemento (constante)
ϵ_y = 0.6 du_* = coeficiente de difusión turbulenta transversal entre los elementos $(i-1)$ e i
N = número de elementos transversales

Fischer, *et al.* (1979), dicen que N no debe exceder 20. La ecuación (10.3.16) está sujeta a dos limitaciones. Primero, no se toman en cuenta los efectos del gradiente de velocidades ni a la variación de c' en la dimensión vertical sobre el proceso de difusión. Segundo, el desarrollo de la ecuación (10.3.16) supone un flujo uniforme y una sección transversal constante. En la tabla 10.1 se resumen los valores de E estimados mediante esta técnica. Una comparación de los valores observados con los estimados de E por este método, muestran un parecido razonable.

EJEMPLO 10.3

Para la sección transversal definida en la figura 10.7 y la tabla 10.2, estímese E con la ecuación (10.3.16) si $u_* = 0.100$ m/s (0.33 ft/s).

Solución

La velocidad media del flujo se determina sumando la columna (4) en la tabla 10.2 y dividiendo ésta por la suma de la columna (3) en la mis-

TABLA 10.1 Resumen de los experimentos de dispersión (Fischer, *et. al., 1979)*

Referencia	Canal	Profundidad ft	Ancho ft	Velocidad media ft/s	Velocidad al cortante ft/s	E observado ft²/s	Eq. (10.3.14)	Eq. (10.3.15)	Eq. (10.3.17)
Thomas (1958)	Chicago Ship Canal	26.5	160	0.88	0.0627	30	10	—	130
State of California, (anon) (1962)	Sacramento River	13.1	—	1.7	0.17	160	13	—	—
Owens et al. (1964)	River Derwent	0.82	—	1.2	0.46	50	2.2	—	—
Glover (1964)	South Platte River	1.5	—	2.2	0.23	170	2.0	—	—
Schuster (1965)	Yuma Mesa A Canal	11.3	—	2.2	1.1	8.2	74	—	—
Fischer (1967)	Laboratory channel	1.1	1.3	0.82	0.066	1.3	0.43	1.4	0.17
		1.5	1.4	1.5	0.12	2.7	1.1	2.7	0.36
		1.1	1.3	1.5	0.12	4.5	0.78	4.0	0.32
		1.1	1.1	1.4	0.11	2.7	0.72	2.7	0.22
		0.69	1.1	1.5	0.11	4.3	0.45	4.8	0.39
		0.69	0.62	1.5	0.13	2.4	0.53	1.8	0.11
Fischer (1968a)	Green-Duwamish River, Washington	3.6	66	—	0.16	70–91	3.4	84	—
Yotsukura et al. (1970)	Missouri River	8.9	660	5.1	0.24	16×10^3	13	—	58×10^3

Godfrey and	Copper	1.6	52	0.89	0.26	220	2.5	64	57
Frederick (1970)	Creek, Va.	2.8	59	2.0	0.33	230	5.5	300	170
[Predijeron valores	(below gage)	1.6	52	0.85	0.26	100	2.5	120	52
de la E de Fischer	Clinch	2.8	59	2.0	0.33	150	5.5	160	170
(1968b)]	River, Tenn.	6.9	200	3.1	0.34	580	14	920	1800
		6.9	170	2.7	0.35	510	14	590	960
	Copper Creek, Va. (above gage)	1.3	62	0.52	0.38	32	2.9	30	23
	Powell River, Tenn.	2.8	110	0.49	0.18	100	3.0	98	63
	Clinch River, Va.	1.9	120	0.69	0.16	87	1.8	320	250
	Coachella Canal, Calif.	5.1	79	2.3	0.14	100	4.2	42	510
McQuivey y	Bayou Anacoco	3.1	85	1.1	0.22	360	4.0	—	141
Keefer (1974)	Colo.	3.0	120	1.3	0.22	420	4.0	—	400
	Nooksack River	2.5	210	2.2	0.89	380	13	—	1100
	Wind/Bighorn	3.6	190	2.9	0.39	450	8.3	—	2400
	Rivers	7.1	230	5.1	0.56	1700	23	—	3800
	John Day	8.1	110	2.7	0.59	700	28	—	200
	River	1.9	82	3.3	0.46	150	5.2	—	920
	Comite River	1.4	52	1.2	0.16	150	1.3	—	190
	Sabine	6.7	340	1.9	0.16	3400	6.3	—	4300
	River	16	420	2.1	0.26	7200	25	—	2100
	Yadkin	7.7	230	1.4	0.33	1200	15	—	450
	River	13	240	2.5	0.43	2800	33	—	710

TABLA 10.2 Definición del canal para el ejemplo 10.3

Elemento (1)	Velocidad media m/s (2)	Area m^2 (3)	Gasto del elemento m^3/s (4)	Tirante, lado izquierdo del elemento (5)
1	0.24	12.5	3.0	0
2	0.30	34.4	10	8.2
3	0.37	49.2	18	14
4	0.40	56.7	23	18
5	0.49	57.1	28	19
6	0.43	54.8	24	18
7	0.43	48.8	21	18
8	0.40	40.9	16	14
9	0.37	35.3	13	12
10	0.34	30.2	10	11
11	0.37	26.5	9.8	9.1
12	0.30	23.7	7.1	8.2
13	0.27	21.4	5.8	7.3
14	0.27	20.0	5.4	6.7
15	0.24	19.0	4.6	6.4
16	0.09	17.2	1.5	6.1
17	0.03	7.90	0.23	5.2

ma tabla, o

$$\overline{u} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} = \frac{200}{555} = 0.36 \text{ m/s (1.2 ft/s)}$$

Ahora los valores para las columnas (3) a (5) de la tabla 10.3 pueden calcularse. Los valores del coeficiente de difusión turbulento transversal de la columna (6) de la tabla 10.3 se estiman empleando el tirante

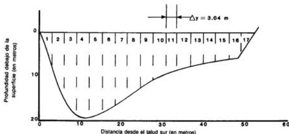


FIGURA 10.7 Sección transversal para el ejemplo 10.3.

TABLA 10.3 Solución tabular del ejemplo 10.3

Elemento (1)	Tirante, lado izquierdo del elemento m (2)	u'_i, m/s (3)	$u'_i A_i = q'_i$, m^3/s (4)	$\Sigma q'_i$, m^3/s (5)	ϵ_y, m^2/s (6)	$\sum_{j=2}^{k} \frac{\Delta y}{\epsilon_y d_j} \sum_{i}^{j-1} q'_i$, m (7)
1	0	−0.12	−1.5	−1.5	0	0
2	8.2	−0.06	−2.1	−3.6	0.49	−1.1
3	14	0.01	0.49	−3.1	0.84	−2.1
4	18	0.04	2.3	−0.8	1.1	−2.5
5	19	0.13	7.4	6.6	1.1	−2.7
6	18	0.07	3.8	10.4	1.1	−1.6
7	18	0.07	3.4	13.8	1.1	−0.05
8	14	0.04	1.6	15.4	0.84	3.5
9	12	0.01	0.35	15.7	0.72	8.9
10	11	−0.02	−0.60	15.1	0.66	16
11	9.1	0.01	0.26	15.4	0.55	25
12	8.2	−0.06	−1.4	14.0	0.49	36
13	7.3	−0.09	−1.9	12.1	0.44	50
14	6.7	−0.09	−1.8	10.3	0.40	63
15	6.4	−0.12	−2.3	8.0	0.39	76
16	6.1	−0.27	−4.6	3.4	0.37	87
17	5.2	−0.33	−2.6	0.8	0.31	93

izquierdo de cada elemento; o para el elemento 2

$$\epsilon_y = 0.6\, du_* = 0.6(8.2)(0.100) = 0.49 \text{ m}^2/\text{s} \; (5.3 \text{ ft}^2/\text{s})$$

Los valores de la columna (7) de la tabla 10.3 se calculan como un total acumulado.

El valor de esta suma es, por definición, cero para el elemento 1. Para el elemento 2, el valor de la columna (7) está dado por

$$\frac{\Delta y}{\epsilon_y\, d_2} q_1 = \frac{3.0}{0.49(8.2)}(-1.5) = -1.1$$

y para el elemento 3

$$\frac{\Delta y}{\epsilon_y d_3} q_2 + \frac{\Delta y}{\epsilon_y d_2} q_1 = -1.1 + \frac{3.0}{0.84(14)}(-3.6) = -2.0$$

El coeficiente de dispersión longitudinal se estima como

$$E = -\frac{\Sigma(\text{col } 4)(\text{col } 7)}{\text{flujo área}}$$

$$= -\frac{1100}{555} = 2.0 \text{ m}^2/\text{s} \; (22 \text{ ft}^2/\text{s})$$

Aunque las estimaciones de E dadas por la ecuación (10.3.15) son mejores que las obtenidas con la ecuación (10.3.14), no son —en todos los casos— preci-

sas. La razón principal del porqué de las discrepancias que se pueden ver en la tabla 10.1, parecen deberse al hecho de que ningún canal natural cumple completamente con las suposiciones inherentes al desarrollo de la ecuación (10.3.15). Por ejemplo, todos los canales naturales —y muchos artificiales— tienen curvas, cambios de forma de la sección transversal, estanques, y otras irregularidades; cada una de éstas contribuye, con mucho, al proceso de dispersión. Fischer, *et al.* (1979), presentaron la siguiente ecuación que puede emplearse para estimar en forma aproximada a E:

$$E = \frac{0.011\overline{u}^2 T^2}{du_*} \tag{10.3.17}$$

Esta ecuación tiene la ventaja distintiva de estimar a E a partir de parámetros comúnmente conocidos. En la tabla 10.1 los valores de E estimados por este método pueden compararse con los observados.

En este momento, es necesario notar la presencia y el supuesto efecto de lo que la literatura ha llamado *zonas muertas*. Esta terminología se ha usado para referirse a áreas sobre las fronteras del canal en las que parte del trazador se retiene al pasar la nube principal del trazador. El trazador retenido se libera de esta zona muerta en forma lenta y puede causar concentraciones medibles de trazador, aguas abajo, mucho después de que pasó la nube principal. Esto ocasiona gráficas de concentración aguas abajo contra el tiempo no gaussianas y caracterizadas por una cola larga (e.g., Fig. 10.8). Hasta ahora, no se dispone de un método efectivo para la cuantificación del efecto de las

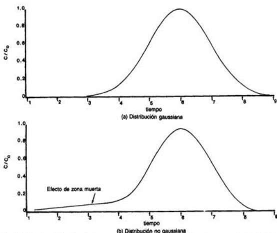


FIGURA 10.8 Efecto de las zonas muertas en la gráfica de concentración contra el tiempo.

zonas muertas, ya sea en el coeficiente de dispersión o en el movimiento de la pluma aguas abajo. Un método que han empleado varios investigadores, es tratar a la cola de la gráfica de la concentración *contra el* tiempo como si ésta no existiera, dando como justificación el hecho de que la masa del trazador en la cola es muy pequeña (véase, por ejemplo, Fischer, 1968a).

Al examinar los resultados resumidos en la tabla 10.1, se observa que ninguno de los métodos que se han sugerido para el cálculo de E dan resultados completamente satisfactorios. Hasta cierto punto, la diferencia entre los valores predichos y observados del coeficiente de dispersión longitudinal se deben a la imprecisión del método empleado para la determinación de los valores observados. Por ejemplo Fischer, *et al.* (1979), han sugerido que el valor observado es por lo general preciso sólo dentro de un factor de 2. Por esto, los valores estimados de E en la tabla 10.1 pueden ser mejores que lo que indicaría un examen somero.

Se tienen esencialmente tres métodos para el cálculo de los valores de E a partir de datos de campo. Primero, de la sección 10.2, por definición, el coeficiente de dispersión longitudinal mide el ritmo de cambio de la varianza de la nube trazadora o

$$E = 0.5 \frac{d(\sigma_x^2)}{dt} \tag{10.3.18}$$

donde σ_x^2 = varianza de la distribución de concentración respecto a la distancia sobre el canal. La aplicación de la ecuación (10.3.18) se complica algo por el hecho de que a menudo los datos de campo consisten en concentraciones tabuladas a distancias especificadas aguas abajo del punto de inyección, en función del tiempo. Una base de datos típica se muestra en la tabla 10.4. La ecuación (10.3.18) puede transformarse a una forma útil para la base de datos típica o

$$E = \frac{\overline{u}^2}{2}\left[\frac{\sigma_{t2}^2 - \sigma_{t1}^2}{\overline{t}_2 - \overline{t}_1}\right] \tag{10.3.19}$$

donde σ_{t1}^2 y σ_{t2}^2 = curvas de varianza de la concentración contra el tiempo aguas arriba (estación 1) y aguas abajo (estación 2), respectivamente, y $\bar{t}_1$ y $\bar{t}_2$ = tiempo medio de paso de la nube trazadora a través de las estaciones aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Aunque la ecuación (10.3.19) es en teoría correcta, deben tomarse en cuenta un número de limitaciones prácticas. Primero, se requiere una gran dosis inicial de trazador para producir concentraciones medibles aguas abajo. Segundo, se requiere un tramo largo de canal prismático. Tercero, la presencia de zonas muertas puede tener un efecto significativo sobre el valor de E estimado por este método, ya que la cola larga característica de las zonas muertas afectará el valor de σ^2.

EJEMPLO 10.4

Se inyecta un trazador a un flujo en un canal natural y al pasar la nube resultante de trazador por dos estaciones aguas abajo, ésta se mues-

TABLA 10.4 Perfiles de concentración de trazador en dos estaciones para la estimación del coeficiente de dispersión (Fischer, 1968b)

Tiempo relativo a la 1a. observación	Concentración de trazador, mg/L
Estación 1: 7870 ft (2400 m) desde el punto de inyección	
0	0
3	0.26
6	0.67
9	0.95
11	1.09
13	1.13
15	1.10
17	1.04
19	0.95
24	0.72
29	0.50
34	0.31
39	0.21
49	0.08
59	0.02
Estación 2: 13 500 ft (4100 m) desde el punto de inyección	
32	0
37	0
42	0.07
47	0.22
52	0.40
56	0.50
60	0.58
62	0.59
64	0.59
68	0.54
75	0.44
84	0.27
94	0.14
104	0.06
114	0.03
124	0.025
134	0.02
144	0

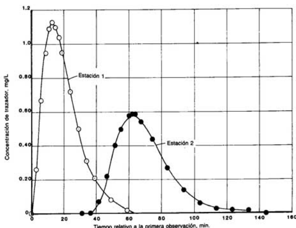


FIGURA 10.9 Concentración de trazador en dos secciones en función del tiempo, de los datos de la tabla 10.4.

trea. Los resultados del programa de muestreo se resumen en la tabla 10.4 y en la figura 10.9. Si en el tramo entre las dos estaciones de muestreo el tirante, el ancho y la velocidad al cortante medios son 2.77 ft (0.84 m), 60 ft (18 m), y 0.33 ft/s (0.10 m/s), respectivamente, estímese el coeficiente de dispersión longitudinal para este tramo del canal mediante la ecuación (10.3.19). *Nota:* Fischer presentó los datos de este ejemplo por primera vez en (1968b).

Solución

La única restricción asociada con el uso de la ecuación (10.3.19) es que las dos estaciones de muestreo deben ubicarse lo suficientemente aguas abajo para poder aplicar la ecuación (10.2.18) o

$$x' = \frac{x\epsilon_y}{\overline{u}T^2} > 0.4$$

Con referencia a la figura 10.8, la velocidad media del flujo puede estimarse como

$$\overline{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde Δx = distancia entre las estaciones de muestreo y Δt = tiempo del desplazamiento entre las dos estaciones. Δt puede aproximarse co-

mo la diferencia de tiempo entre los picos de trazador en las dos estaciones o $\Delta t = 49$ min. Entonces

$$\bar{u} = \frac{13\,550 - 7870}{49} = 116 \text{ ft/min} = 1.94 \text{ ft/s } (0.59 \text{ m/s})$$

y $\quad \epsilon_y = 0.6\, du_* = 0.6(2.77)(0.33) = 0.55 \text{ ft}^2\text{/s } (0.051 \text{ m}^2\text{/s})$

x' se calcula entonces como

$$x' = \frac{7870(0.55)}{1.94(60)^2} = 0.62$$

y, por tanto, la ecuación (10.3.19) puede emplearse para estimar a E. Los parámetros σ^2_{t1} pueden estimarse con rapidez mediante

$$\sigma^2_{ti} = \frac{\sum_{i=1}^{N} C_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{N} C_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} C_i t_i}{\sum_{i=1}^{N} C_i} \right)^2$$

donde la base de tiempo utilizada para los cálculos no es un factor, pero las sumatorias indicadas deben efectuarse sobre mediciones uniformemente espaciadas. De la figura 10.9 se construye la tabla 10.5 y tenemos los siguientes datos

Estación 1	Estación 2
$\sum_{i=1}^{N} C_i = 9.08$	$\sum_{i=1}^{N} C_i = 4.26$
$\sum_{i=1}^{N} C_i t_i = 181$	$\sum_{i=1}^{N} C_i t_i = 298$
$\sum_{i=1}^{N} C_i t_i^2 = 4776$	$\sum_{i=1}^{N} C_i t_i^2 = 21\,988$
$\sigma^2_{t1} = 129$	$\sigma^2_{t2} = 268$

Aunque Fischer (1968b) no fue muy preciso en su definición de $\bar{t}_1$ y $\bar{t}_2$, Levenspiel y Smith (1957) emplearon la siguiente definición:

$$\bar{t}_i = \frac{\int_0^\infty Ct\, dt}{\int_0^\infty C\, dt}$$

Si se aplica esta definición se tienen

$$\bar{t}_1 = 17.8 \text{ min}$$

TABLA 10.5 Perfiles de concentración de trazador en dos estaciones estimados a partir de datos de la figura 10.9.

Estación 1		Estación 2	
t, min	*C*, mg/L	*t*, min	*C*, mg/L
0	0	37	0
3	0.26	42	0.07
6	0.67	47	0.22
9	0.95	52	0.40
12	1.1	57	0.54
15	1.1	62	0.59
18	1.0	67	0.55
21	0.87	72	0.48
24	0.72	77	0.39
27	0.59	82	0.30
30	0.45	87	0.22
33	0.33	92	0.16
36	0.26	97	0.11
39	0.21	102	0.07
42	0.16	107	0.05
45	0.14	112	0.03
48	0.10	117	0.02
51	0.07	122	0.02
54	0.05	127	0.02
57	0.03	132	0.01
60	0.02	137	0.01
63	0	142	0

y $$\bar{t}_2 = 68.9 \text{ min}$$

Al sustituir estos datos en la ecuación (10.3.19) da

$$E = \frac{\bar{u}^2}{2}\left(\frac{\sigma_{t2}^2 - \sigma_{t1}^2}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}\right) = \frac{116^2}{2}\left(\frac{268 - 129}{68.9 - 17.8}\right)$$

$$= 18\,300 \text{ ft}^2/\text{min } (1700 \text{ m}^2/\text{min})$$

$$= 18\,300 \frac{\text{ft}^2}{\text{min}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 300 \text{ ft}^2/\text{s } (28 \text{ m}^2/\text{s})$$

El segundo método para estimar el valor de E en un tramo de un canal usa lo que se denomina en la literatura como *procedimiento de tránsito.* Esta metodología involucra correlacionar una distribución de concentración observada a una distancia x_2 aguas abajo el punto de inyección de trazador con una distribución predicha por un modelo que emplea una distribución de concen-

tración observada a una distancia x_1 aguas abajo del punto de inyección donde $x_1 < x_2$. De Fisher (1968b)

$$C(x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}C(x, \tau) \frac{\exp\{-[\bar{u}(\bar{t}_2 - \bar{t}_1 - t + \tau)]^2/4E(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)\}}{\sqrt{4\pi E(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}} d\tau \qquad (10.3.20)$$

donde $C(x_1, \tau) =$ concentración observada del trazador a una distancia x_1 aguas abajo del punto de inyección de trazador en el tiempo τ

$C(x_2, t) =$ concentración estimada del trazador a una distancia x_2 aguas abajo del punto de inyección de trazador en el tiempo t

$\tau =$ variable de integración de tiempo

Aunque la ecuación (10.3.20) indica que los límites de integración son $-\infty < \tau < \infty$, en la práctica la integración sólo necesita efectuarse en el intervalo $t(1) \leq \tau \leq t(2)$, donde $t(1)$ y $t(2)$ son los puntos inicial y final de la distribución de concentración a x_1 o

Para $\qquad \tau \leq t(1), C(x_1, \tau) = 0$

Para $\qquad \tau \geq t(2), C(x_1, \tau) = 0$

El empleo de la ecuación (10.3.20) para estimar E en un tramo del canal involucra los siguientes pasos:

1. Se estima un primer tanteo de E con la ecuación (10.3.19).
2. Se emplea el valor anterior con la ecuación (10.3.20) para estimar la distribución de concentración en x_2.
3. Las distribuciones de concentración predichas y observadas en la estación aguas abajo se comparan mediante el cálculo de la diferencia media cuadrada entre las dos curvas.
4. Se efectúa una búsqueda, por tanteo, para determinar si se tiene un valor de E que minimice las diferencias medias cuadradas entre las curvas de distribuciones de concentración observadas y las predichas en la estación de aguas abajo.

EJEMPLO 10.5

Con los datos del ejemplo 10.4 úsese la ecuación (10.3.20) para estimar el valor de E.

Solución

El método más efectivo para resolver este problema es desarrollar un programa de computadora que efectúe la integración indicada en la ecuación (10.3.20), para determinar $C(x_2, t)$ cuando se especifican los valores de t, $\overline{u}$, $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$, E, y una matriz de $C(x_1, \tau)$. Se dispone de los siguientes parámetros del ejemplo 10.4:

$$\overline{u} = 116 \text{ ft/min } (35 \text{ m/min})$$

$$\overline{t}_1 = 17.8 \text{ min}$$

$$\overline{t}_2 = 68.9 \text{ min}$$

El análisis de los datos de la tabla 10.4, presentado en el ejemplo 10.4, también da una estimación del valor correcto de E o

$$E = 18\,300 \text{ ft}^2\text{/min } (1700 \text{ m}^2\text{/min})$$

Si se emplean estos datos, se pueden estimar valores de $C(x_2, t)$ (tabla 10.6 y Fig. 10.10). Respecto a los datos resumidos en esta tabla y en la figura, debe notarse lo siguiente:

1. El pico estimado llega a la estación 2 después del medido; por lo que puede concluirse que el valor estimado de $\overline{u}$ es muy bajo. No se puede hacer ningún ajuste a este valor sin información adicional.

TABLA 10.6 Valores de $C(x_2, t)$ estimados por la ecuación (10.3.20) para $E = 18\,300$ ft²/min

Tiempo, min.	Valor medido de $C(x_2, t)$, mg/L	Valor estimado de $C(x_2, t)$, mg/L
37	0	0.097
42	0.07	0.19
47	0.22	0.31
52	0.40	0.46
56	0.50	0.57
60	0.58	0.65
62	0.59	0.67
64	0.59	0.68
68	0.54	0.68
75	0.44	0.57
84	0.27	0.37
94	0.14	0.18
104	0.06	0.072
114	0.03	0.023
124	0.025	0.0055
134	0.02	0.00088
144	0	0

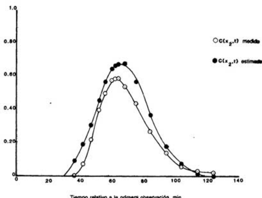


FIGURA 10.10 Valores medidos y estimados de $C(x_2, t)$ para $E = 19\,500$ ft^2/min.

2. Se debe buscar un coeficiente de dispersión que minimice el parámetro que mide la correlación; e.g.,

$$D = \frac{[\hat{C}(x_2, t) - C(x_2, t)]^2}{N}$$

donde $\hat{C}[x, t) =$ concentración estimada en la estación 2
$C(x_2, t) =$ concentración medida en la estación 2
$N =$ número de puntos considerados
Para $E =$ 18 300 ft^2/min (1700 m^2/min)

$$D = \frac{0.1088}{17} = 0.0064$$

Se deben considerar otros valores de tanteo para E, que sean mayores y menores a 18 300 ft^2/min (1700 m^2/min).

El tercer método para estimar E a partir de datos de campo se basa en la solución de la ecuación (10.2.18) para una entrada de pulso de trazador (Krenkel, 1960) o

$$C = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Et}} \exp - \frac{(x - ut)^2}{4Et} \qquad (10.3.21)$$

donde $M =$ peso del trazador y $A =$ área hidráulica. Si se reordena y se toma el logaritmo en ambos lados de la ecuación da

$$\log (C\sqrt{t}) = \log\left(\frac{M}{A\sqrt{4\pi E}}\right) - \frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Et}\log(e)$$

Entonces, una gráfica del log$(C\sqrt{t})$ contra $(x - \bar{u}t)^2/t$ teóricamente sería una recta cuya pendiente valdría log (e)/$4E$, a partir de la cual se puede estimar E. Aunque el uso de este método para estimar E sólo requiere una curva de concentración contra el tiempo a partir de una sola estación aguas abajo, t se mide a partir de la inyección de trazador. Por esta razón, los datos de campo para cualquiera de las estaciones de la tabla 10.4 no pueden emplearse para estimar E con esta técnica, ya que no se conoce el tiempo de inyección de trazador.

En este momento, es apropiado hacer algunas observaciones sobre los estudios de colorantes diseñados para la determinación del coeficiente de dispersión. Primero, se supone de manera tácita que el colorante inyectado se comporta dentro del flujo en forma exactamente igual a la del agua. Al seleccionar un colorante para un estudio de dispersión, se deben considerar las siguientes características: *1)* detectabilidad, *2)* toxicidad, *3)* solubilidad, *4)* estabilidad, y *5)* costo (Kilpatrick, *et. al.*, 1970). En general, se prefieren en estos estudios los colorantes fluorescentes (e.g., Kilpatrick, *et. al.*, 1970, y Wilson, 1968). La *fluorescencia* se refiere a la respuesta de una sustancia a una fuente de luz de una longitud de onda dada. La rhodamina BA y la rhodamina WT han sido muy eficaces en estos estudios. En general la rhodamina WT se prefiere, aunque cueste más que la rhodamina BA ya que la rhodamina BA se absorbe muy fácilmente por casi cualquier cosa que entra en contacto con las plantas acuáticas, las arcillas en suspensión, y las fronteras del canal. Nótese que el U.S. Geological Survey recomienda que: 1) puesto que la mayor parte de los colorantes tienen una afinidad a los plásticos (particularmente la rhodamina WT) se deben emplear botellas recolectoras de vidrio y, *2)* las concentraciones máximas de colorante en una toma de agua debe limitarse a 10 μg/L (0.010 ppm).

Segundo, varias ecuaciones empíricas pueden emplearse para estimar la cantidad del colorante requerido para producir una concentración pico dada en el lugar de muestreo disponible. La forma de esta ecuación es

$$V = \phi\left(\frac{Q_{\text{máx}}L}{\bar{u}}\right)^{\Gamma} C_p \tag{10.3.22}$$

donde V = volumen de colorante, L
$Q_{\text{máx}}$ = gasto máximo en el tramo, ft³/s
L = distancia entre el punto de inyección al de muestreo, millas
$\bar{u}$ = velocidad media del tramo, ft/s
C_p = concentración de pico deseada en el punto de muestreo, μg/L
ϕ y Γ = coeficientes empíricos

Por ejemplo, si se emplea rhodamina WT al 20%, se ha encontrado que

$$\phi = 3.4 \times 10^{-4} \tag{10.3.23}$$

y

$$\Gamma = 0.93 \tag{10.3.24}$$

Tercero, se necesitan por lo menos dos puntos de muestreo. El primer punto debe estar lo bastante lejos aguas abajo del punto de inyección de colorante, de tal forma que se produzca un mezclado completo lateral y vertical. El segundo punto de muestreo queda a una distancia conveniente, pero suficiente, aguas abajo del primero.

Cuarto, como lo notó Kilpatrick, *et. al.* (1970), el programa para recolección de muestras en un punto de muestro es el aspecto menos confiable de cualquier plan de estudios. A una distancia especificada aguas abajo del punto de inyección, el tiempo entre la inyección y la llegada de la concentración pico al punto de muestreo puede estimarse por

$$T_p = 1.47\frac{L}{\bar{u}} \tag{10.3.25}$$

Entonces, de la figura 10.11 se puede estimar la duración, en horas, del paso de la nube de colorante en ese punto. Esta figura también recomienda el intervalo de muestreo que debe emplearse en la estación aguas abajo. Si se supone que la nube colorante tiene forma simétrica, entonces la punta de la nube llegará a la estación en

$$T_e = T_p - 0.5T_D \tag{10.3.26}$$

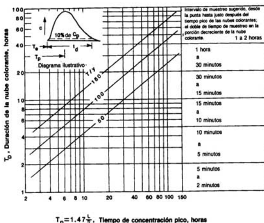


FIGURA 10.11 Duración de la nube colorante como función del tiempo recorrido a la concentración pico y la razón media del canal ancho-tirante. *(Kilpatrick et al., 1970.)*



FIGURA 10.12 Ejemplo 10.6.

donde T_e = tiempo esperado de llegada de la punta de la nube colorante en horas, después del tiempo de inyección.

EJEMPLO 10.6

Para la situación definida en la figura 10.12, estímese lo siguiente: *1*) el volumen de rhodamina WT 20% que se debe inyectar en la milla 0 para producir una concentración pico de 2 μg/L en la milla 30; *2*) la concentración pico que puede esperarse en la entrada de agua ubicada en la milla 12; y *3*) el tiempo en que debe empezar el muestreo en la milla 30, si la razón media ancho-tirante para este tramo es 100 y si es necesario que el intervalo de muestreo se utilice.

Solución

El volumen de rhodamina WT 20% que debe inyectarse en la milla 0 para producir una concentración pico de 2 μg/L en la milla 30 se estima al combinar la ecuación (10.3.22) a la ecuación (10.3.24) o

$$V = 3.4 \times 10^{-4} \left(\frac{Q_{\text{máx}} L}{\overline{u}} \right)^{0.93} C_p$$

El gasto pico para este tramo es de 400 ft³/s (11 m³/s), y de la figura 10.12 la velocidad media es de 0.4 ft/s (0.12 m/s). Entonces

$$V = 3.4 \times 10^{-4} \left[\frac{400(30)}{0.4} \right]^{0.93} (2) = 9.9 \text{ L}$$

La concentración pico de colorante en la toma de agua localizada a 12 millas aguas abajo del punto de inyección de colorante también puede estimarse a partir de las ecuaciones (10.3.24), donde la velocidad media es 0.4 ft/s (0.12 m/s), pero $Q_{\text{máx}}$ = 200 ft³/s (5.7 m³/s). Al reorde-

nar las ecuaciones desarrolladas en la página anterior se tiene

$$\frac{V}{C_p} = 3.4 \times 10^{-4}\left(\frac{Q_{máx}L}{\overline{u}}\right)^{0.93}$$

y

$$\frac{V}{C_p} = 3.4 \times 10^{-4}\left[\frac{200(12)}{0.4}\right]^{0.93} = 1.1$$

Si 9.9 L de colorantes se inyectan en la milla 0, la concentración esperada en el desvío de la toma será

$$C_p = \frac{9.9}{1.1} = 9.0\ \mu g/L$$

El tiempo en el cual debe iniciarse el muestreo 30 millas aguas abajo del punto de inyección se estima con las ecuaciones (10.3.25) y (10.3.26) y la figura 10.11. De la ecuación (10.3.25)

$$T_p = 1.47\frac{L}{\overline{u}} = 1.47\frac{30}{0.4} = 110\ \text{h}$$

De la figura 10.11, el tiempo requerido para que pase la nube del colorante por la estación de muestreo se estima, para una relación de ancho-tirante (T/y) de 100, como

$$T_D = 45\ \text{h}$$

Por ende, se estima con la ecuación (10.3.26) que la punta de la nube llegará a la estación de muestreo

$$T_e = T_p - 0.5T_D = 110 - 0.5(45) = 87\ \text{h}$$

después de la inyección de colorante aguas abajo.

Nota: en el mejor de los casos, ésta es una estimación muy burda del tiempo de llegada. De la figura 10.11, se estima que las muestras deben tomarse por lo menos a cada hora o con un intervalo menor, por ejemplo, cada 30 minutos.

Como se notó anteriormente, en el tramo del canal definido por $0 < x' < 0.4$, donde x' se define en la ecuación (10.3.13), la ecuación unidimensional para dispersión longitudinal [Ec. (10.3.13)] no es válida. En muchos casos esta limitación es crucial ya que puede ser el tramo de canal crítico desde el punto de vista de satisfacción de reglamentos sanitarios. Aunque se dispone de varias técnicas para el modelado del movimiento de una pluma trazadora en este tramo, consideraciones de espacio dictan que sólo dos de estos numerosos métodos se analicen aquí.

Fischer (1968a) desarrolló un modelo simple para la propagación de una pluma trazadora en este tramo crítico del canal. Este modelo tiene la ventaja

que sólo requiere que se especifiquen las velocidades en una sección transversal del tramo bajo consideración; pero también tiene la desventaja de necesitar un canal prismático y con flujo uniforme. Los pasos involucrados en la implementación de este modelo son:

1. Se divide la sección transversal en N subsecciones con áreas $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (Fig. 10.13).
2. La velocidad relativa o advectiva u_j de cada subsección del canal se determina con

$$u_j' = u_j - \overline{u} \tag{10.3.27}$$

   donde u_j = velocidad medida en la subsección j y $\overline{u}$ = velocidad media transversal. Al efectuar estos cálculos, se debe cuidar que se satisfaga la siguiente condición:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j' A_j = 0$$

3. El incremento de distancia longitudinal se define por

$$\Delta x = |u_j'(\text{máx})|\, \Delta t$$

   donde Δt = paso de tiempo seleccionado y u_j' (máx) = velocidad mayor advectiva sin importar su signo [Ec. (10.3.27)]. Por ende, la velocidad media en la subsección donde se presenta u_j' (máx) se mueve a una velocidad de un punto en la malla por incremento de tiempo.
4. Se define una malla bidimensional de concentración de trazador, $C^k(i, j)$, donde el índice i se refiere a la distancia longitudinal —en un sistema de coordenadas— que se desplaza con la velocidad media de la sección transversal, y el índice j se refiere a la ubicación transversal de la subsección en la sección transversal (Fig. 10.13). El superíndice k se refiere al incremento del tiempo presente.
5. El cálculo avanza en el tiempo por medio de dos cómputos. Primero, el trazador se advecciona y después se mezcla en la dirección transversal.

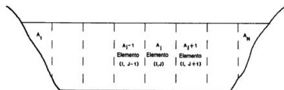


FIGURA 10.13 Definición de notación.

El movimiento advectivo del trazador en cada subsección aguas arriba o abajo se calcula con base en el valor de u'_j. Al efectuar los cálculos de advección, es conveniente convertir las velocidades advectivas a unidades de puntos de la malla por incremento de tiempo o

$$U_j = u'_j \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Esta operación da como resultado una matriz "borrador" $D(i, j)$, la cual contiene los valores temporales del cómputo de concentración de trazadores. La matriz $D(i, j)$ se define por

$$D(i, j) = \begin{cases} \text{si } U_j > 0\text{: } U_j[C^k(i-1, j) - C^k(i, j)] \\ \text{si } U_j < 0\text{: } U_j[C^k(i, j) - C^k(i+1, j)] \end{cases} \quad (10.3.28)$$

Las concentraciones de trazador, que se adveccionan una fracción de espacio de malla, se reparten entre los puntos de la malla involucrados en forma inversamente proporcional a la distancia de cada uno. Debe tomarse en cuenta que el empleo de la ecuación (10.3.28) introduce lo que se denomina *dispersión numérica*.

El mezclado transversal entre las subsecciones del canal se lleva a cabo con un segundo conjunto de cálculos. El cambio de la concentración en un punto de la malla (i, j) causado por mezclado transversal está dado por

$$\Delta C(i, j) = \frac{1}{A_j \Delta x}(\Delta M_{j,j+1} - \Delta M_{j-1,j})$$

donde la variable M designa el transporte de masa entre las subsecciones. M se calcula con la suposición de que el transporte de masa en el incremento de tiempo está dado por

$$\Delta M_{j,j+1} = h_j \epsilon_j \left(\frac{\Delta C_j}{s_j} \right) \Delta x \, \Delta t$$

donde h_j = área del plano divisorio de las subsecciones j y $j+1$ por unidad de longitud aguas abajo, s_j = distancia que separa los centroides de las subsecciones j y $j+1$, ΔC_j = diferencia de concentración entre las subsecciones j y $j+1$ o

$$\Delta C_j = C(i, j+1) - C(i, j)$$

y ϵ_j = coeficiente de difusión turbulento transversal dado por

$$\epsilon_j = 0.6 d_j u_*$$

6. Cuando se combinan las operaciones anteriores, la concentración del trazador en el punto de la malla (i, j) en un tiempo $k + 1$, es

$$C^{k+1}(i, j) = D(i, j) + \left\{ \frac{h_j \epsilon_j}{s_j} [D(i, j + 1) - D(i, j)] - \frac{h_{j-1}\epsilon_{j-1}}{s_{j-1}} [D(i, j) - D(i, j - 1)] \right\} \frac{\Delta t}{A_j} \quad (10.3.29)$$

Fischer (1968a) notó que el esquema numérico definido por la operación anterior es estable para todos los valores de j si

$$\frac{\epsilon_j \Delta t}{(s_j)^2} < 0.5$$

Las limitaciones obvias del método descrito arriba son que el canal debe ser prismático y el flujo uniforme. Harden y Shen (1979) desarrollaron un método que toma en cuenta las irregularidades en la sección transversal que involucra un alto grado de complejidad matemática que quizá no se justifique en muchas aplicaciones prácticas. Si el canal se define en términos de un sistema de coordenadas ortogonales curvilíneas orientado de tal forma que las superficies longitudinales queden alineadas en la dirección de los vectores medios de la velocidad local, entonces la ecuación de difusión advectiva bidimensional promediada en el tirante para flujo permanente es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u_x}{m_x}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{m_x m_y d}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_y}{m_x} d\epsilon_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{u_x}{m_x}\frac{\partial}{\partial q_c}\left(m_x d^2 u_x \epsilon_y \frac{\partial C}{\partial q_c}\right) \quad (10.3.30)$$

donde d = tirante local

u_x = velocidad media vertical en la dirección x

m_x y m_y = coeficientes métricos para el sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo en las direcciones x y y respectivamente

$$q_c = \text{gasto acumulado} = \int_0^y (m_y d u_x) dy$$

En la práctica, el término de la ecuación (10.3.30) que describe el mezclado longitudinal puede ignorarse, y la ecuación de régimen se convierte en

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u_x}{m_x}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{u_x}{m_x}\frac{\partial}{\partial q_c}\left(m_x d^2 \epsilon_y \frac{\partial C}{\partial q_c}\right) \quad (10.3.31)$$

La ecuación (10.3.31) puede resolverse con un esquema de diferencias finitas si se conocen los valores de q, u_x, y d. Harden y Shen (1979) notaron que en muchos casos se puede sintetizar la distribución de gastos por

$$\frac{q}{\overline{q}} = \Theta\left(\frac{d}{\overline{d}}\right)^{\Gamma} \tag{10.3.32}$$

donde q = gasto local por unidad de ancho
$\overline{q}$ = gasto medio por unidad de ancho
$\overline{d}$ = tirante medio
Θ y Γ = coeficientes empíricos

Para tramos de canal rectos con $50 \leq T/\overline{d} < 70$, $\Theta = 1$ y $\Gamma = 5/3$, y para $T/d \geq 70$, $\Theta = 0.92$ y $\Gamma = 7/4$. Para tramos con meandros, Θ varía entre 0.95 y 0.5, Γ varía entre 2.48 y 1,78, y $T/\overline{d}$ varía entre 50 y 100. Las ventajas del método de Harden y Shen (1979) son: predice la distribución del trazador aguas abajo en canales que no son prismáticos y también en el tramo donde no es válida la ecuación unidimensional de dispersión. La distribución de gastos requerida se puede sintetizar o medir. La desventaja obvia es que no es aplicable para un flujo no uniforme.

10.4 DISPERSIÓN NUMÉRICA

En las secciones anteriores del capítulo, los conceptos de difusión turbulenta y dispersión se han resumido desde el punto de vista de situaciones bastante idealizadas. En la mayor parte de los casos tratados, se disponía de soluciones analíticas; pero, en la práctica, las situaciones ideales donde se pueden aplicar soluciones analíticas son raras; en general, se requiere de una solución numérica de las ecuaciones de régimen. El uso de métodos de diferencias finitas o elemento finito para resolver los problemas de transporte de masa dan como resultado un transporte de masa ficticio que se le llama dispersión numérica, como se notó arriba. Aunque un tratamiento detallado de los métodos numéri-

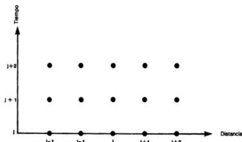


FIGURA 10.14 Malla unidimensional de diferencias finitas.

cos se encuentra fuera del alcance de este análisis, es necesario darles alguna consideración si se desea entender el problema de difusión numérica. En Forsythe y Wasow (1960) y Street (1973) se puede encontrar información adicional sobre los métodos de diferencias finitas.

En esquemas de diferencias finitas, la ecuación diferencial parcial que se resolverá se escribe en términos de una representación en diferencias finitas de cada derivada. Por ejemplo, considérese la ecuación de dispersión unidimensional promediada en el tiempo para un canal no prismático o

$$A\frac{\partial C}{\partial t} + Q\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial C}{\partial x}\right)$$

Una solución en forma de malla de esta ecuación se muestra en la figura 10.14. En esta ecuación, A, Q, y E son constantes en el tiempo pero variables en el espacio. Para el desarrollo de un esquema de diferencias finitas, es conveniente representar los valores de concentración de trazador en el nodo longitudinal i y en el nodo de tiempo j como $C_{i,j}$. En el tiempo $t = 0$ o $j = 1$, se especifican los valores de C para todos los i, y se requiere la determinación de $C_{i,j}$, en donde $j \neq 1$ para toda i. Al efectuar esto por diferencias finitas, surge la terminología de los esquemas explícitos e implícitos de diferencias. La frase *esquema de diferencias explícito* se refiere a un esquema de cómputo en el cual los valores de $C_{i,j}$, $j \neq 1$ se determinan a partir de la solución de ecuaciones explícitas; i.e., se expresan todas las derivadas en términos de valores conocidos, excepto la que describe la variación de C con el tiempo. En esquemas de diferencias explícitos se pueden emplear las siguientes expresiones:

1. *Operador diferencial hacia atrás*

$$\frac{\partial C}{\partial x} \simeq \frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{\Delta x}$$

2. *Operador diferencial hacia adelante*

$$\frac{\partial C}{\partial x} \simeq \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta x}$$

3. *Operador diferencial centrado*

$$\frac{\partial C}{\partial x} \simeq \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

La frase *esquema en diferencias implícito* se refiere a un esquema de cálculo en el que se determinan los valores de $C_{i,j}$ al resolver un sistema de ecuaciones simultáneas; i.e., las expresiones para las derivadas se escriben en térmi-

nos de valores desconocidos. Por ejemplo

$$\frac{\partial C}{\partial x} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1}}{2\Delta x} + \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)$$

Los esquemas de diferencias explícitos serían los preferidos gracias a su facilidad de cálculo, si no fuera porque son generalmente inestables desde un punto de vista numérico, a no ser que se emplease un incremento de tiempo muy pequeño. Los esquemas implícitos, aunque requieren de la solución de ecuaciones simultáneas, son estables desde un punto de vista numérico, por lo que se puede emplear un incremento de tiempo mucho mayor. La característica que produce la dispersión numérica en ambos esquemas es la concentración de masa que se presenta sólo en los nodos del sistema (Fig. 10.14). Por ende, si una masa se advecciona y dispersa en sólo una parte de la distancia entre dos nodos, parte de la masa se regresa numéricamente al punto de origen, y otra parte se advecciona numéricamente al siguiente nodo.

Como un ejemplo de la importancia de la dispersión numérica en un situación específica, considere el siguiente caso de advección pura o

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\,\overline{u}\,\frac{\partial C}{\partial x}$$

Sea 1 la concentración del trazador en el nodo (i, j), y cero en el resto de la malla. Si $\overline{u}\Delta t/\Delta x = 0.5$ y si se emplea un esquema de diferencias hacia atrás, se tiene

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} - \frac{\overline{u}\,\Delta t}{\Delta x}\,(C_{i,j} - C_{i-1,j})$$

$$= 1 - 0.5(1 - 0) = 0.5$$

y

$$C_{i+1,j+1} = C_{i+1,j} - \frac{\overline{u}\,\Delta t}{\Delta x}\,(C_{i+1,j} - C_{i,j})$$

$$= 0 - 0.5(0 - 1) = 0.5$$

Se tiene entonces, en este ejemplo, después de un incremento de tiempo, que la mitad de la concentración original de trazador se quedó en el nodo i y la mitad se desplazó al $i + 1$. En realidad, todo el trazador debe ubicarse entre los dos nodos. Al principio del cálculo la varianza de la distribución de concentración fue 0, mientras que al final la varianza de la distribución de concentración es

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})\epsilon\, dx = (-0.5\Delta x)^2 0.5 + (0.5\Delta x)^2 0.5 = 0.25(\Delta x)^2$$

Si se supone que el efecto del procedimiento numérico en la distribución del trazador es equivalente al de un proceso difusivo, entonces, según la ecuación (10.2.6)

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2E'$$

donde E' = coeficiente de dispersión numérica y

$$E' = \frac{0.25(\Delta x)^2}{2\Delta t} = \frac{0.125(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

Esto es entonces lo que se quiere decir con el término *dispersión numérica*.

Se han desarrollado varias metodologías para tratar el problema de la dispersión numérica. Primero, si la dispersión es pequeña comparada con la dispersión real, la dispersión puede ignorarse. Segundo, si E' puede estimarse en forma precisa, entonces el valor de E se puede ajustar hacia abajo para obtener un resultado físico correcto. Tercero, se pueden adoptar esquemas numéricos que minimizan la cantidad de dispersión numérica en una situación particular (*e.g.*, Thatcher y Harleman, 1972).

10.5 DIFUSIÓN TURBULENTA VERTICAL EN UN MEDIO CONTINUAMENTE ESTRATIFICADO

En la sección 10.3 se derivó una expresión teórica que se ha verificado en pruebas de laboratorio y de campo para el coeficiente de difusión turbulenta vertical. En un flujo estable, continuamente estratificado, la difusión vertical de la cantidad de movimiento y de masa se ve inhibida por la estratificación, por lo que la ecuación (10.3.4) no es válida. En este caso, la viscosidad turbulenta (esto es, el coeficiente de difusión turbulento de cantidad de movimiento) es mayor que el de difusión turbulenta (esto es, el coeficiente de difusión turbulenta) de calor y masa. En esta sección se tratará en forma breve el problema de la estimación de los valores de viscosidad turbulenta y difusividad en un flujo continuamente estratificado; pero, debe recalcarse que hasta ahora no existe una expresión que se considere universalmente válida para la viscosidad turbulenta o la difusividad.

Rossby y Montgomery (1935) propusieron una ecuación —que relacionaba la viscosidad turbulenta vertical para un flujo estratificado ϵ_z^s con el correspondiente valor de condiciones homogéneas, ϵ_z— que tiene la forma

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{RM} Ri)^{-1} \tag{10.5.1}$$

donde β_{RM} = coeficiente y Ri = número gradiente de Richardson, véase la ecuación (1.2.2). En el desarrollo de la ecuación (10.5.1) se supuso que el cambio de energía cinética por unidad de masa, al pasar de una condición neutral a una estratificada, era igual a la energía potencial causada por el desplazamiento sobre la longitud de mezclado desde una posición de equilibrio con una densidad diferente. Kent y Pritchard (1957) también emplearon el argumento de conservación de energía para desarrollar una ecuación o

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{KP} Ri)^{-2} \tag{10.5.2}$$

donde β_{KP} = es un coeficiente. Holzman (1943) supuso que existía un valor crítico del número gradiente de Richardson arriba del cual la turbulencia llevaría a cabo el mezclado; de esta suposición se obtuvo

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 - \beta_H Ri) \qquad (10.5.3)$$

donde β_H = un coeficiente. Mamayev [en un escrito anónimo (1974)] argumentó que la razón de ϵ_z' con ϵ_z debe disminuir exponencialmente con el aumento de Ri o

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = e^{-\beta_M Ri} \qquad (10.5.4)$$

donde β_M = un coeficiente. Munk y Anderson (1948) propusieron una forma generalizada de las ecuaciones Rossby y Montgomery (1935) y Holzman (1943) o

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{MA} Ri)^{\alpha_{MA}} \qquad (10.5.5)$$

donde β_{MA} y α_{MA} = coeficientes. La ecuación (10.5.4) puede considerarse como completamente empírica, con dos coeficientes libres. French (1979) propuso una segunda relación empírica de la forma

$$\epsilon_z^s = \beta_F \left(\frac{\epsilon_z}{1 + R_0} \right)^{\alpha_F} \qquad (10.5.6)$$

donde $\beta_F = \alpha_F$ = coeficientes y

$$R_0 = \frac{gD\,(\Delta\rho/\rho)}{u_*^2}$$

Finalmente, Odd y Rodger (1978) desarrollaron un modelo híbrido basado en las hipótesis originales de Rossby y Montgomery (1935) o

1. Si se presenta un pico significativo en el perfil vertical de Ri, a una distancia $z = z_0$ de la frontera del fondo, donde Θ = número gradiente pico de Richardson, entonces

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{OR}\Theta)^{-1} \quad \text{para } \Theta \leq 1$$

y

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{OR})^{-1} \quad \text{para } \Theta > 1 \qquad (10.5.7)$$

donde β_{OR} = un coeficiente.

OR

2. Si no se presenta un pico significativo en el perfil de Ri, entonces

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{OR} Ri)^{-1} \quad \text{para } Ri \leq 1$$

y

$$\frac{\epsilon_z^s}{\epsilon_z} = (1 + \beta_{OR})^{-1} \quad \text{para } Ri > 1 \tag{10.5.8}$$

Las ecuaciones (10.5.7) y)10.5.8) se aplican a través de la dimensión vertical, pero en la proximidad de las fronteras, si $\epsilon_z^s > \epsilon_z$, entonces se debe emplear ϵ_z.

El problema de todas las metodologías anteriores es que en general se puede demostrar que no son universalmente válidas. Los valores para algunos de los coeficientes usados en las ecuaciones anteriores se resumen en la tabla 10.7. Respecto a los datos resumidos en esta tabla, debe tomarse en cuenta lo siguiente:

1. Nelson (1972) empleó datos oceanográficos, atmosféricos, y de flujo en tuberías ya publicados para su análisis; lo mismo ocurrió en el análisis del Delft Hydraulics Laboratory (escrito anónimo, 1974). Por ende, estos investigadores no tenían ningún control sobre la calidad de sus datos.
2. Los datos empleados por French (1979) se tomaron en condiciones de laboratorio, pero el canal usado para estos experimentos tenía una razón ancho-tirante pequeña, además, este hecho puede influir negativamente en los resultados.
3. Odd y Rodger (1978) emplearon datos de campo de un tramo de canal afectado por mareas. Los datos de Odd y Rodger (1978) son quizá los mejores

TABLA 10.7 Resumen de los valores del coeficiente de difusión vertical turbulento de cantidad de movimiento en un flujo continuamente estratificado en un canal

Ecuación	β	α	Referencia
10.5.1	2.5	—	Nelson (1972)
	5.0	—	Referencia (1974)
	30.3	—	French y McCutcheon (1983)
10.5.2	9.8	—	French y McCutcheon (1983)
10.5.3	3.3	—	Nelson (1972)
10.5.4	0.4	—	Referencia (1974)
10.5.5	10	−0.5	Munk y Anderson (1948)
	30	−0.5	Referencia (1974)
10.5.6	0.31	0.747	French (1979)
	0.062	0.379	French y McCutcheon (1983)
10.5.7	140–180		Odd y Rodger (1978)

sobre la difusión vertical turbulenta de cantidad de movimiento, en condiciones estratificadas de los que se puede disponer.

4. Frech y McCutcheon (1983) emplearon el conjunto de datos de Odd y Rodger)1978) para su análisis. El valor del coeficiente determinado en este trabajo para las ecuaciones (10.5.7) y (10.5.8) difiere del de Odd y Rodger (1978) porque hay una definición diferente del criterio de ajuste de curva.

5. En el pasado, la ecuación (10.5.1) ha sido la más usada para la estimación de ϵ_z' (Nelson, 1972); aunque, los métodos de Odd y Rodger (1978) y de French y McCutcheon (1983) o French (1979), pueden ser superiores.

6. El Delft Hydraulics Laboratoy (escrito anónimo, 1974) concluyó que cuando $Ri < 0.7$, la dispersión de los datos disponibles era tan grande que no se podía seleccionar una ecuación de mejor ajuste.

Se han propuesto también varios modelos para la difusividad turbulenta en flujo estratificado. Uno de los más usados es

$$\frac{(\epsilon_z^s)^M}{\epsilon_z} = c(1 + \beta' Ri)^\alpha \tag{10.5.9}$$

donde $(\epsilon_z^s)^M$ = difusividad turbulenta vertical en flujo estratificado y c, β', y α = coeficientes. Munk y Anderson (1948) estimaron que $c = 1$, $\alpha = 1.5$, y $\beta' = 3.33$.

En este momento es apropiado notar que la estratificación aparentemente también reduce el valor del coeficiente de difusión transversal; aunque, los resultados disponibles actualmente en esta materia (Sumer, 1976), no son lo bastante exhaustivos para justificar su inclusión.

BIBLIOGRAFÍA

Anonymous, "Sacramento River Water Pollution Survey," Bulletin No. 111, State of California, Department of Water Resources, Sacramento, 1962.

Anonymous, "Momentum and Mass Transfer in Stratified Flows," Report No. R880, Delft Hydraulics Laboratory, Delft, the Netherlands, December 1974.

Benjamin, J. R., and Cornell, C. A., *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

Elder, J. W., "The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 5, 1959, pp. 544–560.

Engmann, E. O., "Turbulent Diffusion in Channels with a Surface Cover," *Journal of Hydraulic Research*, International Association for Hydraulic Research, vol. 15, no. 4, 1977, pp. 327–335.

Fischer, H. B., "The Mechanics of Dispersion in Natural Streams," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*. vol. 93, no. HY6, November 1967, pp. 187–216.

Fischer, H. B., "Methods for Predicting Dispersion Coefficients in Natural Streams with Application to Lower Reaches of the Green and Duwamish Rivers," Geological Survey Professional Paper 582-A, U.S. Geological Survey, Washington, 1968a.

Fischer, H. B., "Dispersion Predictions in Natural Streams," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Sanitary Engineering Division*, vol. 94, no. SA6, October 1968b, pp. 927–943.

Fischer, H. B., "The Effect of Bends on Dispersion in Streams," *Water Resources Research*, vol. 5, no. 2, 1969, pp. 496–506.

Fischer, H. B., et al., *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, 1979.

Forsythe, G. E., and Wasow, W. R., *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1960.

French, R. H., "Vertical Mixing in Stratified Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 105, no. HY9, September 1979, pp. 1087–1101.

French, R. H., and McCutcheon, S. C., "Vertical Momentum Transfer in Continuously Stratified Channel Flow," Water Resources Center, Desert Research Institute, Las Vegas, Nev., 1983.

Glover, R. E., "Dispersion of Dissolved or Suspended Materials in Flowing Streams," Geological Survey Professional Paper 433-B, U.S. Geological Survey, Washington, 1964.

Godfrey, R. G., and Frederick, B. J., "Dispersion in Natural Streams," Geological Survey Professional Paper 433-K, U.S. Geological Survey, Washington, 1970.

Harden, T. O., and Shen, H. T., "Numerical Simulation of Mixing in Natural Rivers," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 105, no. HY4, April 1979, pp. 393–408.

Holley, E. R., "Unified View of Diffusion and Dispersion," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 95, no. HY2, March 1969, pp. 621–631.

Holzman, B., "The Influence of Stability on Evaporation," *Boundary Layer Problems in the Atmosphere and Ocean*, W. G. Valentine (ed.), vol. XLIV, article 1, 1943, pp. 13–18.

Kent, R. E., and Pritchard, D. W., "A Test of Mixing Length Theories in a Coastal Plain Estuary," *Journal of Marine Research*, vol 1, 1957, pp. 456–466.

Kilpatrick, F. A., Martens, L. A., and Wilson, J. F., Jr., "Measurement of Time of Travel and Dispersion by Dye Tracing," *Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey*, chapter A9, book 3, U.S. Geological Survey, Washington, 1970.

Krenkel, P. A., "Turbulent Diffusion and the Kinetics of Oxygen Absorption," Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1960.

Krenkel, P. A., and Novotny, V., *Water Quality Management*, Academic Press, New York, 1980.

Lau, Y. L., and Krishnappen, B. G., "Transverse Dispersion in Rectangular Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 103, no. HY10, October, 1977, pp. 1173–1189.

Levenspiel, O., and Smith, W. K., "Notes on the Diffusion Type Model for the Longitudinal Mixing of Fluid in Flow," *Chemical Engineering Science*, vol. 6, 1957, pp. 227–233.

McQuivey, R. S., and Keefer, T., "Simple Method for Predicting Dispersion in Streams," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Environmental Engineering Division*, vol. 100, no. EE4, August, 1974, pp. 997–1011.

Munk, W. H., and Anderson, E. R., "Notes on the Theory of the Thermocline," *Journal of Marine Research*, vol. 1, 1948, p. 276.

Nelson, J. E., "Vertical Turbulent Mixing in Stratified Flow—A Comparison of Previous Experiments," Report No. WHM-3, Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, December 1972.

Odd, N. V. M., and Rodger, J. G., "Vertical Mixing in Stratified Tidal Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY3, March 1978, pp. 337–351.

Owens, M., Edwards, R. W., and Gibbs, J. W., "Some Reaeration Studies in Streams," *Air-Water Pollution Institute Journal*, vol. 8, 1964, pp. 469–486.

Rossby, C. G., and Montgomery, R. B., "The Layer of Friction Influence in Wind and Ocean Currents," *Papers in Physical Oceanography and Meteorology*, vol. 3, no. 3, 1935.

Schuster, J. C., "Canal Discharge Measurements with Radioisotopes," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY2, March 1965, pp. 101–124.

Street, R. L., *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1973.

Sumer, S. M., "Transverse Dispersion in Partially Stratified Tidal Flow," Report No. WHM-20, Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, May 1976.

Taylor, G. I., "Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly through a Tube," *Proceedings of the Royal Society of London*, series A, vol. 219, August 25, 1953, pp. 186–203.

Taylor, G. I., "The Dispersion of Matter in a Turbulent Flow through a Pipe," *Proceedings of the Royal Society of London*, series A, vol. 223, May 20, 1954, pp. 446–468.

Thatcher, M., and Harleman, D. R. F., "A Mathematical Model for the Prediction of Unsteady Salinity Intrusion in Estuaries," R. M. Parsons Laboratory Report No. 144, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1972.

Thomas, I. E., "Dispersion in Open Channel Flow," Ph.D. thesis, Northwestern University, Evanston, Ill., 1958.

Wilson, J. F., "Fluormetric Procedures for Dye Tracing," *Techniques of Water-*

Resources Investigations of the U.S. Geological Survey, chapter A12, book 3, U.S. Geological Survey, Washington, 1968.

Yotsukura, N., Fischer, H. B., and Sayre, W. W., "Measurements of Mixing Characteristics of the Missouri River between Sioux City, Iowa and Portsmouth, Nebraska," Water Supply Paper 1899-G, U.S. Geological Survey, Washington, 1970.

ONCE

Chorros turbulentos, superficiales ascendentes y fenómenos asociados

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo, se tratará el tema de chorros turbulentos, superficiales ascendentes en el flujo de canales abiertos. En la sección inicial del capítulo, se introducen, como técnicas de solución, los principios fundamentales del análisis de chorros, como: la escalación de las ecuaciones diferenciales parciales y las soluciones por similitud. Estas técnicas fundamentales de solución se demuestran con aplicaciones a problemas de chorros planos o de ranura y chorros simétricos sobre un eje que descargan en un ambiente sin fronteras. En las secciones subsecuentes, los temas tratados son: inclusión de agua receptora; longitud de la zona de establecimiento del flujo; y el comportamiento de un chorro ascendente, bidimensional en un flujo cruzado. Se desarrolla y trata un esquema numérico de solución al problema del chorro bidimensional junto con los limitados resultados de laboratorio y de campo para la estimación de coeficientes.

En la última sección del capítulo se discute el problema de una cuña unidimensional de enfriamiento hacia aguas arriba. *Nota:* este problema suele presentarse en forma conjunta al del chorro ascendente superficial. Nuevamente, se presentan resultados teóricos, de laboratorio y de campo pertinentes a la solución del problema.

11.1 INTRODUCCIÓN

Muchos contaminantes en forma diluida son inocuos y ubicuos. Por ende, cuando un contaminante se descarga a un volumen de agua, con frecuencia se requiere cumplir un requisito legal o administrativo sobre la rapidez de la dilución. Una de las técnicas disponibles para una dilución rápida es la del chorro turbulento, que inclusiona y mezcla grandes cantidades del agua receptora con la descarga de contaminante.

Por definición, un chorro simple es un campo de flujo generado por una fuente continua de cantidad de movimiento. Un fenómeno muy relacionado es el de la pluma o fumarola, aunque, ésta no tiene cantidad de movimiento inicial y generalmente se le considera como un fenómeno impulsado por la fuerza de flotación. A pesar de que los chorros turbulentos y las plumas pueden emplearse para aumentar la dilución en muchos ambientes diferentes, este capítulo sólo considerará a los chorros turbulentos que descargan en ambientes similares a los de los ríos y canales.

El comportamiento del chorro turbulento depende de: *1)* parámetros del chorro, *2)* parámetros ambientales, y *3)* parámetros geométricos. El término *parámetros del chorro* incluye variables como: la distribución de velocidades inicial y el nivel de turbulencia del chorro; la masa del chorro y el transporte de cantidad de movimiento, y la densidad del fluido del chorro. Los parámetros ambientales que se deben tomar en cuenta son las condiciones ambientales del agua receptora como: la densidad, la estratificación de densidades, el nivel de turbulencia y la presencia de gradientes de velocidad. Los paráme-

tros geométricos que se deben considerar incluyen: la presencia y cercanía de las fronteras, la orientación del chorro respecto a las fronteras y la posición del chorro en la dimensión vertical. En cualquier aplicación, quizá sea necesario considerar todos los factores anteriores. En este tratado se empezará por considerar los principios elementales de la mecánica de fluidos involucrados.

11.2 MECÁNICA BÁSICA DE LOS CHORROS TURBULENTOS

Los fenómenos de flujo turbulento que se han tratado en los capítulos anteriores de este libro concernían al movimiento de fluido en un medio encerrado por una o más fronteras. En estos casos, la turbulencia se le denomina *turbulencia de pared.* En el caso de un chorro elemental no se presentan esencialmente fronteras, así, la turbulencia se denomina *turbulencia libre.* En la figura 11.1 se define en forma esquemática un chorro, y respecto a esta figura se hacen las siguientes suposiciones:

1. El diámetro o ancho del chorro, $2b$, es pequeño en comparación con la distancia longitudinal x
2. El gradiente de velocidad en la dirección x se supone pequeño respecto al de la dirección y
3. Los esfuerzos intermoleculares se suponen pequeños en relación con los esfuerzos turbulentos o de Reynolds

Con estas suposiciones se puede demostrar (véase, por ejemplo, Schlichting, 1968) que las ecuaciones que rigen el flujo del chorro turbulento son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{11.2.1}$$

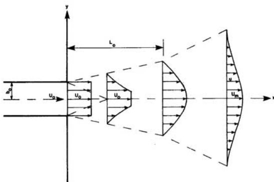


FIGURA 11.1 Esquema del chorro plano.

y
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{11.2.2}$$

donde $\tau = \eta\ \partial u/\partial y$ = esfuerzo cortante turbulento
η = viscosidad turbulenta
ρ = densidad del fluido
u = velocidad en la dirección x
v = velocidad en la dirección y

También en la figura 11.1, la distancia L_0 es la longitud de la zona de establecimiento del flujo o longitud del núcleo. Dentro de la distancia L_0, la velocidad u_0, al centro de la línea, permanece constante. Para distancias $x > L_0$, la velocidad central u_m es menor que U_0. Las líneas punteadas en la figura 11.1 definen las fronteras transversales nominales del chorro; i.e., estas líneas definen los puntos en los que la velocidad del chorro se hace arbitrariamente pequeña.

Supóngase ahora que el chorro es uno de rendija, con una altura de rendija $2b_0$. Al integrar la ecuación (11.2.1) con respecto a y se tiene

$$\underset{(1)}{\rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x}\, dy} + \underset{(2)}{\rho \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y}\, dy} = \underset{(3)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau}{\partial y}\, dy} \tag{11.2.3}$$

El término indicado como (1) en la ecuación (11.2.3) puede reordenarse para dar

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dy \tag{11.2.4}$$

Respecto al término indicado como (2) en la ecuación (11.2.3), al sustituir variables e integrar por partes se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = uv \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial v}{\partial y}\, dy \tag{11.2.5}$$

De la ecuación (11.2.2)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{11.2.6}$$

Al sustituir las ecuaciones (11.2.4) a (11.2.6) en la ecuación (11.2.3), se obtiene

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dy + \rho\, uv \Big|_{-\infty}^{\infty} = \tau \Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{11.2.7}$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (11.2.7) —que son consistentes con las suposiciones sobre el chorro simple— son

$$\text{As } y \to \pm\infty \begin{cases} u \to 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \to 0 \end{cases} \tag{11.2.8}$$

Con estas condiciones de frontera, los términos $\tau\,|_{-\infty}^{\infty}$ y $uv\,|_{-\infty}^{\infty}$ en la ecuación (11.2.7) se convierten en

$$\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{11.2.9}$$

y

$$uv \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{11.2.10}$$

Al sustituir las ecuaciones (11.2.9) y (11.2.10) en la ecuación (11.2.7) se tiene

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dy = 0$$

o

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dy = C = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho u) u\, dy \tag{11.2.11}$$

donde C = constante de integración. La cantidad $(\rho u)u dy$ en la ecuación (11.2.11) es el transporte o flujo total de cantidad de movimiento en cualquier sección longitudinal del chorro. La ecuación (11.2.11) asevera que el flujo de cantidad de movimiento es constante e independiente de la coordenada longitudinal x. Este resultado se deduce de la suposición tácita en la ecuación (11.2.1) de que la presión es constante; por lo que, la fuerza neta sobre el volumen de control que circunda el chorro es cero. La constante de integración puede evaluarse si se define el flujo de cantidad de movimiento inicial al sistema. En $x = 0$

$$\dot{M} = 2b_0 \rho U_0^2$$

donde M = flujo de cantidad de movimiento. De donde, ya que el flujo de cantidad de movimiento permanece constante, la ecuación (11.2.11) se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\rho u) u\, dy = 2b_0 \rho U_0^2 \tag{11.2.12}$$

Se puede obtener más información sobre el comportamiento de un chorro de rendija que descarga en un ambiente en reposo escalando las ecuaciones fundamentales (véase Cap. 1). Supóngase que el ancho efectivo b del chorro y la velocidad al centro de la línea del chorro en la región completamente desarrollada (esto es, $x > L_0$) pueden expresarse en términos de la distancia longitudinal o

$$b \sim x^{\theta} \tag{11.2.13}$$

y

$$u_m \sim x^{-\phi} \tag{11.2.14}$$

Dadas estas suposiciones, puede evaluarse el primer término de la ecuación (11.2.1), con base en el orden de magnitud

$$u\frac{\partial u}{\partial y} \sim o\left[\frac{u_m^2}{x}\right] \sim o\left[\frac{x^{-2\phi}}{x}\right] \sim o[x^{-2\phi-1}] \qquad (11.2.15)$$

donde o[ ] se refiere al concepto de orden de magnitud (Cap. 1). De la ecuación (11.2.2)

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \sim o\left[\frac{u_m b}{x}\right]$$

así, el segundo término de la ecuación (11.2.1) se convierte en

$$v\frac{\partial u}{\partial y} \sim o\left[\frac{u_m b}{x}\frac{u_m}{b}\right] \sim o\left[\frac{u_m^2}{x}\right] \sim o\,[x^{-2n-1}] \qquad (11.2.16)$$

Si se supone que

$$\frac{\tau}{\rho} \sim o[u_m]^2$$

el tercer término de la ecuación (11.2.1) es

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \sim o\left[\frac{u_m^2}{b}\right] \sim o[x^{-2\phi-\theta}] \qquad (11.2.17)$$

Entonces, en términos de la evaluación por órdenes de magnitud, la ecuación (11.2.1) es

$$o[x^{-2\phi-1}] + o[x^{-2\phi-1}] = o[x^{-2\phi-\theta}] \qquad (11.2.18)$$

Si cada uno de los términos de la ecuación (11.2.18) es igual de importante —y por ende tiene el mismo orden de magnitud— se tiene

$$-2\phi - 1 = 2\phi - \theta$$

y por tanto

$$\theta = 1 \qquad (11.2.19)$$

Desde el punto de vista de orden de magnitud, se tiene entonces

$$\int \rho u^2\,dy \sim \int \rho u_m^2\,dy \sim o[u_m^2 b] \sim o[x^{-2\phi+\theta}]$$

Si el flujo de cantidad de movimiento es independiente de la coordenada longitudinal, entonces

$$-2\phi + \theta = 0$$

Al sustituir $\theta = 1$ de la ecuación (11.2.19) se tiene

$$\phi = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \qquad (11.2.20)$$

Las suposiciones originales sobre u_m y b para un chorro de rendija pueden cuantificarse como

y
$$u_m \sim x^{-\phi} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{11.2.21}$$

$$b \sim x \tag{11.2.22}$$

Aunque el análisis anterior proporciona una descripción cualitativa del comportamiento del chorro, no proporciona las ecuaciones necesarias para describir, en forma cuantitativa, el tamaño del chorro, la distribución de velocidades, y la inclusión del fluido receptor por el chorro. Supóngase que la solución de las ecuaciones que rigen el comportamiento del chorro pertenece al tipo de ecuación diferencial conocida como *soluciones de similitud* (véase, por ejemplo, Schlichting, 1968), o

$$\frac{u}{u_m} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\omega)$$

donde u = velocidad del chorro en cualquier ubicación de y para un valor dado de x (Fig. 11.1) y $\omega = y/x$. Las ecuaciones (11.2.1) y (11.2.2) pueden resolverse si se supone que la existencia de soluciones por similitud puede determinar una forma funcional para u/u_m. Supóngase

$$\frac{u}{u_m} = f(\omega) = \exp\left(-\frac{y^2}{2C^2x^2}\right) \tag{11.2.23}$$

donde C = una constante que tiene que determinarse por experimentación.

Nota: Aunque la distribución de velocidad supuesta en la ecuación (11.2.23) es gaussiana, se pudo haber supuesto cualquier relación funcional para u/u_m; pero la validez de la solución depende de la validez de la distribución de velocidad supuesta.

Si se reordena la ecuacion (11.2.23) y si se sustituye la (11.2.12) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_m^2 f^2(\omega) \, dy = 2\rho U_0^2 b_0$$

La sustitución $dy = xd$ en esta ecuación produce

$$u_m^2 x I_2 = 2U_0^2 b_0 \tag{11.2.24}$$

donde $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\omega)\, d\omega$. Al reordenar la ecuación (11.2.24) da

$$\frac{u_m}{U_0} = \left(\frac{2b_0}{xI_2}\right)^{1/2} \tag{11.2.25}$$

La longitud de la zona del núcleo o zona de establecimiento de flujo puede determinarse ahora si se nota que, por definición, dentro de esta zona,

$$\frac{u_m}{U_0} = 1$$

De donde, de la ecuación (11.2.25)

$$L_0 = \frac{2b_0}{I_2} \tag{11.2.26}$$

Para $x > L_0$, el gasto por unidad de ancho del chorro puede estimarse al integrar la distribución local de velocidad o

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} uf(\omega)x\, d\omega$$

Al sustituir la ecuación (11.2.23) en la ecuación anterior e integrar, se obtiene

$$Q = U_0 x \left(\frac{2b_0}{xI_2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega = U_0 x \left(\frac{2b_0 I_1^2}{xI_2}\right) \tag{11.2.27}$$

donde $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega$. Por ende, la razón del gasto, a cualquier distancia longitudinal x respecto al gasto inicial, es

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{U_0[(2b_0 x I_1^2/xI_2)]}{2U_0 b_0} = \left(\frac{xI_1^2}{2b_0 I_2}\right)^{1/2} \tag{11.2.28}$$

Para el caso de un chorro que sale de un orificio circular a un fluido quieto e inclusiona el fluido receptor, las ecuaciones que rigen el movimiento del chorro son

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial (r\tau)}{\partial r} \tag{11.2.29}$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11.2.30}$$

donde r = coordenada direccional radial (Fig. 11.2)
z = coordenada direccional alineada con el eje del chorro
v_r y v_z = velocidades en las direcciones r y z, respectivamente

Las ecuaciones (11.2.29) y (11.2.30) son esencialmente las ecuaciones (11.2.1) y (11.2.2) transformadas a un sistema de coordenadas radiales. Se define también

$$\tau = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{11.2.31}$$

y
$$\frac{\eta}{\rho} = \ell^2 \frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{11.2.32}$$

donde ℓ = longitud de mezclado (véase el Cap. 1). Las condiciones de frontera son:

Conforme $r \to \infty$:
$$v_z = 0 \tag{11.2.33}$$

y

Conforme $r \to 0$:
$$v_r \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \tag{11.2.34}$$

Además, se supone que el chorro es de eje simétrico y puede describirse a cualquier distancia z mediante el diámetro local d del chorro y la velocidad de la línea central v_{zm}.

Como antes, supóngase

$$d \sim z^{\theta} \tag{11.2.35}$$

y
$$v_{zm} \sim z^{-\phi} \tag{11.2.36}$$

Un análisis de orden de magnitud similar al descrito para el chorro de rendija daría

$$\theta = 1$$

y
$$\phi = 1$$

Por ende, en el caso de un chorro de eje simétrico que sale de un orificio circular hacia un fluido quieto

$$d \sim z \tag{11.2.37}$$

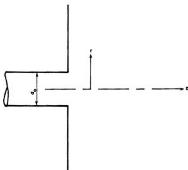


FIGURA 11.2 Definición del sistema de coordenadas para el chorro de eje simétrico.

y $$v_{zm} \sim \frac{1}{z} \tag{11.2.38}$$

Las condiciones implicadas por las ecuaciones (11.2.37) y (11.2.38) son: primero, que el número de Reynolds permanece constante a través del chorro; i.e.,

$$\mathbf{R} = \frac{vD}{\nu} = \frac{(1/z)z}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$

donde $\mathbf{R}$ = número de Reynolds y ν = viscosidad cinemática, y segundo, que la viscosidad turbulenta definida por la ecuación (11.2.32) permanece constante o

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = \ell^2 \frac{\partial v_z}{\partial r} = o\left[d^2 \frac{v_{zm}}{d}\right] = o[z^{m-n}] = o[z^0]$$

donde ϵ = viscosidad cinemática turbulenta.

Las ecuaciones (11.2.29) y (11.2.30) pueden resolverse, si se supone que la existencia de soluciones por similitud con una distribución de velocidades dada por

$$\frac{v_z}{v_{zm}} = \left(1 + \frac{v_{zm}r^2}{8\epsilon z}\right) \tag{11.2.39}$$

La distribución de velocidades definida por la ecuación (11.2.39) ha demostrado ser precisa cuando ϵ se estima por

$$\epsilon = 0.00196 z v_{zm} \tag{11.2.40}$$

Al sustituir la ecuación (11.2.40) en la ecuación (11.2.39) se obtiene

$$\frac{v_z}{v_{zm}} = \left(1 + \frac{r^2}{0.016z^2}\right)^{-2} \tag{11.2.41}$$

Así, la variación longitudinal de la velocidad en la línea central está dada por

$$\frac{v_{zm}}{U_0} = 6.4\frac{d_0}{z} \tag{11.2.42}$$

donde U_0 = velocidad inicial del chorro y d_0 = diámetro inicial del chorro. En este momento debe notarse que la distancia longitudinal z se mide a partir del origen geométrico de similitud, que se encuentra aproximadamente a $0.6d_0$ desde el origen real del chorro (Fig. 11.2, y Daily y Harleman, 1973). Para

$$z > 7d_0 \tag{11.2.43}$$

el chorro se considera completamente desarrollado. El flujo volumétrico a cualquier distancia z es

$$Q = \int v_z 2\pi r\, dr = \int v_{zm}\left(1 + \frac{r^2}{0.016z^2}\right)^{-2} 2\pi r\, dr \tag{11.2.44}$$

Al combinar las ecuaciones (11.2.40) y (11.2.42) se obtiene una expresión para la viscosidad turbulenta, en términos de la velocidad y diámetro iniciales o

$$\epsilon = 0.13\ U_0 d_0$$

Si se sustituye esta ecuación para ϵ en la ecuación (11.2.44) da

$$Q = 8\pi\epsilon z \tag{11.2.45}$$

La razón entre el gasto en cualquier distancia longitudinal z y el gasto inicial es

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.42\,\frac{z}{d_0} \tag{11.2.46}$$

Ahora se pueden considerar un número de resultados teóricos respecto a la inclusión de fluidos. Para el chorro plano o de rendija, Albertson, *et al.* (1950) demostraron que la distribución de velocidades especificada por la ecuación (11.2.23) se encuentra bien correlacionada con la distribución de velocidades para $C = 0.109$. Para este valor de C, $I_1 = 0.272$ e $I_2 = 0.192$, la ecuación (11.2.28) queda como

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.62\left(\frac{x}{2b_0}\right)^{1/2}$$

o

$$Q = \frac{0.62Q_0}{\sqrt{2b_0}}\sqrt{x} \tag{11.2.47}$$

El cambio del gasto volumétrico del chorro respecto a la distancia longitudinal es

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.62Q_0}{\sqrt{2b_0}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{0.31\sqrt{2b_0}}{\sqrt{x}}\,U_0 \tag{11.2.48}$$

Para $C = 0.109$ y $x > L_0$ se puede demostrar que

$$u_m = 2.28\ U_0\left(\frac{2b_0}{x}\right)^{1/2}$$

por lo que la ecuación (11.2.48) también puede escribirse como

$$\frac{dQ}{dx} = 0.136u_m \tag{11.2.49}$$

Por ende, para el chorro plano o de rendija el ritmo de crecimiento del flujo volumétrico en la distancia longitudinal es directamente proporcional a la velocidad de la línea central o inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia longitudinal.

Para el caso del chorro de eje simétrico

$$Q = 8\pi\epsilon z = 8\pi(0.00196)v_z z^2$$

o

$$= 0.315U_0 d_0 z$$

Por lo que, el ritmo de crecimiento del flujo volumétrico con la distancia longitudinal está dado por

$$\frac{dQ}{dz} = 0.315U_0 d_0 \tag{11.2.50}$$

Entonces, para el chorro de eje simétrico el ritmo de crecimiento del flujo volumétrico es constante.

La importancia del material anterior sobre chorros simples en ambientes idealizados es que el análisis de chorros reales en ambientes naturales se asemeja mucho al del análisis de los chorros simples.

11.3 CHORROS SUPERFICIALES ASCENDENTES

En los últimos treinta años, se han hecho numerosos estudios sobre chorros turbulentos que descargan a una variedad de ambientes casi naturales. Por ejemplo, Fan (1967), Abraham (1970), Cederwall y Brooks (1971), Stolzenbach y Harleman (1973), Stefan, *et al.* (1975), y Motz y Benedict (1971) han efectuado estudios analíticos y de laboratorio de las trayectorias y dilución de chorros ascendentes que descargan en ambientes con fluido en movimiento. Cederwall (1967), Abraham (1967) y Turner (1966) han examinado chorros descendentes que descargan en fluidos estancados y Anderson, *et al.* (1973) examinaron chorros descendentes que descargan a fluidos en movimiento. Algunas suposiciones básicas son comunes a todas estas investigaciones.

1. Los fluidos involucrados son incompresibles.
2. Los fluidos son completamente turbulentos y no existe ninguna dependencia del número de Reynolds. Además, la difusión molecular es despreciable, en comparación con la difusión turbulenta.
3. La difusión longitudinal es despreciable respecto a la difusión transversal o lateral.
4. Las variaciones en la densidad del fluido dentro del campo de flujo son tales que los efectos de densidad en los términos inerciales pueden ignorarse. Además, los términos que involucran la gravedad en las ecuaciones de régimen, deben incluir los efectos de densidad. Fan (1967) notó que si se supone una variación pequeña de densidad en el campo de flujo (también conocida como la suposición de Boussinesq) implica que el principio de conservación de transporte de masa puede aproximarse mediante el principio de conservación de transporte de volumen.
5. Los perfiles de velocidad, sustentación relativa y concentración de trazador son similares en secciones transversales consecutivas del chorro en la zona de establecimiento del flujo.

Además de las suposiciones anteriores, son cruciales cuatro conceptos y definiciones para el análisis y entendimiento de los chorros turbulentos. Primero, los chorros comúnmente se clasifican como ascendentes, lo cual indica que la densidad del fluido del chorro es menor que la del fluido al que descarga; si es descendente, la densidad del fluido del chorro es mayor que la del fluido al que descarga; o si es neutralmente sustentante, expresa que el fluido del chorro tiene la misma densidad que el fluido al que descarga. Adicionalmente, se pueden clasificar a los chorros por su punto geométrico de origen (p. ej., los chorros superficiales).

Segundo, los chorros de superficie pueden clasificarse como bi o tridimensionales. Un chorro bidimensional es aquél en el que sólo aumenta el ancho sobre la línea central del chorro, mientras que en uno tridimensional aumenta el ancho y la profundidad del chorro sobre la línea central. Como notó Motz y Benedict (1971) son dos fuerzas las principalmente responsables de la propagación del chorro en la dimensión vertical. La diferencia entre las velocidades axial del chorro y la del flujo receptor produce un cortante que origina la propagación vertical y lateral del chorro. Cuando las fuerzas de flotación dominan, se suprime la propagación vertical.

Tercero, Albertson, *et al.* (1950) han demostrado que la zona de establecimiento de flujo debe existir más allá de la sección de entrada del chorro. Con referencia a la figura 11.1., el fluido descargado desde una abertura en la frontera puede suponerse que tiene una distribución de velocidades bastante uniforme. Cuando el chorro entra a la corriente receptora, se tiene necesariamente una discontinuidad de velocidad entre el chorro y el fluido circundante. Esta discontinuidad de velocidad produce una región de cortante fuerte que, a su vez, causa mezclado lateral. Por esto, mientras el chorro se desacelera gradualmente, el fluido circundante se acelera e inclusiona al chorro. Por definición, el límite de la zona de establecimiento de flujo se alcanza cuando la región de mezclado penetra la línea central del chorro. Albertson, *et al.* (1950) reportaron que, para un chorro tridimensional sumergido que descarga a un ambiente estancado, el límite de la zona de establecimiento de flujo está dado por

$$\frac{L}{d_0} = 6.2 \tag{11.3.1}$$

donde L = distancia desde la abertura en la frontera al límite de la zona de establecimiento de flujo y d_0 = diámetro inicial del chorro. Para un chorro que descarga a un flujo cruzado, la variable L se remplaza por la variable S_e, definida en la figura 11.3. Fan (1967) desarrolló una gráfica de $S_e d_0$ contra U_0/U_a, empleando datos de otros investigadores, que define la zona de establecimiento de flujo para un chorro ascendente, donde U_a = velocidad del fluido receptor y —como antes— U_0 = velocidad inicial del chorro. Parker y Krenkel (1969) dieron la ecuación de la línea desarrollada por Fan como

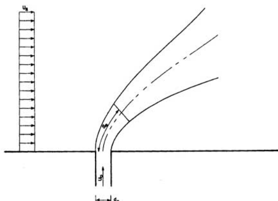


FIGURA 11.3 Definición esquemática de S_e

$$\frac{S_e}{d_0} = 6.2 \exp\left(-3.22 \frac{U_a}{U_0}\right) \tag{11.3.2}$$

Anderson, *et al.* (1973), efectuaron, aproximadamente en 1973, un ajuste por mínimos cuadrados de todos los datos que tenían a su disposición y concluyeron

$$\frac{S_e}{d_0} = 5.91 \exp\left(-2.57 \frac{U_a}{U_0}\right) \tag{11.3.3}$$

Las ecuaciones (11.3.2) y (11.3.3) son muy similares, así, cualquiera puede emplearse para estimar el valor de la variable S_e.

Cuarto, el concepto de inclusión es crucial para la mayoría de los análisis de chorros. Morton, *et al.* (1956), fueron probablemente los primeros investigadores en proponer una ecuación para explicar la dilución de un chorro por inclusión. Estos investigadores aseveraron que

$$\frac{dQ}{dx} = 2\pi\alpha ub \tag{11.3.4}$$

donde dQ/dx = ritmo de cambio del gasto volumétrico del chorro en la dirección del flujo del chorro

u = velocidad característica del chorro

b = longitud característica del chorro, que suele definirse mediante el ancho supuesto de la distribución de velocidades del chorro

α = coeficiente de inclusión

En su análisis, Morton, *et al.* (1956), concluyeron que α era una constante con un valor aproximado de 0.093. Morton (1961) concluyó subsecuentemente que la estructura de la turbulencia dentro de un chorro y el ritmo de inclusión en los bordes del chorro dependía sólo de la densidad media y de las diferencias de velocidad entre el eje del chorro y el fluido circundante. Fan (1967) usó este concepto en su análisis de un chorro redondo turbulento, que entra a un flujo cruzado y tomó como hipótesis

$$\frac{dQ}{dx} = 2\pi\alpha b \, |\Delta \mathbf{u}| \tag{11.3.5}$$

donde $|\Delta \mathbf{u}|$ magnitud de la diferencia de velocidad entre el chorro y el fluido receptor. El uso de negritas en el símbolo se introduce para indicar la naturaleza vectorial de las velocidades involucradas. Fan (1967) también supuso que α era constante. En una investigación subsecuente, Abraham (1965) concluyó que el coeficiente de inclusión α no era constante e introdujo un nuevo parámetro que relacionaba el ritmo al cual el cortante turbulento ejercía trabajo por unidad de tiempo, en una capa de ancho diferencial a algún nivel por gasto vertical. Fan y Brooks (1966), en un análisis de esta investigación, concluyeron que el ritmo de inclusión debe ser proporcional a la velocidad característica local y al radio del chorro. Por ende, Fan y Brooks (1966) también reconocieron que el coeficiente de inclusión no era constante, aunque posiblemente estaba en función de la flotación local del chorro.

Las plantas de generación de electricidad modernas requieren del uso de enormes cantidades de agua para el enfriamiento de condensadores. Si la planta generadora tiene una eficiencia global entre el 30 y el 49%, entonces el agua de enfriamiento para el condensador transportará —aproximadamente— el doble de la energía afuera de la planta, conforme ésta transmite hacia el exterior mediante las líneas de alto voltaje. Las plantas generadoras con sistemas abiertos de enfriamiento toman el agua de enfriamiento de ríos, lagos y océanos; usan el agua una vez; y la descargan, a una temperatura elevada, de regreso al ambiente. Por esto, no es poco común encontrar chorros ascendentes superficiales aguas abajo de las plantas construidas sobre ríos. En general, el análisis de estos chorros sigue la teoría semiempírica y clásica de chorros que divide al chorro en una región de establecimiento de flujo y en una región de flujo completamente establecida. Si se sigue esta metodología, se tendría un error en las predicciones de las temperaturas aguas abajo por las siguientes razones: *1*) las ecuaciones fundamentales del chorro sobre las que se basan los modelos involucran suposiciones erróneas (e.g., la similitud entre los perfiles de temperatura y la velocidad), *2*) los coeficientes empleados en las ecuaciones fundamentales se definen de una manera insuficiente y *3*) la correspondencia entre la situación idealizada de descarga para el desarrollo de sus modelos —que suele ser un tramo largo, recto de canal sin islas— y la situación real que se analiza es muy pobre. Aunque son severas las limitaciones de los modelos disponibles en este momento para la simulación de chorros flotantes superfi-

ciales, el problema es de tanta importancia que hasta las soluciones idealizadas son valiosas.

Zona de establecimiento de flujo

Se puede definir la región de salida, región de núcleo o zona de establecimiento de flujo de varias formas:

1. La zona de establecimiento de flujo termina donde la temperatura media en el tiempo sobre el eje del chorro alcanza un valor arbitrario relativo a la temperatura de salida. Stefan, *et al.* (1975), aseveraron que un nivel del 90% de la temperatura media en el tiempo, medida a lo largo de la trayectoria de la línea central, era una selección realista para la definición del fin de la zona de establecimiento de flujo.
2. Puede decidirse, en forma arbitraria, que la zona de establecimiento de flujo termina donde se presenten importantes cambios en el grado de intensidad de turbulencia en los perfiles de temperatura o velocidad sobre el eje del chorro.
3. En una gráfica en papel logarítmico de la temperatura superficial de la línea central del chorro contra la distancia axial, se puede extrapolar hacia atrás una línea desde la zona de flujo —completamente establecida al nivel de temperatura a la salida— para definir la zona de establecimiento de flujo. Stefan, *et al.* (1975), notaron que para el caso de chorros ascendentes superficiales, la implementación de esta metodología no era trivial, ya que los datos a menudo no se ajustaban a una línea recta.

Stefan, *et al.* (1975), mediante el uso de datos de laboratorio para un canal rectangular que descarga un chorro a un volumen profundo de agua, desarrollaron una ecuación empírica que relaciona la longitud de la zona de establecimiento de flujo con: la razón de temperatura excedente, la razón de aspecto del canal de descarga, la razón de la velocidad cruzada y con el número de Froude densimétrico de la descarga o

$$\frac{S_e}{y_o} = (16.0 - 12.8T)^{1.2} A^{(0.85-0.44T)} \exp(-0.9R) \left(1 + \frac{0.5\mathbf{F}_o - 1.5}{\exp(0.4\mathbf{F}_o)}\right) \quad (11.3.6)$$

En esta ecuación (véase la figura 11.4) y_0 = tirante en el canal rectangular de descarga, T = razón de temperatura excedente o

$$T = \frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \quad (11.3.7)$$

T_c = temperatura en la línea central del chorro, T_o = temperatura del fluido en el canal de salida, T_a = temperatura ambiente del agua receptora, $A = 2b'/y_o$ = razón de aspecto del canal, $R = U_a/U_0$ = razón de velocidad cruzada, U_0 = velocidad en el canal de salida, U_a = velocidad del agua receptora, $\mathbf{F}_0$ = número de Froude densimétrico.

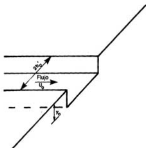


FIGURA 11.4 Definición de las variables en la descarga del chorro.

$$\mathbf{F}_o = \frac{U_o}{\sqrt{(\Delta\rho_o/\rho_o)gy_o}} \tag{11.3.8}$$

donde $\Delta\rho_o = \rho_a - \rho_o$
ρ_o = densidad del fluido en el canal de salida
ρ_a = densidad ambiente del agua receptora

Respecto a la ecuación (11.3.6), nótese que, primero, esta ecuación es completamente empírica, puesto que se basa en datos derivados en el laboratorio. Para los experimentos, de los cuales se derivó esta ecuación, se tiene

$$1 \leq A \leq 9.6$$
$$0 \leq R \leq 0.41$$
$$2.0 \leq \mathbf{F}_o \leq 15$$
$$0.8 \leq T \leq 0.98$$

Segundo, la aplicación de esta ecuación a un problema particular requiere una definición real del valor de la razón T de temperatura excedente. Stefan, *et al.* (1975), aseveraron que un valor de $T = 0.90$ era una selección razonable para establecer el final de la zona de establecimiento de flujo. Tercero, una comparación de las ecuaciones (11.3.2) y (11.3.3) con la ecuación (11.3.6) demuestra sólo una similitud; ésta es el uso de la razón de velocidad de cruce del flujo en forma exponencial. Aunque, desde un punto de vista cualitativo, la ecuación (11.3.6) incluye parámetros adimensionales comúnmente considerados como importantes en este tipo de problemas, no puede concluirse que esta ecuación sea más precisa que las ecuaciones (11.3.2) y (11.3.3).

Stefan, *et al.* (1975), también han deducido, a partir de datos de laboratorio, una ecuación empírica para la estimación del gasto dentro de la zona de establecimiento de flujo o

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 + \left[0.087\left(\frac{x}{2y_o}\right)^{(2.35+0.75A)/(0.90+A)}\right]\left(1 - \frac{0.52}{\mathbf{F}_o^{0.41}}\right) \tag{11.3.9}$$

donde Q = gasto en cualquier sección en la zona de establecimiento de flujo a una distancia x desde el canal de salida y Q_0 = gasto del canal de salida. La ecuación (11.3.9) se obtuvo a partir de datos de laboratorio con los siguientes rangos de parámetros:

$$1.8 \leq \mathbf{F}_o \leq \infty$$

$$1.0 \leq A \leq 9.6$$

Nuevamente, no se puede conocer la precisión de la ecuación (11.3.9) para una aplicación específica.

Es de interés teórico notar que la zona de establecimiento de flujo puede considerarse como si estuviera compuesta de tres subregiones:

1. Una región del canal que se caracteriza por una temperatura uniforme del agua y un perfil de velocidad completamente desarrollado.
2. Una región central que se localiza justo al final de la región del canal y que se caracteriza por temperaturas y velocidades constantes sobre la línea central del chorro.
3. Una región de transición turbulenta que se caracteriza por temperaturas y velocidades del fluido que fluctúan intermitentemente, con capas cortantes turbulentas que crecen desde los bordes externos del chorro. Estas capas cortantes turbulentas no se penetran unas a otras.

Más allá de la zona de establecimiento de flujo se encuentra la región del chorro completamente desarrollada, que se caracteriza por un campo de turbulencia completa. Dentro de esta región del chorro completamente desarrollado, se tiene una similitud entre las distribuciones de temperatura y velocidad en secciones transversales perpendiculares al eje del chorro.

Región del chorro completamente desarrollado

Si se puede suponer que, en la vecindad del punto de descarga, la pérdida de calor a la atmósfera desde el chorro caliente es despreciable, se tiene entonces, un tratamiento bastante simple de la mecánica del chorro. En muchos casos, la suposición de pérdida despreciable de calor a la atmósfera es razonable y apropiada. Por ejemplo, Motz y Benedict (1971), al emplear datos empíricos, demostraron que, a distancias adimensionales $x/d_0 = 40$ desde el punto de descarga, el decremento observado en las temperaturas de la línea central del chorro ocasionados por el mezclado lateral y el intercambio de calor superficial era —por lo menos— una orden de magnitud mayor que el decremento causado por el intercambio de calor superficial por sí solo.

El modelo desarrollado por Motz y Benedict (1971) para chorros ascendentes superficiales se basa en la integración de las ecuaciones diferenciales de régimen para la conservación de transporte de volumen, el transporte de cantidad de movimiento y la energía de calor sobre un chorro bidimensional de cantidad de movimiento. En este análisis se supuso que si

$$Ri = \frac{\Delta\rho g d'}{\rho(u_m - U_a)^2} > 1 \tag{11.3.10}$$

entonces era válida la suposición de un chorro bidimensional.

En la ecuación (11.3.10) $\Delta\rho$ = diferencia de densidad entre el chorro y el agua receptora ambiente
U_m = velocidad axial del chorro
U_a = velocidad del agua receptora
d' = profundidad del chorro
ρ = densidad del chorro

La suposición, especificada por la ecuación (11.3.10) e inherente en el análisis de Motz y Benedict (1971), es que las fuerzas de flotación son dominantes y que la propagación vertical del chorro es despreciable.

La integración de la ecuación de continuidad volumétrica sobre la sección transversal del chorro da una relación entre el ritmo de cambio del transporte de volumen sobre el eje del chorro, y la inclusión del fluido circundante o

$$\frac{d}{ds}\iint_A u\, dA = \int_c u_e\, dc \tag{11.3.11}$$

donde (véase la figura 11.5) u = componente de la velocidad del chorro sobre el eje s, s = una coordenada direccional que coincide con la línea central del chorro, dA = elemento diferencial de área, c = circunferencia a través de la que se produce la inclusión y u_e = velocidad de inclusión. Motz y Benedict (1971) supusieron que la velocidad de inclusión era proporcional a la magnitud de la diferencia entre una velocidad característica del chorro y la componente de la velocidad circundante que es paralela al eje s o

$$u_e = E\,(u_m - U_a \cos\beta) \tag{11.3.12}$$

donde u_m = velocidad en la línea central del chorro
β = ángulo entre el chorro y la velocidad del agua receptora
u_a = magnitud de la velocidad del agua receptora
E = coeficiente de inclusión determinado empíricamente

La sustitución de la ecuación (11.3.12) en la ecuación (11.3.11) da

$$\frac{d}{ds}\iint_A u\, dA = CE(u_m - U_a \cos\beta) \tag{11.3.13}$$

La ecuación de cantidad de movimiento sobre el eje del chorro también se puede integrar sobre la sección transversal para dar una relación entre el ritmo de cambio del transporte de cantidad de movimiento del chorro, el ritmo de inclusión de la cantidad de movimiento del fluido circundante y la fuerza ejercida por el gradiente de presión a través del chorro. El gradiente de presiones, que se debe a la separación del flujo circundante alrededor del chorro, se representa como una fuerza de arrastre. En este momento, es conveniente

resolver la ecuación vectorial de cantidad de movimiento mediante componentes alineadas con las direcciones de las coordenadas cartesianas (Figs. 11.5*a* y *b*).

En la dirección x, el ritmo de cambio del transporte de cantidad de movimiento es igual al ritmo de inclusión del transporte de cantidad de movimiento circundante y la componente en x del arrastre o

$$\frac{d}{ds}\left(\int\int_A u^2\,dA\cos\beta\right) = CE(u_m - U_a\cos\beta)U_a + F_D\sin\beta \quad (11.3.14)$$

FIGURA 11.5 *a)* Definición de la notación para un chorro ascendente bidimensional. *b)* Definición de la notación para un chorro ascendente bidimensional.

donde se hace la hipótesis que

$$F_D = \frac{C_D U_a^2 z_j \operatorname{sen}\beta}{2} \qquad (11.3.15)$$

C_D = coeficiente de arrastre determinado experimentalmente y z_j = profundidad del chorro.

Ya que el flujo circundante es paralelo al eje x, el ritmo de cambio del transporte de cantidad de movimiento en la dirección y es igual a la componente en y de la fuerza de arrastre o

$$\frac{d}{ds}\left(\int\int_A u^2\, dA \operatorname{sen}\beta\right) = -F_D \operatorname{sen}\beta \qquad (11.3.16)$$

Como el área superficial del chorro en el campo cercano es pequeña, el excedente de temperatura se supone conservativo o

$$\frac{d}{ds}\int\int_A u\phi\, dA = 0 \qquad (11.3.17)$$

donde $\phi = T_m - T_a$
T_m = temperatura en la línea central del chorro
T_a = temperatura ambiente del agua receptora

Las ecuaciones (11.3.13), (11.3.14), (11.3.16), y (11.3.17) son las ecuaciones integrales generales para el transporte de volumen, la cantidad de movimiento y la temperatura excedente sobre el eje s.

Si la técnica de Morton (1961) del análisis integral se aplicara a las ecuaciones de transporte deducidas en los párrafos anteriores, entonces se requiere hacer suposiciones sobre las distribuciones laterales de velocidad y temperaturas. Morton (1961) aseveró que, al suponer perfiles de velocidad similares para una solución integral del chorro, se suprimen los detalles de la estructura lateral del chorro. Bajo esta aseveración, se puede suponer que cualquier perfil de velocidad transversal tiene sólo un efecto insignificante en el resultado. En general, un perfil gaussiano para la distribución de velocidades y temperaturas es un compromiso razonable entre la simplicidad matemática y la precisión. Motz y Benedict (1971) también supusieron que la propagación lateral de calor y cantidad de movimiento ocurre al mismo ritmo, aunque se tienen datos que indican que el calor se propaga mucho más rápido que la cantidad de movimiento (véase, p. ej., Rouse, *et al.*, 1952).

Si la distribución transversal de velocidades del chorro se aproxima como un perfil gaussiana, entonces la velocidad en cualquier punto de la sección transversal del chorro está dada por

$$u = u_m \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (11.3.18)$$

donde u = velocidad del chorro
σ = desviación estándar
η = distancia sobre un eje perpendicular al eje s

Entonces

$$\int_{-b}^{b} u_m \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) z_j\, d\eta \simeq u_m z_j \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta \quad (11.3.19)$$

donde $dA = z_j d\eta$
z_j = profundidad del chorro, que por la suposición de bidimensionalidad, es constante
b = ancho medio del chorro

Al sustituir la ecuación (11.3.19) en la (11.3.13) se obtiene

$$\frac{d}{ds}(u_m z_j \sigma \sqrt{2\pi}) - 2zE(u_m - U_a \cos\beta) \quad (11.3.20)$$

donde en la ecuación (11.3.19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta = \sigma\sqrt{2\pi}$$

y $C = 2z_j$ = circunferencia a través de la que se produce la inclusión.

Si

$$b = \sigma\sqrt{2} \quad (11.3.21)$$

entonces la ecuación (11.3.20) se convierte en

$$\frac{d}{ds}(u_m b) = \frac{2E}{\sqrt{\pi}}(u_m - U_a \cos\beta) \quad (11.3.22)$$

donde se ha supuesto que $z_j \neq f(s)$, lo cual también se debe a la suposición de bidimensionalidad.

De la ecuación (11.3.18) suponga además que

$$u^2 = u_m^2\left[\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2 \quad (11.3.23)$$

Si se sustituyen esta relación y las ecuaciones (11.3.21) y (11.3.15) en la ecuación (11.3.14), da

$$\frac{d}{ds}(u_m^2 b \cos\beta) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} E(u_m - U_a\cos\beta)\, U_a + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} C_D U_a^2 \operatorname{sen}^2\beta \quad (11.3.24)$$

En forma similar, la ecuación (11.3.16) se convierte en

$$\frac{d}{ds}(u_m^2 b \operatorname{sen}\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} C_D U_a \operatorname{sen}\beta\cos\beta \quad (11.3.25)$$

Si la distribución transversal de temperaturas también se aproxima con una distribución gaussiana o

$$\phi = \phi \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\alpha^2}\right)$$

entonces, la ecuación (11.3.17) se convierte en

$$\frac{d}{ds}(u_m b\phi) = 0 \tag{11.3.26}$$

Además de las ecuaciones (11.3.22) y (11.3.24) a (11.3.26), la geometría del sistema de coordenadas empleado, proporciona dos ecuaciones adicionales o

$$\frac{dx}{ds} = \cos\beta \tag{11.3.27}$$

y

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\beta \tag{11.3.28}$$

De aquí, el comportamiento de un chorro ascendente superficial bidimensional se describe con seis ecuaciones diferenciales ordinarias; i.e., las ecuaciones (11.3.22) y (11.3.24) a (11.3.28), con seis incógnitas, a saber: u_m, ϕ, b, β, x, y y. En este momento, es muy conveniente transformar las ecuaciones de régimen a un formato adimensional. Por ejemplo defínase

$$M = \frac{u_m^2 b}{U_0^2 b_0} \tag{11.3.29}$$

donde M = transporte de cantidad de movimiento adimensional
b_0 = ancho medio del chorro al final de la zona de establecimiento de flujo
U_0 = velocidad del chorro al final de la zona de establecimiento de flujo

$$V = \frac{u_m b}{U_0 b_0} \tag{11.3.30}$$

donde V = transporte adimensional de volumen.

$$X = \frac{2E_x}{b_0\sqrt{\pi}} \tag{11.3.31}$$

$$Y = \frac{2E_y}{b_0\sqrt{\pi}} \tag{11.3.32}$$

$$C_D' = \frac{C_D}{4E} \tag{11.3.33}$$

y

$$S = \frac{2Es}{b_0\sqrt{\pi}} \tag{11.3.34}$$

Al sustituir estas variables adimensionales en las ecuaciones de régimen, se obtiene

Continuidad

$$\frac{dV}{dS} = \frac{U_a}{U_0} \cos \beta \tag{11.3.35}$$

Transporte de cantidad de movimiento, componente x

$$\frac{d(M \cos \beta)}{dS} = \frac{U_a\sqrt{2}}{U_0} \left[\frac{M}{V} - \frac{U_a}{U_0} \cos \beta + \frac{U_a C_b'}{U_0} \operatorname{sen}^2 \beta \right] \tag{11.3.36}$$

Transporte de cantidad de movimiento, componente y

$$\frac{d(M \operatorname{sen} \beta)}{dS} = -\frac{U_a}{U_0} \sqrt{2} \left(\frac{U_a}{U_0} C_b' \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) \tag{11.3.37}$$

Ecuaciones geométricas del chorro

$$\frac{dX}{dS} = \cos \beta \tag{11.3.38}$$

$$\frac{dY}{dS} = \operatorname{sen} \beta \tag{11.3.39}$$

Temperatura excedente

$$\frac{u_m \phi b}{U_0 \phi_0 b_0} = 1 \tag{11.3.40}$$

donde $\phi = T_0 - T_a$ y T_0 = temperatura en la línea central del chorro al final de la zona de establecimiento de flujo.

De esta forma, el problema del chorro ascendente bidimensional se ha reducido al de seis ecuaciones diferenciales ordinarias adimensionales, con seis variables adimensionales. Si este conjunto de ecuaciones se resuelve para M y V, entonces la razón de velocidades u_m/U_0, la razón de temperatura ϕ/ϕ_0 y la razón de ancho medio del chorro b/b_0 pueden determinarse. Motz y Benedict (1971) desarrollaron un programa de computadora para llevar a cabo esta solución; un listado de este programa se encuentra en su informe.

El coeficiente de inclusión E, que aparece en las ecuaciones anteriores, debe estimarse a partir de datos de laboratorio y datos empíricos. Los datos empíricos y de laboratorio analizados por Motz y Benedict (1971) se resumen en la tabla 11.1. Respecto a los datos de laboratorio, Motz y Benedict demostraron que E era primordialmente una función de β_0' y además que para $\beta_0' = 90°$, $E = 0.4$, y para $\beta_0' = 60$ o $45°$, $E = 0.2$. Para valores comparables de β_0', los

limitados datos empíricos que son disponibles sugieren que E es menor. Motz y Benedict atribuyen esta diferencia —entre los resultados de laboratorio y los empíricos— al hecho de que en los experimentos de laboratorio la razón del ancho del flujo receptor respecto al de la descarga del chorro era 24. En Widows Creek esta razón era de 7.5, y en New Johnsville era de 3,5. Recuérdese que cuando se dedujeron las ecuaciones de régimen, se supuso tácitamente que ninguna frontera afectaría el campo de flujo, y en la mayor parte de las situaciones empíricas esta suposición no es válida. Además, las ecuaciones de régimen se obtuvieron al suponer un campo de velocidades uniforme en el agua receptora; esta situación no suele satisfacerse en situaciones empíricas. Por tanto, para estas situaciones se ha encontrado que E es función de β_0' y de la razón entre el ancho del flujo receptor y el del chorro.

Para este análisis, el segundo parámetro que debe determinarse a partir de datos empíricos y de laboratorio es el coeficiente de arrastre. Motz y Benedict (1971) afirmaron que C_0 era una función de la razón de velocidad U_a/U_0 y posiblemente de β_0'. Los resultados de laboratorio de estas investigaciones se resumen en la tabla 11.2 y los resultados de las observaciones empíricas están en la figura 11.6. Los datos disponibles sobre C_D deben estimarse con extrema cautela.

TABLA 11.1 Resumen de los datos empíricos y de laboratorio para *E (Motz y Benedict, 1971.)*

Fuente	U_a/U_0	β_0'	β_0	S_e/b_0	E
Motz-Benedict Lab	0.73	90.0	34.5	0.9	0.46
Motz-Benedict Lab	0.44	90.0	47.5	1.4	0.39
Motz-Benedict Lab	0.30	90.0	50.0	1.3	0.31
Motz-Benedict Lab	0.23	90.0	62.0	1.7	0.47
Motz-Benedict Lab	0.20	90.0	71.5	1.9	0.44
Motz-Benedict Lab	0.67	60.0	13.5	0.7	0.24
Motz-Benedict Lab	0.44	60.0	36.5	1.3	0.13
Motz-Benedict Lab	0.30	60.0	40.0	1.5	0.19
Motz-Benedict Lab	0.23	60.0	41.0	2.0	0.25
Motz-Benedict Lab	0.19	60.0	45.0	2.3	0.29
Motz-Benedict Lab	0.66	45.0	25.0	0.7	0.19
Motz-Benedict Lab	0.42	45.0	23.0	1.2	0.13
Motz-Benedict Lab	0.30	45.0	26.5	1.7	0.21
Motz-Benedict Lab	0.23	45.0	33.5	2.1	0.27
Motz-Benedict Lab	0.18	45.0	35.0	2.3	0.22
Motz-Benedict Widows Creek 1	0.50	85.0	—	—	0.16
Motz-Benedict Widows Creek 2	0.67	85.0	—	—	0.16
Motz-Benedict Widows Creek 3	0.57	60.0	—	—	0.16
Motz-Benedict New Johnsonville	0.57	60.0	—	—	0.04

El enfoque de Motz y Benedict (1971) tiene la ventaja distintiva de ser relativamente simple y de arrojar resultados que son más o menos precisos. Se dispone de varios modelos más complejos [e.g., Stolzenbach y Harleman (1973) y Stefan y Vaidyaraman (1972)] que toman en cuenta la naturaleza tridimensional de la generalidad de los chorros y de la pérdida de calor de la superficie del agua a la atmósfera. Sin embargo, estos modelos no toman en cuenta las geometrías complejas de canales y las distribuciones no uniformes de velocidad del agua receptora. Por ende, en muchos casos, los modelos más simples presentados aquí pueden ser tan efectivos en la producción de resultados útiles como los modelos más complejos.

11.4 CUÑA DE ENFRIAMIENTO AGUAS ARRIBA

El remanso de la cuña de enfriamiento es un fenómeno asociado de manera muy estrecha con el chorro caliente superficial ascendente, el cual se trató en las secciones anteriores de este capítulo. Cuando se descarga el agua de enfriamiento de una planta generadora de electricidad a una agua receptora en un canal que tiene una corriente superficial débil, se puede formar, aguas arriba del punto de descarga, una capa fija superficial de densidad más baja. En algunos casos, esta cuña de agua tibia puede extenderse más allá de la toma de agua de enfriamiento (Fig. 11.7). En este último caso, se producirá una recirculación del agua de enfriamiento, por lo que la capacidad de generación máxima de la planta se reducirá. La cantidad de recirculación depende de lo siguiente:

TABLA 11.2 Resumen parcial de los datos de laboratorio de Motz y Benedict para el coeficiente de arrastre C_D

u_a/U_0	β_0'	β_0	C_D
0.73	90.0	34.5	0.7
0.44	90.0	47.5	1.6
0.30	90.0	50.0	3.5
0.23	90.0	62.0	3.8
0.20	90.0	71.5	3.5
0.67	60.0	13.5	0.1
0.44	60.0	36.5	0.8
0.30	60.0	40.0	2.3
0.23	60.0	41.0	2.7
0.19	60.0	45.0	3.9
0.66	45.0	25.0	1.1
0.42	45.0	23.0	0.5
0.30	45.0	26.5	0.8
0.23	45.0	33.5	1.1
0.18	45.0	35.0	1.7

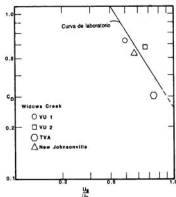


FIGURA 11.6 C_D en función de u_a/u_0. *(Motz y Benedict, 1971.)*

1. La geometría de la toma
2. El diseño de la descarga
3. La distancia entre la toma y la descarga
4. El gasto y el tirante medio del flujo receptor en el canal
5. La cantidad relativa de desvío de agua de enfriamiento
6. El grado de calentamiento del agua desviada para enfriamiento

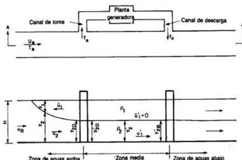


FIGURA 11.7 Esquema de la cuña de enfriamiento fija aguas arriba. *(Harleman, 1969.)*

La complejidad del problema de recirculación dicta la separación de los diversos factores en grupos, pudiéndose estudiar sus efectos en forma separada, y después en forma compuesta, para obtener una solución completa. En este tratado, el objetivo principal es determinar la forma de la cuña de enfriamiento.

El flujo en un canal que pasa por una planta de generación térmica (Fig. 11.7) puede dividirse convenientemente en tres zonas: *1)* aguas arriba de la toma, *2)* entre la toma y la descarga, y *3)* aguas abajo de la descarga. Antes de desarrollar las ecuaciones de régimen de cada una de estas zonas, se deben desarrollar un número de ecuaciones fundamentales.

Respecto a la figura 11.8, las ecuaciones unidimensionales de movimiento para un flujo permanente no uniforme, de un sistema de dos estratos son

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{\bar{u}_1}{g}\frac{d\bar{u}_1}{dx} + S_{1e} - S_0 = 0 \qquad (11.4.1)$$

y

$$\left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{\bar{u}_2}{g}\frac{d\bar{u}_2}{dx} + S_{2e} - S_0 = 0 \qquad (11.4.2)$$

donde y_1 y y_2 = tirantes de las capas superior e inferior, respectivamente
$\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ = velocidades medias de las capas superior e inferior, respectivamente
ρ y $\rho + \Delta\rho$ = densidades de las capas superior e inferior, respectivamente
S_0 = pendiente de fondo del canal
S_{1e} y S_{2e} = pendientes de las líneas de energía para las capas superior e inferior, respectivamente

S_{1e} y S_{2e} se definen como sigue:

$$S_{1e} = \frac{\tau_i}{\rho g y_1} \qquad (11.4.3)$$

y

$$S_{2e} = \frac{\tau_0 - \tau_i}{\rho g y_2} \qquad (11.4.4)$$

donde τ_i = esfuerzo cortante en la interfase de las capas superior e inferior

$$\tau_i = f_i|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \qquad (11.4.5)$$

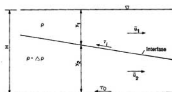


FIGURA 11.8 Definición de las variables para un flujo de dos estratos. *(Harleman, 1969.)*

τ_0 = esfuerzo cortante de la frontera de fondo o

$$\tau_0 = f\frac{\rho}{8}\,|\overline{u}_2|\overline{u}_2 \tag{11.4.6}$$

f_i = factor de fricción en la interfase de las capas superior e inferior y f = factor de fricción de la frontera de fondo. Las ecuaciones de continuidad para las capas superior e inferior son

$$\overline{u}_1\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d\overline{u}_1}{dx} = 0 \tag{11.4.7}$$

y

$$\overline{u}_2\frac{dy_2}{dx} + y_2\frac{d\overline{u}_2}{dx} = 0 \tag{11.4.8}$$

Las ecuaciones anteriores para el flujo permanente no uniforme de un sistema de dos capas están sujetas a las siguientes condiciones:

1. Se han despreciado las aceleraciones verticales de los fluidos.
2. Sólo se toman las velocidades medias de las capas.
3. El número estándar de Froude basado en el tirante total y la velocidad media de todo el flujo es pequeño.

La última suposición implica que los cambios del tirante total son pequeños en relación con los cambios en la altura de la interfase de densidad o

$$H = y_1 + y_2 = \text{constante}$$

Las ecuaciones de movimiento y continuidad para la dos capas pueden combinarse en una sola ecuación diferencial para obtener la pendiente de la interfase de densidad (Harleman, 1961) o

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{(\tau_0 - \tau_i/\rho g y_2) - (\tau_i/\rho g y_1)}{(\Delta\rho/\rho)(\mathbf{F}_2^2 + \mathbf{F}_1^2 - 1)} \tag{11.4.9}$$

donde

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{g y_1(\Delta\rho/\rho)}}$$

y

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\overline{u}_2}{\sqrt{g y_2(\Delta\rho/\rho)}}$$

Si las expresiones para τ_0 y τ_i [ecuaciones (11.4.5) y (11.4.6)] se sustituyen en la ecuación (11.4.9), el resultado es

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{(f/8gy_2)|\overline{u}_2|\overline{u}_2 - (f_i/8gy_2)[H/(H - y_2)]|\overline{u}_1 - \overline{u}_2|(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)}{(\Delta\rho/\rho)(\mathbf{F}_2^2 + \mathbf{F}_1^2 - 1)} \tag{11.4.10}$$

Canal de descarga

La figura 11.9 es un corte transversal del canal receptor, puesto de tal forma que coincida con la línea central del canal de descarga. El gasto del canal de descarga Q_0 y la temperatura de las descargas T_0 están determinadas por el diseño de la planta térmica, y por ende se conocen estas variables. Si se desea minimizar el mezclado entre el agua caliente del canal de descarga y la fría en el canal receptor, debe permitirse la entrada de una lengua del canal receptor hacia el canal de descarga (Fig. 11.9). Si se presenta este caso y el flujo es permanente, entonces la velocidad media en la lengua intrusiva tendría que ser cero. Así pues, la interface que separa las dos capas actúa como una frontera móvil que no permite el desarrollo de altos gradientes de velocidad, los cuales producirían mezclado.

Para la situación descrita en el párrafo anterior, $\overline{u}_{2B} = 0$; por $\mathbf{F}_{2B} = 0$. Dentro del canal de descarga, $H = y_0$; para el canal de descarga la ecuación (11.4.10) se convierte en

$$\frac{dy_{2B}}{dx} = \frac{-(f_i/8gy_{2B})\,[y_o/(y_o - y_{2B})]\,\overline{u}_{1B}^2}{(\Delta\rho/\rho)(\mathbf{F}_{1B}^2 - 1)} \qquad (11.4.11)$$

donde en este caso la coordenada longitudinal x se mide en la dirección del flujo en la capa superior. El desarrollo de la lengua intrusiva de agua receptora hacia el canal de descarga requiere que

$$\frac{dy_{2B}}{dx} > 0$$

y por tanto, ya que el numerador de la ecuación (11.4.11) es siempre negativo, el denominador también debe ser negativo o

$$\mathbf{F}_{1B} < 1 \qquad (11.4.12)$$

Si el canal de descarga tiene un ancho constante b_0, entonces la ecuación de continuidad en la capa superior es

$$\overline{u}_o y_o = \overline{u}_{1B} y_{1B} \qquad (11.4.13)$$

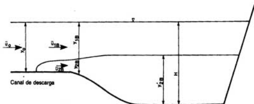


FIGURA 11.9 Sección transversal sobre la línea central del canal de descarga *(Harleman, 1969.)*

El número de Froude densimétrico local para la capa superior es

$$\mathbf{F}_{1B} = \frac{\overline{u}_{1B}}{\sqrt{g(\Delta\rho/\rho)y_{1B}}} \tag{11.4.14}$$

Nótese que $\mathbf{F}_{1B}$ varía como una función de x. Entonces, si se emplea la geometría definida en la figura 11.9 y la ecuación (11.4.13),

$$\mathbf{F}_{1B} = \mathbf{F}_o\left(\frac{y_o}{y_o - y_{2B}}\right)^{3/2} \tag{11.4.15}$$

donde

$$\mathbf{F}_o = \frac{\overline{u}_o}{\sqrt{g(\Delta\rho/\rho)y_o}} \tag{11.4.16}$$

Puesto que $\mathbf{F}_{1B}$ debe ser menor que 1, se tiene que $\mathbf{F}_o$ también debe ser menor que 1 [ecuación (11.4.16)]. Por ende, si se desea minimizar el mezclado en el canal de descarga, entonces debe satisfacerse la condición de diseño (es decir $\mathbf{F}_o < 1$).

En el lugar donde el canal de descarga se junta con el canal principal, la capa caliente superior sufre una expansión rápida, por lo que se presenta el tirante crítico en la capa superior o

$$\mathbf{F}_{1B} = 1$$

De la ecuación (11.4.15)

$$\frac{y_o - (y_{2B})_c}{y_o} = \mathbf{F}_o^{2/3}$$

o

$$H - y'_{2B} = y_o\mathbf{F}_o^{2/3} \tag{ .4.17}$$

donde se ha supuesto que, ya que no se tiene mezclado, la capa superior tiene el mismo tirante en el canal principal que en la unión de los dos canales.

En la práctica, la selección de un número de Froude densimétrico para el canal de descarga está limitada. A medida que $\mathbf{F}_o$ tiende a 1, la lengua intrusiva va siendo expelida del canal; y a medida que $\mathbf{F}_o$ tiende a cero, aumenta la longitud de la lengua intrusiva. Harleman (1969) sugirió que

$$\mathbf{F}_o = 0.5$$

constituye un compromiso razonable para el diseño. Valores mayores de $\mathbf{F}_o$ producirían mezclado de las dos capas, mientras que valores de $\mathbf{F}_o$ menores de 0.5 causarían canales de descarga muy largos. Entonces, ya que Q_o y T_o —y por tanto la razón $\Delta\rho/\rho$— están determinados por el diseño de la planta, las únicas variables que deben determinarse son el ancho del canal de descarga b_o y el tirante de este canal y_o.

EJEMPLO 11.1

Si $Q_o = 57$ m³/s (2000 ft³/s) y $\Delta\rho/\rho = 0.002$, estímese el ancho y el tirante de la descarga o el canal de descarga.

Solución

Como consecuencia del análisis anterior, supóngase que $\mathbf{F}_o = 0.5$ es un valor deseable de diseño para el canal de descarga. Con esta suposición, la ecuación (11.4.16) queda como

$$\mathbf{F}_o = 0.5 = \frac{\bar{u}_o}{\sqrt{g y_o (\Delta\rho/\rho)}} = \frac{b_o y_o \bar{u}_o}{b_o y_o^{3/2} \sqrt{g(\Delta\rho/\rho)}} = \frac{Q_o}{b_o y_o^{3/2} \sqrt{g(\Delta\rho/\rho)}}$$

o, al reordenar

$$y_o = \left[\frac{Q_o}{0.5 b_o \sqrt{g(\Delta\rho/\rho)}}\right]^{2/3} \qquad (11.4.18)$$

Los valores de b_o y y_o que satisfacen la ecuación (11.4.18) se determinan si se suponen valores de b_o y si se resuelve para y_o o

b_o, m	y_o, m	$H - y'_{2B}$, m
50	6.4	4.0
100	4.0	2.6
150	3.1	1.9
200	2.6	1.6
250	2.2	1.4
300	1.9	1.2

Cualquiera de las combinaciones anteriores de b_o y y_o daría un diseño satisfactorio del canal de descarga.

Zona media

Si no se tiene recirculación del agua de enfriamiento a través de la toma; i.e., la longitud en la dirección de aguas arriba de la capa caliente de agua es menor que la distancia entre la toma y la descarga, entonces $\bar{u}'_1 = 0$ y $\mathbf{F}'_1 = 0$ (véase la figura 11.7). *Nota:* el apóstrofe indica variables y parámetros en las zonas medias. A partir de la ecuación (11.4.10) la pendiente de la interface que separa las dos capas es

$$\frac{dy'_2}{dx} = \frac{(\bar{u}_2'^2/8gy'_2)\{f' + f'_i[H/(H - y'_2)]\}}{(\Delta\rho/\rho)[(\mathbf{F}'_2)^2 - 1]} \qquad (11.4.19)$$

siendo x positiva en la dirección de aguas abajo. Si $\mathbf{F}'_2 < 1$, entonces la pendiente de la interface es negativa y la elevación de la interface sería mayor en la vecindad de la toma que en la de la descarga. En general, el cambio de la elevación de la interfase en la zona media es pequeño (Harleman, 1961) y puede, a menudo, suponerse que el grueso de la capa superior permanece constante. Wigh [en Harleman (1961)] ha demostrado que no debería producirse intrusión de agua de enfriamiento en la zona media si

$$\frac{Q_R - Q_0}{b_R\sqrt{gH^3(\Delta\rho/\rho)}} > 1 \qquad (11.4.20)$$

donde b_R = ancho medio del canal principal
Q_R = gasto en el canal principal aguas arriba del desvío de agua de enfriamiento
Q_0 = gasto del canal de descarga

Harleman (1961) notó que, en la práctica, el lado izquierdo de la ecuación (11.4.20) sólo debe ser mayor que 0.7 para prevenir la intrusión aguas arriba de una capa de agua de enfriamiento.

Toma

En la figura 11.10 se muestra un corte transversal del canal receptor sobre la línea central del canal de la toma. En esta figura, se muestra un obstáculo hidráulico conocido como *pared desnatadora*.* Cuando la capa caliente de agua de enfriamiento se extiende aguas arriba hasta, o más allá del canal de toma, la recirculación del agua de enfriamiento se puede controlar con la pared desnatadora.

Al examinar el flujo de la vecindad del canal de toma, debe resolverse la cuestión de la ubicación del tirante crítico en la capa inferior. Si se presenta el tirante crítico en la capa inferior del canal de toma, entonces

$$\frac{\overline{u}_{2D}}{\sqrt{gy_{2D}(\Delta\rho/\rho)}} = 1 \qquad (11.4.21)$$

Inmediatamente aguas arriba del canal de toma, la ecuación de continuidad requiere que

$$\overline{u}_R H = \overline{u}_{2D} y_{2D} \qquad (11.4.22)$$

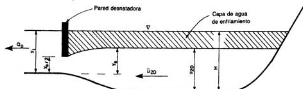


FIGURA 11.10 Sección transversal sobre la línea central del canal de toma. *(Harleman, 1969.)*

* *Nota del traductor:* la palabra es *skim* en inglés, que se refiere a desnatar, aunque en este caso se refiere a "desnatar" la capa caliente.

Si se combinan las ecuaciones (11.4.21) y (11.4.22) da

$$\frac{(y_{2D})_c}{H} = \mathbf{F}_R^{2/3} \tag{11.4.23}$$

donde $(y_{2D})_c$ = tirante crítico en la capa inferior de la toma y

$$\mathbf{F}_R = \frac{\overline{u}_R}{\sqrt{gH(\Delta\rho/\rho)}} \tag{11.4.24}$$

Entonces, para una situación dada, el determinar si el tirante crítico se presenta en la capa inferior en el canal de toma, depende de $\mathbf{F}_R$ y de la razón de desvío Γ, donde

$$\Gamma = \frac{Q_0}{Q_R} \tag{11.4.25}$$

y Q_R = gasto en el canal principal aguas arriba de la toma de agua de enfriamiento. La cuestión del tirante crítico se resuelve al formular una ecuación de cantidad de movimiento para la capa inferior entre una sección aguas arriba del canal de toma y otra aguas abajo de éste (véase, p. ej., Harleman y Elder, 1965). Esto representa un salto hidráulico interno para la condición de que el flujo aguas abajo del canal de toma se reduzca por el agua tomada para el enfriamiento. Wigh (1967), en Harleman (1969), ha demostrado que la solución de esta ecuación de cantidad de movimiento es

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{\mathbf{F}_R}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{y'_{2D}}{H}\right)\left[3\mathbf{F}_R^{4/3} - \left(\frac{y'_{2D}}{H}\right)^2\right]} \tag{11.4.26}$$

En la figura 11.11 se muestra la razón y_{2D}/H como una función de $\mathbf{F}_R$ y Γ. En una situación de diseño, si para el prototipo Γ es menor que la dada por la ecuación (11.4.26), entonces no se puede presentar un salto hidráulico interno y $y_{2D} = y'_{2D}$ (véase la definición de la notación en la Fig. 11.7). Si la razón de desvío es mayor que la dada por la ecuación (11.4.26), entonces se presenta un salto hidráulico interior y el valor de y_{2D} se estima con la ecuación (11.4.23).

Respecto a la pared desnatadora mostrada en la figura 11.10, Harleman y Elder (1965) demostraron que las cantidades de diseño son el gasto en la toma Q_0, la razón de densidad $\Delta\rho/\rho$, el ancho del canal de toma, el tirante en el canal de toma y_i, y la carga y_s. Si el número de Froude densimétrico local es igual a 1 en la pared desnatadora, entonces

$$Q_0 = b_i\left[g\frac{\Delta\rho}{\rho}\left(\frac{2}{3}y_s\right)^3\right]^{1/2} \tag{11.4.27}$$

Si el gasto de la toma Q_0 excede el dado por la ecuación (11.4.27), entonces la interface entre las capas superior e inferior quedará deprimida por debajo de la pared desnatadora y se ocasionará la recirculación. En teoría, la abertu-

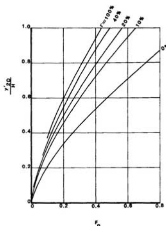


FIGURA 11.11 Profundidad de la interfase en el canal de toma.

ra de la pared desnatadora debiera ser menor que $\frac{2}{3}y_s$; aunque algunos experimentos (Harleman y Elder, 1965) indican que la abertura no debe ser mayor que $\frac{1}{2}y_s$. A partir de la geometría definida en la figura 11.10, la relación entre y_s y y_1 es

$$y_s = y_i - (H - y_{2D}) \tag{11.4.28}$$

donde y_{2D} = espesor de la capa inferior en la sección adyacente a la pared desnatadora.

Aguas arriba de la toma

Bata (1957) combinó las ecuaciones de movimiento y de continuidad para las dos capas y las resolvió para determinar la geometría de la intrusión aguas arriba de la toma o

$$\frac{fx}{H} = \frac{2}{\mathbf{F}_R^2}\eta^4 + \frac{8\theta}{3\mathbf{F}_R^2}\eta^3 + \frac{4\theta(1+\theta)}{\mathbf{F}_R^2}\eta^2 + \frac{8}{\mathbf{F}_R^2}[\theta(1+\theta) - \mathbf{F}_R^2]\eta$$

$$+ \frac{8\theta}{\mathbf{F}_R^2}[(1+\theta)^3 - \mathbf{F}_R^2][\ln(1+\theta-\eta)] + (\text{constante}) \tag{11.4.29}$$

donde

$$\eta = \frac{y_2}{H}$$

$$\theta = \frac{f_i}{f}$$

$\mathbf{F}_R$ se define por la ecuación (11.4.24) y x = coordenada longitudinal medida aguas arriba de la toma. Al usar la ecuación (11.4.29) para estimar la distancia L a la que se extiende la capa superior aguas arriba de la toma, es necesario que existan condiciones de frontera. En el límite superior de la cuña $y_1 = 0$ y, por ende, $\eta = 1.0$; se supone que en la toma $y_2 = (y_2)_c$, donde $(y_2)_c$ = tirante crítico de la capa inferior o

$$(y_2)_c = \left[\frac{u_R^2 H^2}{g(\Delta\rho/\rho)}\right]^{1/3} \tag{11.4.30}$$

Con estas condiciones de frontera, la ecuación (11.4.29) queda como

$$\frac{fL}{H} = \frac{2}{\mathbf{F}_R^2}(1 - \mathbf{F}_R^{8/3}) + \frac{8\theta}{3\mathbf{F}_R^2}(1 - \mathbf{F}_R^{6/3}) + \frac{4\theta(1+\theta)}{\mathbf{F}_R^2}(1 - \mathbf{F}_R^{4/3}) + \frac{8}{\mathbf{F}_R^2}[\theta(1+\theta) - \mathbf{F}_R^2](1 - \mathbf{F}_R^{2/3}) + \frac{8\theta}{\mathbf{F}_R^2}[(1+\theta)^3 - \mathbf{F}_R^2]\,[\ln\theta - \ln(1 + \theta - \mathbf{F}_R^{2/3})] \tag{11.4.31}$$

En la ecuación (11.4.31), si $\mathbf{F}_R < 1$, entonces el valor de L es positivo; si $\mathbf{F}_R = 1$, la longitud de la cuña es cero. Keulegan (1957) aseveró que el valor crítico de $\mathbf{F}_R$ es 0.75, en vez de 1. Si éste fuera el caso, entonces la condición de frontera de la cuña aguas arriba de la toma sería

$$\frac{fL}{H} = \frac{2}{\mathbf{F}_R^2}(1 - 2.16\mathbf{F}_R^{8/3}) + \frac{8\theta}{3\mathbf{F}_R^3}(1 - 1.78\mathbf{F}_R^{6/3}) + \frac{4\theta(1+\theta)}{\mathbf{F}_R^2}(1 - 1.47\mathbf{F}_R^{4/3}) + \frac{8}{\mathbf{F}_R^2}[\theta(1+\theta)^2 - \mathbf{F}_R^2](1 - 1.21\mathbf{F}_R) + \frac{8\theta}{\mathbf{F}_R^2}[(1+\theta)^3 - \mathbf{F}_R^2]\,[\ln\theta - \ln(1 + \theta - 1.21\mathbf{F}_R)] \tag{11.4.32}$$

Polk, *et al.* (1971), notaron que para $\mathbf{F}_R > 0.4$, la ecuación (11.4.32) da valores significativamente menores que la ecuación (11.4.31) para L; aunque para $\mathbf{F}_R < 0.4$ la diferencia en los valores de L estimados por las ecuaciones (11.4.31) y (11.4.32) es despreciable.

Polk, *et al.* (1971) emplearon datos empíricos para examinar la validez de las ecuaciones (11.4.31) y (11.4.32) y concluyeron que:

1. En general, estas ecuaciones predicen satisfactoriamente la longitud de las cuñas aguas arriba de la toma.
2. En los casos en que se presenta una cuña larga aguas arriba de la toma, no existe mucha diferencia si el valor crítico de $\mathbf{F}_R$ se supone de 0.75 o 1.0.
3. Las ecuaciones y, por ende, los resultados son sensibles a cambios en θ, que es la razón entre el factor de fricción interfásico y el factor de fricción de fondo. En las cuatro situaciones de campo examinadas por estos investiga-

dores, la fricción de fondo era muy constante; por lo que, las variaciones observadas en θ reflejan, primordialmente, las variaciones en el factor de fricción interfásico. Para los rangos de θ y $\mathbf{F}_R$ encontrados en este estudio, un aumento de θ por un factor de 2 ocasionó un aumento de L/H por un factor de 1.5.

4. La variable más crítica en estas ecuaciones es el valor de $\mathbf{F}_R$. Despreciar el mezclado inicial de la descarga calentada, previa al desarrollo de la cuña, puede producir estimaciones erróneas de L.

En este momento es relevante notar que Polk, *et al.* (1971), estimaron el factor de fricción de fondo a partir de

$$S_0 = \frac{f}{4R}\frac{\overline{u}_R^2}{2g}$$

donde R = radio hidráulico. El factor de fricción interfásico f_i se determinó al usar el diagrama de Moody para flujo turbulento en tubería plana con el número de Reynolds dado por

$$\mathbf{R} = \frac{4\overline{u}_2 y_2}{\nu_2}$$

donde ν_2 = viscosidad cinemática de la capa inferior
$\overline{u}_2$ = velocidad media del flujo en la capa inferior
y_2 = tirantes medios de flujo en la capa inferior

En este momento debe notarse que una de las dificultades principales en el análisis anterior es la estimación precisa del factor de fricción interfásico. Aunque varios investigadores han examinado este problema (véase p. ej., Abraham, *et al.*,, 1979, y escrito anónimo, 1974), en este momento los resultados no son concluyentes. Los resultados empíricos y de laboratorio indican que al aumentar el número de Reynolds de la capa inferior, el valor del factor de fricción interfásico decrece. Para valores grandes del número de Reynolds de la capa inferior, f es constante con un valor aproximado de 15×10^{-4} (Abraham, *et al.*, 1979). Estos investigadores también aseveran que el valor de f_i es una función de la turbulencia generada en la interfase y frontera de fondo o

$$\tau_i = f_{i,i}\rho\overline{u}_2^2 + f_{ib}\rho\overline{u}_2^2 \qquad (11.4.33)$$

donde $f_{i,i}$ = factor de fricción interfásico que expresa el efecto de turbulencia generada en la interfase de las capas superior e inferior y f_{ib} = factor de fricción interfásico que expresa el efecto de la turbulencia generada en la frontera de fondo. Para valores grandes del número de Reynolds de la capa inferior

$$f_{i,i} \simeq 4 \times 10^{-4}$$

y

$$f_{ib} \simeq 11 - 12 \times 10^{-4}$$

(Abraham, *et al.*, 1979). Debe remarcarse que es necesario llevar a cabo investigaciones adicionales en esta área, antes de poder disponer de una teoría definitiva.

BIBLIOGRAFÍA

Abraham, G., "Horizontal Jets in a Stagnant Fluid of Other Density," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY4, July 1965, pp. 139–154.

Abraham, G., "Jets with Negative Buoyancy in Homogeneous Fluid," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 5, no. 4, 1967, pp. 235–248.

Abraham, G., "The Flow of Round Jets Issuing Vertically in Ambient Fluid Flowing in a Horizontal Direction," *Proceedings of the 5th International Water Pollution Research Conference*, San Francisco, 1970, pp. III 15/1–III 15/7.

Abraham, G., Karelse, M., and Van Os, A. G., "On the Magnitude of Interfacial Shear of Subcritical Stratified Flows in Relation with Interfacial Stability," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 17, no. 4, 1979, pp. 273–287.

Albertson, M. L., Dai, Y. B., Jensen, R. A., and Rouse, H., "Diffusion of Submerged Jets," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 115, 1950, pp. 639–697.

Anderson, J., Parker, F., and Benedict, B., "Negatively Buoyant Jets in a Cross Flow," EPA 660/2-73-012, U.S. Environmental Protection Agency, Washington, October 1973.

Anonymous, "Momentum and Mass Transfer in Stratified Flows," Report R880, Delft Hydraulics Laboratory, Delft, The Netherlands, 1974.

Bata, G., "Recirculation of Cooling Water in Rivers and Canals," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY3, June 1957, pp. 1265-1–1265-27.

Cederwall, K., "Hydraulics of Marine Waste Disposal," Report No. 42, Hydraulics Division, Chalmers Institute of Technology, Göteborg, Sweden, February 1967.

Cederwall, K., and Brooks, N., "A Buoyant Slot Jet into a Stagnant or Flowing Environment," Report No. KH-R-25, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, March 1971.

Daily, J. W., and Harleman, D. R. F., *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.

Fan, L. N., and Brooks, N. H., Discussion of "Horizontal Jets in a Stratified Fluid of Other Density" by G. Abraham, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 92, no. HY2, March 1966, pp. 423–429.

Fan, L. N., "Turbulent Buoyant Jets into Stratified or Flowing Ambient Fluids," Technical Report No. KH-R-15, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, June 1967.

Harleman, D. R. F., "Stratified Flow," *Handbook of Fluid Dynamics*, V. L. Streeter

(ed.), McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

Harleman, D. R. F., and Elder, R. A., "Withdrawal from Two Layer Stratified Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, no. HY4, July 1965, pp. 43–58.

Harleman, D. R. F., "Mechanics of Condenser-Water Discharge from Thermal-Power Plants," *Engineering Aspects of Thermal Pollution*, F. L. Parker and P. A. Krenkel (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, Tenn., 1969, pp. 144–164.

Keulegan, G. H., "Eleventh Progress Report for Density Currents from Characteristics of Arrested Saline Wedges," National Bureau of Standards Report No. 5482, U.S. Department of Commerce, Washington, October 1957.

Morton, B. R., Taylor, G. I., and Turner, J. S., "Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 234A, no. 1196, January 1956, pp. 1–23.

Morton, B. R., "On a Momentum-Mass Flux Diagram for Turbulent Jets, Plumes and Wakes," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 10, 1961, pp. 101–112.

Motz, L., and Benedict, B., "Heated Surface Jet Discharged into a Flowing Ambient Stream," 16130FDQ03/71, U.S. Environmental Protection Agency, Washington, March 1971.

Parker, F. L., and Krenkel, P. A., "Thermal Pollution: Status of the Art," Report No. 3, National Center for Research and Training in Hydrologic and Hydraulic Aspects of Water Pollution Control, Vanderbilt University, Nashville, Tenn., December 1969.

Polk, E. M., Benedict, B. A., and Parker, F. L., "Cooling Water Density Wedges in Streams," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 97, no. HY10, October 1971, pp. 1639–1652.

Rouse, H., Yih, C. S., and Humphreys, H. W., "Gravitational Convection from a Boundary Source," *Tellus*, vol. 4, 1952, pp. 201–210.

√ Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 6th Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

Stefan, H., and Vaidyaraman, P., "Jet Type Model for the Three Dimensional Thermal Plume in a Crosscurrent and Under Wind," *Water Resources Research*, vol. 8, no. 4, August 1972, pp. 998–1014.

Stefan, H., Bergstedt, L., and Mrosla, E., "Flow Establishment and Initial Entrainment of Heated Water Surface Jets," EPA 660/3-75-014, U.S. Environmental Protection Agency, Corvallis, Oreg., May 1975.

Stolzenbach, K. D., and Harleman, D. R. F., "Three-Dimensional Heated Surface Jets," *Water Resources Research*, vol. 9, no. 1, February 1973, pp. 129–137.

Turner, J. S., "Jets and Plumes with Negative or Reversing Buoyancy," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 26, part 4, 1966, pp. 779–792.

Wigh, R. J., "The Effect of Outlet and Intake Design on Cooling Water Recirculation," S.M. thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1967.

DOCE

Flujo gradualmente variado no permanente

SINOPSIS

SINOPSIS

En este capítulo, se tratará el tema del flujo gradualmente variado no permanente. En la sección inicial, se analizan métodos de solución hidráulica y solución hidrológica. Las secciones subsecuentes subrayan las soluciones numéricas de las ecuaciones de St. Venant. Aunque se discute brevemente el método de las características, los esquemas de cuatro puntos implícitos para canales de forma arbitraria representan el método de solución que principalmente se analiza. Se presentan las condiciones pertinentes de frontera e iniciales, y se estudian los temas de calibración y verificación de modelos de flujo gradualmente variado, no permanente.

12.1 INTRODUCCIÓN

Muchos de los fenómenos que revisten gran importancia para el ingeniero hidráulico involucran flujos no permanentes; i.e., el tirante y/o la velocidad varían con el tiempo. Aunque un número limitado de problemas de flujo gradualmente variado no permanente pueden resolverse analíticamente, la generalidad de estos problemas requiere una solución numérica de las ecuaciones de régimen junto con condiciones de fronteras asociadas. En este capítulo, sólo se verán fenómenos de flujos gradualmente variados no permanentes. Esta terminología se refiere a flujos en los que: la curvatura del perfil de onda es suave, el cambio del tirante con el tiempo es gradual, la aceleración vertical de las partículas es despreciable en comparación a la aceleración total y, por último, el efecto de la fricción de frontera debe tomarse en cuenta. Los ejemplos de flujo gradualmente variado no permanente incluyen a las ondas de inundación, los flujos de mareas y las ondas generadas por la operación lenta de estructuras de control, como compuertas y esclusas.

Los modelos matemáticos disponibles ahora para el tratamiento de problemas de flujo gradualmente variado no permanente pueden dividirse, en forma general, en dos categorías: 1) modelos hidráulicos que resuelven las ecuaciones de St. Venant para flujo gradualmente variado, no permanente y 2) modelos hidrológicos que resuelven varias aproximaciones de las ecuaciones de St. Venant. Aunque en este libro sólo se considerarán en detalle los modelos hidráulicos, el ingeniero practicante debe familiarizarse con los otros modelos disponibles, así como con las circunstancias en los que éstos se pueden o deben emplear.

Las ecuaciones de St. Venant que se derivaron en el capítulo 1 consisten en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (12.1.1)$$

y la ecuación unidimensional de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - g(S_x - S_f) = 0 \qquad (12.1.2)$$

Una forma alternativa, pero igualmente válida, de estas ecuaciones son

$$T\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \tag{12.1.3}$$

y

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + S_f - S_x = 0 \tag{12.1.4}$$

donde u = velocidad en la dirección longitudinal
x = coordenada longitudinal
T = ancho superior
A = área de flujo
S_x = pendiente del fondo del canal en la dirección longitudinal
S_f = pendiente de fricción
g = aceleración de la gravedad

Las ecuaciones (12.1.1) y (12.1.2), o (12.1.3) y (12.1.4) componen un grupo de modelos de flujo gradualmente variado no permanente que se les llamará *modelos dinámicos completos.* Al ser completos, este grupo de modelos puede proporcionar resultados precisos sobre flujo no permanente; pero, al mismo tiempo, pueden demandar fuertes recursos de cómputo. Los modelos de este grupo también están limitados por las suposiciones requeridas en la deducción de las ecuaciones de St. Venant y por las suposiciones requeridas para aplicarlos a un problema específico (e.g., a menudo se necesitan hacer suposiciones sobre las irregularidades del canal). Del grupo de modelos, denominados aquí como modelos dinámicos completos, se pueden obtener dos grupos de modelos simplificados, si se hacen varias suposiciones sobre la importancia relativa de los términos en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento [Ec. (12.1.3)].

El desarrollo y comprensión de los modelos aproximados puede, en alguna medida, facilitarse al reordenar la ecuación (12.1.3) en una forma de ecuación de curva de gasto que relacione directamente el gasto con el tirante (Weinmann y Laurenson, 1979). En general, el gasto está dado por

$$Q = \Gamma A R^m \sqrt{S_f} \tag{12.1.5}$$

donde Γ = coeficiente de resistencia empírico
R = radio hidráulico
m = exponente empírico

En un flujo no permanente, S_f varía con la pendiente de la onda y el tirante. En el caso de flujo permanente uniforme el gasto normal está dado por

$$Q = Q_N = \Gamma A R^m \sqrt{S_x}$$

o

$$\Gamma A R^m = \frac{Q_N}{\sqrt{S_x}} \tag{12.1.6}$$

Si se sustituye la ecuación (12.1.6) en la (12.1.5) da

$$Q = Q_N \sqrt{\frac{S_f}{S_x}} \tag{12.1.7}$$

Al resolver la ecuación (12.1.4) para S_f

$$S_f = S_x - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

y si se sustituye esta expresión en la ecuación (12.1.7) da

$$Q = Q_N \left(1 - \frac{1}{S_x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{u}{S_0 g}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{S_0 g}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{1/2} \tag{12.1.8}$$

Onda cinemática
Analogía de difusión
Dinámica completa

La ecuación (12.1.8) se denomina *curva de gastos en forma de lazo* (Fig. 12.1). En esta figura, los puntos A y B indican los puntos de gasto máximo y tirante máximo, respectivamente. El ancho del lazo y, por tanto, el orden de precisión obtenido por los métodos de aproximación depende de la magnitud de los términos secundarios en la ecuación (12.1.8).

El grupo de modelos conocidos como modelos de analogía de difusión se basa en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{12.1.9}$$

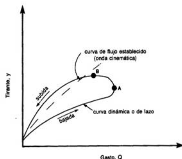


FIGURA 12.1 Curva de gastos en forma de lazo.

que es una variante de la ecuación (12.1.3) y de los términos indicados en la ecuación (12.1.8). Estas dos ecuaciones se pueden combinar dando una sola ecuación

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial x} = D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (12.1.10)$$

donde c = un coeficiente que toma en cuenta las características de traslación de la onda y D = un coeficiente de difusión que simula la atenuación de la onda, a medida que pasa por el canal. Para canales regulares

$$c = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dy} \qquad (12.1.11)$$

y

$$D = \frac{Q}{2TS_0} \qquad (12.1.12)$$

Nótese la similitud de las ecuaciones (12.1.10) y (10.2.20). Si D y c se evalúan ajustándolas a hidrogramas observados entonces, se pueden tomar en cuenta los efectos de irregularidades del canal y del almacenamiento de las llanuras de inundación.

En esencia, el modelo de difusión supone que en la ecuación de cantidad de movimiento los términos inerciales son despreciables, en lo que concierne a los de presión, fricción y gravedad. Ponce, *et al.*, (1978), al evaluar la gama de aplicaciones del modelo de difusión, aseguraron que éste proporciona resultados razonables, en comparación con el modelo dinámico completo, cuando.

$$T_p S_x \left(\frac{g}{y_N}\right)^{1/2} \geq 30 \qquad (12.1.13)$$

donde T_p = periodo de onda de una perturbación senoidal de un flujo permanente uniforme y y_N = tirante de un flujo permanente uniforme. Si se reordena la ecuación (12.1.13), se obtiene

$$T_p \geq \frac{30}{S_x}\left(\frac{y_N}{g}\right)^{1/2} \qquad (12.1.14)$$

Si la ecuación (12.1.14) se satisface, el modelo de difusión aproximará —en forma precisa— el flujo no permanente, asimismo, se puede emplear este modelo en vez del modelo dinámico completo.

El grupo de modelos de la onda cinemática supone que el gasto es siempre igual al gasto normal; por tanto el gasto es siempre una función univaluada del tirante (Fig. 12.1). Entonces las ecuaciones de St. Venant quedan reducidas a la ecuación (12.1.9) y a los términos indicados en la ecuación (12.1.8). Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (12.1.15)$$

donde el coeficiente c = velocidad de onda cinemática y puede, en una sección transversal y gasto dados, estimarse a partir de

$$c = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dy} \tag{12.1.16}$$

El modelo de onda cinemática supone que los términos de inercia y presión son despreciables, comparados con los de gravedad y fricción. Por ende, la onda cinemática viaja sin atenuación, pero con un cambio constante de forma en la velocidad de onda cinemática. Debe notarse que se tienen dos subgrupos de modelos cinemáticos. Si c se supone constante, el modelo es lineal; pero si c es variable, entonces el modelo es no lineal.

Ponce, *et al.*, (1978) evaluaron la gama de aplicaciones de los modelos de onda cinemática, comparada con los de difusión. Si se requiere que el modelo de onda cinemático tenga una precisión del 95% en la predicción de la amplitud de onda, después de un periodo de propagación de ésta, entonces

$$T_p \geq \frac{171 y_N}{S_0 u_N} \tag{12.1.17}$$

donde u_N = velocidad de flujo normal. Un examen del límite definido por la ecuación (12.1.17) demuestra que el periodo de onda debe ser muy largo para que los modelos de onda cinemáticos sean aplicables a un canal de pendiente suave. En general, cuanta mayor pendiente tenga el canal, se necesita un menor periodo de onda para satisfacer la suposición de onda cinemática. Los modelos de onda cinemática se han empleado extensivamente en la investigación de flujos superficiales y en la simulación de ondas de inundación de crecimiento lento que se propagan sin cambio en su forma.

Antes de la llegada de la computadora digital de alta velocidad, era completamente forzoso que los problemas de flujo no permanentes se atacaran con modelos aproximados. Aun con la llegada de la computadora digital de alta velocidad, todavía era necesario el empleo de modelos aproximados, como consecuencia de lo limitado de los recursos de cómputo disponibles. Hoy, cuando es posible contar con prácticamente una cantidad ilimitada de recursos de cómputo, la necesidad y la utilidad de los modelos aproximados es muy limitada. Por esto, este capítulo se centra en mayor medida en métodos numéricos para la solución precisa de las ecuaciones que describen el modelo dinámico completo de flujo gradualmente variado no permanente.

12.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES Y TÉCNICAS NUMÉRICAS BÁSICAS

Del capítulo 1, las ecuaciones fundamentales del flujo gradualmente variado no permanente son la de continuidad y la de conservación de la cantidad de movimiento. En esta sección, se tratará la aplicación y la solución de estas ecuaciones en un canal rectangular, para el caso de flujo subcrítico no permanente.

Para un canal rectangular, la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (12.2.1)$$

donde y = tirante
t = tiempo
u = velocidad media del flujo
x = distancia longitudinal

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - g(S_x - S_f) = 0 \qquad (12.2.2)$$

donde S_x = pendiente del canal en la dirección longitudinal y S_f = pendiente de fricción. Las ecuaciones (12.2.1) y (12.2.2) son un conjunto de ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para dos incógnitas u y y, dadas las condiciones pertinentes de frontera e iniciales. La solución de este conjunto de ecuaciones es casi imposible sin la ayuda de una computadora digital de alta velocidad.

El método más directo para resolver simultáneamente las ecuaciones (12.2.1) y (1.2.2) es por un esquema de diferencias finitas explícito, con un incremento de tiempo fijo. Dada la definición esquemática de un esquema rectangular de diferencias finitas en la figura 12.2, se pueden aproximar las derivadas de las ecuaciones de régimen por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \frac{u_R - u_L}{2\Delta x} \qquad (12.2.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_P = \frac{u_P - u_M}{\Delta t} \qquad (12.2.4)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M = \frac{y_R - y_L}{2\Delta x} \qquad (12.2.5)$$

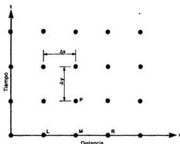


FIGURA 12.2 Definición de la red de diferencias finitas.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_P = \frac{y_P - y_M}{\Delta t} \tag{12.2.6}$$

donde x = distancia longitudinal entre los nodos, t = distancia en tiempo entre los nodos y el subíndice designa el nodo en el cual se está valuando la variable.

Al sustituir las expresiones anteriores para las derivadas en la ecuación (12.2.1) da

$$\frac{y_P - y_M}{\Delta t} + y_M\left(\frac{u_R - u_L}{2\Delta x}\right) + u_M\left(\frac{y_R - y_L}{2\Delta x}\right) = 0$$

y al resolver para y_P

$$y_P = y_M + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[u_M(y_L - y_R) + y_M(u_L - u_R)\right] \tag{12.2.7}$$

Si se sustituyen las aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas en la ecuación (12.2.2), da

$$\frac{u_P - u_M}{\Delta t} + u_M\left(\frac{u_R - u_L}{2\Delta x}\right) + g\left(\frac{y_R - y_L}{2\Delta x}\right) = g(S_x - S_f) \tag{12.2.8}$$

En el cálculo del flujo no permanente, se suele suponer que la pendiente de fricción S_f puede estimarse a partir de alguna de las ecuaciones de resistencia de Manning o Chezy. El empleo de la ecuación de Manning da

$$S_f = \frac{u|u|n^2}{\phi^2 R^{4/3}} \tag{12.2.9}$$

donde R = radio hidráulico
n = coeficiente de fricción de Manning
ϕ = coeficiente que depende del sistema de unidades empleado (1.49 para el inglés y 1 para el SI)

Nótese que el valor absoluto de la velocidad del flujo se usa conjuntamente con el valor con signo de la velocidad, para asegurar que la resistencia por fricción siempre se oponga al movimiento. Si el canal rectangular es ancho, entonces $R \approx y$, así que la pendiente de fricción puede representarse en forma de diferencias finitas como

$$S_f = \frac{u_P|u_P|n^2}{\phi^2 y_P^{4/3}} \tag{12.2.10}$$

Al sustituir la ecuación (12.2.10) en la ecuación (12.2.8), se obtiene

$$\frac{u_P - u_M}{\Delta t} + u_M\left(\frac{u_R - u_L}{2\Delta x}\right) + g\left(\frac{y_R - y_L}{2\Delta x}\right) = g\left(S_x - \frac{u_P|u_P|n^2}{\phi^2 y_P^{4/3}}\right) \tag{12.2.11}$$

Por conveniencia notacional se define

$$\Gamma = \frac{\phi^2 y_P^{4/3}}{g\,\Delta t\, n^2}$$

Al simplificar y reordenar la ecuación (12.2.11), se obtiene

$$u_P|u_P| + \Gamma u_P + \Gamma\left[\frac{u_M\,\Delta t}{2\Delta x}(u_R - u_L) + \frac{g\,\Delta t}{2\Delta x}(y_R - y_L) - g\,\Delta t\, S_x\right] = 0 \qquad (12.2.12)$$

La ecuación (12.2.12) es una ecuación cuadrática en u_P y puede resolverse por la fórmula cuadrática o

$$u_p = \frac{-\Gamma + (\Gamma^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \qquad (12.2.13)$$

donde $\beta = \Gamma\left[\frac{u_M\,\Delta t}{2\Delta x}(u_R - u_L) + \frac{g\,\Delta t}{2\Delta x}(y_R - y_L) - g\,\Delta t\, S_x\right]$

con y_P dada por la ecuación (12.2.7). Por ende, la solución de un problema de flujo no permanente mediante un esquema de diferencias finitas explícito con un incremento de tiempo fijo en un canal ancho rectangular, se obtiene al determinar y_p en un incremento de tiempo avanzado mediante la ecuación (12.2.7), y al usar este valor en la ecuación (12.2.13) para determinar u_p.

Una segunda técnica numérica que se ha empleado frecuentemente para resolver problemas de flujo no permanente involucra la solución de las ecuaciones diferenciales fundamentales mediante el uso de características. Una vez más, al suponer que se tiene un canal rectangular ancho y al reordenar las ecuaciones (12.2.1) y (12.2.2) se tiene

$$H_1 = \frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (12.2.14)$$

y

$$H_2 = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - g(S_x - S_f) = 0 \qquad (12.2.15)$$

H_1 y H_2 con un multiplicador desconocido λ pueden combinarse en una forma lineal para producir una nueva función H

$$H = \lambda H_1 + H_2 \qquad (12.2.16)$$

la cual para dos valores reales y distintos de λ, producirá dos ecuaciones en u y y que retendrán todos los atributos de las (12.2.14) y (12.2.15). Entonces, al combinar las ecuaciones (12.2.14) y (12.2.15) según la ecuación (12.2.16)

$$H = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - g(S_x - S_f) + \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

o

$$H = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(u + \lambda y) + \frac{\partial u}{\partial t}\right] + \lambda\left[\frac{\partial y}{\partial x}\left(u + \frac{g}{\lambda}\right) + \frac{\partial y}{\partial t}\right] - g(S_x - S_f) \tag{12.2.17}$$

En la ecuación (12.2.17) el primer y segundo término son las derivadas totales de la velocidad del flujo y tirante o

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} = u + \lambda y \tag{12.2.18}$$

y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} = u + \frac{g}{\lambda} \tag{12.2.19}$$

La ecuación (12.2.17) puede reescribirse como

$$H = \frac{du}{dt} + \lambda\frac{dy}{dt} - g(S_x - S_f) \tag{12.2.20}$$

Al igualar las expresiones para *dx/dt* en las ecuaciones: (12.2.18) y (12.2.19) se tiene

$$u + \lambda y = u + \frac{g}{\lambda}$$

al resolver da

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{y}} \tag{12.2.21}$$

Las dos raíces reales, distintas para λ especificadas por la ecuación (12.2.21), pueden emplearse para transformar las ecuaciones (12.2.14) y (12.2.15) en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias sujetas a las restricciones sobre *dx/dt*, que se especifican en las ecuaciones (12.2.18) y (12.2.19) o

$$du + dy\sqrt{\frac{g}{y}} + g(S_f - S_x)\,dt = 0 \tag{12.2.22}$$

$$dx = (u + \sqrt{gy})\,dt \tag{12.2.23}$$

$$du - dy\sqrt{\frac{g}{y}} + g(S_f - S_x)\,dt = 0 \tag{12.2.24}$$

$$dx = (u - \sqrt{gy})\,dt \tag{12.2.25}$$

Nótese que la curva definida por la ecuación (12.2.23) se denomina *característica positiva* (C +) (curva *LP* en la figura 12.3). La curva definida por la ecuación (12.2.25) se denomina *característica negativa* (C–) (curva *RP* en la Fig. 12.3).

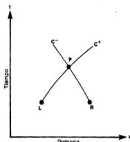


FIGURA 12.3 Definición de las curvas características.

La solución de las ecuaciones (12.2.22) a (12.2.25) debe efectuarse por medio de métodos numéricos. Si se emplea una técnica de diferencias finitas explícita de primer orden, las ecuaciones (12.2.22) a (12.2.25) se convierten en

$$u_P - u_L + \sqrt{\frac{g}{y_L}}(y_P - y_L) + (t_P - t_L)(S_{fL} - S_x) = 0 \qquad (12.2.26)$$

$$x_P - x_L = (u_L + \sqrt{gy_L})(t_P - t_L) \qquad (12.2.27)$$

$$u_P - u_R - \sqrt{\frac{g}{y_R}}(y_P - y_R) + (t_P - t_R)(S_{fR} - S_x) = 0 \qquad (12.2.28)$$

$$x_P - x_R = (u_R - \sqrt{gy_R})(t_P - t_R) \qquad (12.2.29)$$

En forma distinta de la técnica de diferencias explícita, que se presentó anteriormente, en esta técnica la longitud del incremento de tiempo se determina restando la ecuación (12.2.29) de la (12.2.27) o

$$t_P = \frac{x_L - x_R + t_R(u_R - \sqrt{gy_R}) - t_L(u_L - \sqrt{gy_L})}{u_R - u_L - \sqrt{gy_L} - \sqrt{gy_R}} \qquad (12.2.30)$$

El incremento de la distancia en la dirección longitudinal se determina a partir de la ecuación (12.2.27) o

$$x_P = x_L + (u_L + \sqrt{gy_L})(t_P - t_L) \qquad (12.2.31)$$

El tirante en el nodo P se determina restando la ecuación (12.2.28) de la ecuación (12.2.26) y resolviendo para y_P.

$$y_P = \frac{u_L - u_R + y_L\sqrt{\frac{g}{y_L}} + y_R\sqrt{\frac{g}{y_R}} + (t_P - t_R)(S_{fR} - S_x) - (t_P - t_L)(S_{fL} - S_x)}{\sqrt{\frac{g}{y_L}} + \sqrt{\frac{g}{y_R}}} \qquad (12.2.32)$$

De la ecuación (12.2.26) la velocidad del flujo está dada por

$$u_P = u_L - \sqrt{\frac{g}{y_L}}(y_P - y_L) - (t_P - t_L)(S_{fL} - S_x) \qquad (12.2.33)$$

Antes de poder aplicar cualquiera de las dos metodologías descritas en esta sección a un problema, se deben especificar las condiciones iniciales y de frontera. El término *condición inicial* se refiere al estado inicial del flujo en el canal; *i.e.*, el tirante, la velocidad o el gasto en el tramo, al considerar el tiempo en que se inicia el cálculo. El término *condición de frontera* se refiere a la definición del tirante, de la velocidad o del gasto en los extremos superior e inferior del tramo, al considerar todos los tiempos desde el inicio del cálculo. Para el caso general, la condición inicial, a menudo se especifica como flujo uniforme o perfil de flujo gradualmente variado (Cap. 6). Una condición de frontera usual aguas arriba es la que especifica un hidrograma, mientras que la de aguas abajo podría ser el tirante crítico.

La dificultad principal de los métodos explícitos de diferencias finitas es el problema de las soluciones numéricas inestables. Las soluciones inestables se suelen presentar si Δt es relativamente grande respecto a Δx. La condición de estabilidad de Courant requiere que

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u + c} \qquad (12.2.34)$$

donde c = celeridad de onda. Pero se ha encontrado que, para el tipo de esquemas explícitos de diferencias finitas que se han estudiado en esta sección, Δt debe ser aproximadamente el 20% del valor dado por la ecuación (12.2.34). Viessman, *et al.*, (1972) notó que pueden obtenerse soluciones más estables si se emplea una aproximación difusiva de diferencias; *i.e.*, en las ecuaciones anteriores, sustitúyase

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_M = \frac{u_P - 0.5(u_L + u_R)}{\Delta t} \qquad (12.2.35)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_M = \frac{y_P - 0.5(y_L + y_R)}{\Delta t} \qquad (12.2.36)$$

$$S_f = \frac{S_{fL} + S_{fR}}{2} \qquad (12.2.37)$$

Esta formulación de las derivadas permite un importante aumento del incremento de tiempo; pero la condición de estabilidad de Courant [Ec. (12.2.34)] todavía debe satisfacerse. Adicionalmente, el esquema difusivo también impone un criterio por fricción o

$$\Delta t \leq \frac{\phi^2 R^{4/3}}{g n^2 |u|} \qquad (12.2.38)$$

Por estabilidad, se debe emplear el menor de los valores de Δt entre las ecuaciones (12.2.34) y (12.2.38).

12.3 ESQUEMA IMPLÍCITO DE CUATRO PUNTOS-CANALES DE FORMA ARBITRARIA

Como se indicó en las secciones anteriores, la dificultad principal en el análisis del flujo gradualmente variado no permanente es la de identificar un esquema numérico que sea preciso, rápido y eficiente. La solución por diferencias finitas explícitas de las ecuaciones de St. Venant, vista en la sección anterior, tiene la ventaja de la simplicidad, pero está sujeta a una condición muy restrictiva de estabilidad que impone un valor límite del incremento de tiempo, con relación al incremento de distancia. Aunque estas condiciones de estabilidad no presentan una dificultad en la investigación de flujo de corta duración, la solución es burda e ineficiente cuando trata problemas de términos largos, como son las inundaciones en ríos principales. El método de las características, que también se trató en la sección anterior, es muy apropiado para el estudio de flujos rápidamente variados, además puede emplearse para estudios de inundaciones (véase p. ej., Amein, 1966; Fletcher y Hamilton, 1967); pero en muchas aplicaciones tiene la desventaja que proporciona resultados en tiempos y ubicaciones no fijas. Aunque se puede emplear una malla fija, la técnica resultante no tiene ninguna ventaja sobre el esquema explícito de diferencias finitas.

Amein, *et al.*, (1968, 1970, 1975) han desarrollado una técnica implícita de convergencia rápida y precisa, que emplea un esquema de diferencias finitas centrado y un método de iteración de Newton para resolver las ecuaciones no lineales en diferencias finitas resultantes. Las ecuaciones de régimen de un flujo no permanente en canales abiertos de forma arbitraria son

$$u\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \qquad (12.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = g(S_x - S_f) - \frac{qu}{A} \qquad (12.3.2)$$

donde, como antes, u = velocidad media
A = área hidráulica
x = distancia longitudinal
y = tirante
t = tiempo
q = gasto de entrada lateral por unidad de longitud del canal por unidad de tiempo
S_x = pendiente de fondo del canal
S_f = pendiente de fricción

La pendiente de fondo del canal se puede expresar convenientemente como

$$S_x = -\frac{dz}{dx} \qquad (12.3.3)$$

donde z = elevación del fondo del canal relativa a un plano horizontal de comparación.

El área hidráulica se supone que es una función conocida del tirante; por lo que las derivadas de A pueden expresarse en términos de y o

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = T\frac{\partial y}{\partial x} \tag{12.3.4}$$

y

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy}\frac{\partial y}{\partial t} = T\frac{\partial y}{\partial t} \tag{12.3.5}$$

donde T = ancho superficial. En este momento debe notarse que si A y T se determinan por mediciones independientes, los errores de medición pueden causar que T sea diferente de dA/dy. Amein y Fang (1970) notaron que para tener estabilidad numérica, A y T deben ser compatibles. Por ende, si A o T se determinan por medición, es esencial que la otra variable se determine por cálculo (véase la Secc. 1.2). En este análisis se supone que T está determinada por

$$T = \frac{dA}{dy} \tag{12.3.6}$$

La ecuación (12.3.1) queda como

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{T}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{q}{T} = 0 \tag{12.3.7}$$

Las ecuaciones (12.3.2) y (12.3.7) son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, de primer orden del tipo hiperbólico. La solución numérica de estas ecuaciones se logra en dos pasos. Primero, se reemplazan las ecuaciones fundamentales por un conjunto de ecuaciones algebraicas en diferencias finitas. Segundo, debe encontrarse un método para resolver las ecuaciones en diferencias. Se buscará la solución numérica de las ecuaciones. (12.3.2) y (12.3.7) en el plano (x, t), en un número discreto de puntos arreglados en una malla rectangular (Fig. 12.4). Respecto a esta malla, se deben notar los siguientes puntos:

1. Los nodos de la malla se presentan en las intersecciones de las líneas rectas paralelas a los ejes x y t.
2. Las líneas paralelas al eje t representan las ubicaciones a lo largo del canal, mientras que las paralelas al eje x representan los tiempos.
3. Las líneas de las ubicaciones se dibujan con una separación Δx, mientras que las líneas de tiempo se dibujan con una separación Δt. Aunque por razones de conveniencia, en este desarrollo Δx y Δt se suponen constantes, en la práctica Δx y Δt pueden variar en el espacio y en el tiempo, según se requiera.
4. El eje t puede considerarse como la condición de frontera aguas arriba, y la última línea paralela al eje t (denominada la línea n) puede representar la condición de frontera aguas abajo.

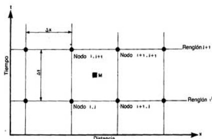


FIGURA 12.4 Definición de la malla para el esquema de diferencias implícito.

5. Cada nodo de la malla se identifica con dos índices: un subíndice designa la posición x del nodo, mientras que el superíndice designa la ubicación del nodo en el tiempo.
6. En el tiempo $t = t_0$, se supone que se dispone de los valores de la velocidad y del tirante en todas las ubicaciones.
7. Por conveniencia, se supone que en la frontera aguas arriba se dispone del nivel o hidrograma de gasto. La frontera aguas abajo del canal se supone que es una sección de control, por lo que se dispone de una relación elevaciones-gasto, o velocidad-tirante.

Para el desarrollo de las ecuaciones algebraicas en diferencias finitas que se necesitan, supóngase que se conocen todas las variables en el renglón t^j y que se desea avanzar a la solución del renglón t^{j+1}, donde $t^{j+1} = t^j + \Delta t$. Las ecuaciones de régimen de flujo no permanente se aplican, en forma de diferencias finitas, a un punto M que está por completo, dentro de una malla de cuatro puntos (Fig. 12.4). En el punto M, las derivadas parciales de una función arbitraria se representan como

$$\Gamma(M) = \frac{1}{4}(\Gamma_i^j + \Gamma_i^{j+1} + \Gamma_i^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1}) \tag{12.3.8}$$

$$\frac{\partial \Gamma(M)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}[(\Gamma_{i+1}^j \, \Gamma_{i+1}^{j+1}) - (\Gamma_i^j + \Gamma_{i+1}^{j+1})] \tag{12.3.9}$$

y

$$\frac{\partial \Gamma(M)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}[(\Gamma_i^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1}) - (\Gamma_i^j + \Gamma_{i+1}^j)] \tag{12.3.10}$$

ya que en las ecuaciones (12.3.8) a (12.3.10) Γ es una función arbitraria, estas ecuaciones definen las variables que aparecen en las ecuaciones de régimen de flujo gradualmente variado no permanente. Cuando y, u, $\partial u/\partial x$, y $\partial u/\partial t$ en la

ecuación (12.3.7) y (12.3.2) se reemplazan por sus análogos definidos en la ecuación (12.3.8) a (12.3.10) y se obtienen dos ecuaciones en diferencias, los resultados son

$$\frac{1}{2\Delta t}[(y_{i+1}^{j+1} + y_i^{j+1}) - (y_{i+1}^j + y_i^j)] + \frac{1}{2\Delta x}(u_{i+1/2}^{j+1/2})[(y_{i+1}^{j+1} + y_{i+1}^j) - (y_i^{j+1} + y_i^j)] + \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{A}{T}\right)_{i+1/2}^{j+1/2}[(u_{i+1}^j + u_{i+1}^{j+1}) - (u_i^j + u_i^{j+1})] - \left(\frac{q}{T}\right)_{i+1/2}^{j+1/2} = 0 \tag{12.3.11}$$

y

$$\frac{g}{2\Delta x}[(y_{i+1}^{j+1} + y_{i+1}^j) - (y_i^{j+1} + y_i^j)] + \frac{1}{2\Delta t}[(u_{i;1}^{j+1} + u_i^{j+1}) - (u_{i+1}^j + u_i^j)] + \frac{1}{2\Delta x}u_{i+1/2}^{j+1/2}[(u_{i+1}^{j+1} + u_{i+1}^j) - (u_i^j + u_i^{j+1})] + \frac{g}{4}(S_{fi}^j + S_{fi+1}^j + S_{fi}^{j+1} + S_{fi+1}^{j+1}) + \left(\frac{g}{\Delta x}\right)(z_i^j - z_{i+1}^j) + q\left(\frac{u}{A}\right)_{i+1/2}^{j+1/2} = 0 \tag{12.3.12}$$

donde

$$u_{i+1/2}^{j+1/2} = ¼\,(u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}) \tag{12.3.13}$$

$$\left(\frac{u}{A}\right)_{i+1/2}^{j+1/2} = ¼\left(\frac{u_i^j}{A_i^j} + \frac{u_{i+1}^j}{A_{i+1}^j} + \frac{u_i^{j+1}}{A_i^{j+1}} + \frac{u_{i+1}^{j+1}}{A_{i+1}^{j+1}}\right) \tag{12.3.14}$$

$$\left(\frac{q}{T}\right)_{i+1/2}^{j+1/2} = ¼\,g\left(\frac{1}{T_i^j} + \frac{1}{T_{i+1}^j} + \frac{1}{T_i^{j+1}} + \frac{1}{T_{i+1}^{j+1}}\right) \tag{12.3.15}$$

$$\left(\frac{A}{T}\right)_{i+1/2}^{j+1/2} = ¼\left(\frac{A_i^j}{T_i^j} + \frac{A_{i+1}^j}{T_{i+1}^j} + \frac{A_i^{j+1}}{T_i^{j+1}} + \frac{Q_{i+1}^{j+1}}{T_{i+1}^{j+1}}\right) \tag{12.3.16}$$

$$S_{fi}^j = \frac{(n_i^j)^2\, u_i^j \mid u_i^j \mid (P_i^j)^{4/3}}{\phi^2\,(A_i^j)^{4/3}} \tag{12.3.17}$$

P_i^j = perímetro mojado y ϕ = coeficiente que depende del sistema de unidades empleado ($\phi = 1.49$ para el sistema inglés y $\phi = 1$ para el SI). En las ecuaciones anteriores, todas las variables con superíndice j se conocen, y todas las variables con superíndice $j + 1$ son desconocidas. Estas ecuaciones contienen sólo cuatro incógnitas: u_i^{j+1}, y_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1}, y y_{i+1}^{j+1}. Obsérvese que las ecuaciones (12.3.11) y (12.3.12) son dos ecuaciones algebraicas no lineales en cuatro incógnitas. Por ende, estas ecuaciones, por sí solas, no son suficientes para eva-

luar las cuatro incógnitas. Pero si estas ecuaciones se aplicaran a todos los nodos en el renglón $j + 1$, resultarían $2(N - 1)$ ecuaciones y $2N$ incógnitas. Estas ecuaciones, junto con las dos ecuaciones que expresan las condiciones de fronteras de aguas abajo y arriba, respectivamente, definirían en forma única las incógnitas. Si el nivel de la frontera aguas arriba se conociera en función del tiempo, entonces

$$y_1^{j+1} - f_1(t^{j+1}) = 0 \tag{12.3.18a}$$

es una de las dos ecuaciones adicionales requeridas para obtener una solución. Si se conoce el gasto en función del tiempo en la frontera aguas arriba, entonces

$$u_1^{j+1} A_1^{j+1} - Q_1^{j+1} = 0 \tag{12.3.18b}$$

Si se conoce una relación de gasto en la frontera aguas abajo, puesto que la sección es de control o se conoce el nivel a partir de una curva de gastos, entonces

$$y_N^{j+1} - f_N(u_N^{j+1}) = 0 \tag{12.3.19}$$

Por lo que, las ecuaciones (12.3.11), (12.3.12), (12.3.18*a* o *b*) y (12.3.19) constituyen un sistema determinado de ecuaciones que define el problema de flujo no permanente.

Amein y Fang (1970) encontraron conveniente reconocer explícitamente que el valor de las variables en el tiempo t^j se conoce y que éstas pueden tratarse como constantes. Si se reordenan las ecuaciones (12.3.18*a*) y (12.3.18*b*), da

$$G_0(y_1) = y_1 - \lambda = 0 \tag{12.3.20a}$$

y

$$G'_0(y_1, u_1) = u_1 A_1 - Q_1 = 0 \tag{12.3.20b}$$

donde λ = una constante y los superíndices se han descartado porque todas las variables en las ecuaciones anteriores —y las que siguen— pertenecen al renglón t^{j+1}. Al reordenar la ecuación (12.3.11), se obtiene

$$\begin{aligned} F_i(y_i, u_i, y_{i+1}, u_{i+1}) &= (y_{i+1} + y_i) + a + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(y_{i+1} - y_i)(u_i + u_{i+1} + b) \\ &+ c(u_i + u_{i+1}) + d + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{A_i}{T_i} + \frac{A_{i+1}}{T_{i+1}}\right)(u_{i+1} - u_i + e) \\ &\frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(hu_{i+1} + mu_i + p) - \frac{\Delta t}{2} q\left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_{i+1}} + w\right) = 0 \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

donde las constantes a, b, c, d, e, h, m, p, y w se definen en la tabla 12.1. Mediante la reordenación de la ecuación (12.3.12) se obtiene

$$G(y_i, u_i, y_{i+1}, u_{i+1}) = (y_{i+1} - y_i - a') + \frac{\Delta x}{g\,\Delta t}(u_i + u_{i+1} + b') \qquad (12.3.22)$$

$$+ \frac{1}{4g}(u_{i+1}^2 + c'\,u_{i+1} + d'\,u_i - u_i^2 + e') + \frac{\Delta x}{2}(S_{fi} + S_{fi+1} + h')$$

$$+ \frac{\Delta x\,q}{2g}\left(\frac{u_i}{A_i} + \frac{u_{i+1}}{A_{i+1}} + m'\right) = 0 \qquad (12.3.22)$$

donde las constantes a', b', c', d', e', h', y m', se definen en la tabla 12.2. En forma similar, la condición de frontera aguas abajo [Ec. (12.3.19)] puede reordenarse para dar

$$F_N(y_N, u_N) = y_N - f_N(u_N) = 0 \qquad (12.3.23)$$

Las ecuaciones (12.3.20) a (12.3.23) son entonces las ecuaciones en diferencias finitas que se aproximan a las ecuaciones diferenciales parciales regidas el flujo no permanente y las condiciones de frontera aguas arriba y abajo. Por conveniencia, las ecuaciones en diferencias finitas se pueden agrupar como sigue:

$$G_0(y_1, u_1) = 0$$
$$F_1(y_1, u_1, y_1, u_2) = 0$$
$$G_1(y_1, u_1, y_2, u_2) = 0$$

•
•
•

$$F_i(y_i, u_i, y_{i+1}, u_{i+1}) = 0 \qquad (12.3.24)$$
$$G_i(y_i, u_i, y_{i+1}, u_{i+1}) = 0$$

•
•
•

$$F_{N-1}(y_{N-1}, u_{N-1}, y_N, u_N) = 0$$
$$G_{N-1}(y_{N-1}, u_{N-1}, y_N, u_N) = 0$$
$$F_N(y_N, u_N) = 0$$

La ecuación (12.3.24) es un sistema de $2N$ ecuaciones algebraicas no lineales, con $2N$ incógnitas. Por tanto, se completó el primer paso del proceso de solución.

TABLA 12.1 Definición de las constantes de la ecuación (12.3.21)

Constante	Definición
a	$a = -(y_{i+1}^j + y_i^j)$
b	$b = u_i^j + u_{i+1}^j$
c	$c = y_{i+1}^j - y_i^j$
d	$d = \frac{\Delta t}{4\Delta x}(y_{i+1}^j - y_i^j)(u_i^j + u_{i+1}^j)$
e	$e = u_{i+1}^j - u_i^j$
h	$h = \frac{A_i^j}{T_i^j} + \frac{Q_{i+1}^j}{T_{i+1}^j}$
m	$m = -\left(\frac{A_i^j}{T_i^j} + \frac{A_{i+1}^j}{T_{i+1}^j}\right)$
p	$p = \left(\frac{A_i^j}{T_i^j} + \frac{A_{i+1}^j}{T_{i+1}^j}\right)\left(u_{i+1}^j - u_i^j\right)$
w	$w = \frac{1}{T_i^j} + \frac{1}{T_{i+1}^j}$

No se dispone de métodos rutinarios para la solución de ecuaciones algebraicas no lineales. Amein y Fang (1970), y Amein y Chu (1975) recomiendan resolver el sistema de ecuaciones designado como la ecuación (12.3.24), por medio de un método generalizado de iteración de Newton (Ralston, 1965). En esta técnica, se asignan valores de tanteo a las incógnitas. La sustitución de estos valores de tanteo en un sistema de ecuaciones,como el de la ecuación (12.3.24), causa comúnmente que el lado izquierdo de la ecuación no sea cero.

TABLA 12.2 Definición de las constantes de la ecuación (12.3.22)

Constante	Definición
a'	$a' = y_{i+1}^j + y_i^j$
b'	$b' = -(u_{i+1}^j + u_i^j)$
c'	$c' = u_{i+1}^j$
d'	$d' = -2u_i^j$
e'	$e' = u_{i+1}^j - (u_i^j)^2$
h'	$h' = S_{f_{i+1}}^j + S_{f_i}^j$
m'	$m' = \frac{u_i^j}{A_i^j} + \frac{u_{i+1}^j}{A_{i+1}^j}$

A este valor no nulo se le denomina *residuo*, y la solución se obtiene al ajustar los valores —obtenidos por tanteo— de las variables hasta que se desvanezca el residuo.

Para demostrar la aplicación de la técnica de solución iterativa de Newton para el flujo no permanente, supóngase que los valores de las incógnitas se han aproximado hasta el tanteo k. Por tanto, se desea llevar el proceso a través del tanteo $k + 1$. Cuando se sustituyen los valores de las variables hasta el ciclo k en la ecuación (12.3.24), el lado derecho de estas ecuaciones se convierte en los residuos, al final del paso iterativo k, o

$$
\begin{aligned}
G_0(y_1^k, u_1^k) &= R_{G,0}^k \\
F_1(y_1^k, u_1^k, y_2^k, u_2^k) &= R_{F,1}^k \\
G_1(y_1^k, u_1^k, y_2^k, u_2^k) &= R_{G,1}^k \\
&\vdots \\
F_i(y_i^k, u_i^k, y_{i+1}^k, u_{i+1}^k) &= R_{F,\,i}^k \\
G_i(y_i^k, u_i^k, y_{i+1}^k, u_{i+1}^k) &= R_{G,\,i}^k \\
&\vdots \\
F_{N-1}\,(y_{N-1}^k, u_{N-1}^k, y_N^k, u_N^k) &= R_{F,\,N-1}^k \\
G_{N-1}\,(y_{N-1}^k, u_{N-1}^k, y_N^k, u_N^k) &= R_{G,\,N-1}^k \\
F_N\,(y_N^k, u_N^k) &= R_{F,\,N}^k
\end{aligned}
\tag{12.3.25}
$$

donde el superíndice identifica al ciclo de iteración. Entonces,según la técnica de iteración generalizada de Newton usada por Amein y Fang (1970), los residuos y las derivadas parciales están relacionados por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_0}{\partial y_1}\,dy_1 + \frac{\partial G_0}{\partial u_1}\,du_1 &= -R_{G,0}^k \\
\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\,dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\,dy_2 + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\,du_2 &= -R_{F,1}^k \\
\frac{\partial G_1}{\partial y_1}\,dy_1 + \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\,dy_2 + \frac{\partial G_1}{\partial u_2}\,du_2 &= -R_{G,1}^k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} + \frac{\partial F_i}{\partial u_{i+1}} du_{i+1} = -R^k_{F,i}$$
$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial G_i}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} + \frac{\partial G_i}{\partial u_{i+1}} du_{i+1} = -R^k_{G,i} \quad (12.3.26)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial G_{N-1}}{\partial y_{N-1}} dy_{N-1} + \frac{\partial G_{N-1}}{\partial u_{N-1}} du_{N-1} + \frac{\partial G_N}{\partial y_N} dy_N + \frac{\partial G_N}{\partial u_N} du_N = -R^k_{G,N-1}$$
$$\frac{\partial F_N}{\partial y_N} dy_N + \frac{\partial F_N}{\partial u_N} du_N = -R^k_{F,N}$$

donde

$$dy_1 = y_1^{k+1} - y_1^k$$
$$du_1 = u_1^{k+1} - u_1^k$$

$$\vdots$$

$$dy_i = y_i^{k+1} - y_i^k$$
$$du_i = u_i^{k+1} - u_i^k \quad (12.3.27)$$

$$\vdots$$

$$dy_N = y_N^{k+1} - y_N^k$$
$$du_N = u_N^{k+1} - u_N^k$$

Respecto a la ecuación (12.3.26) se deben hacer las siguientes observaciones: primero, las derivadas parciales especificadas en este sistema de ecuaciones se evalúan en el k-avo ciclo de iteración. Segundo, este es un conjunto de $2N$ ecuaciones simultáneas con $2N$ incógnitas, por tanto, se puede aplicar cualquiera de los métodos estándard de solución de ecuaciones simultáneas lineales algebraicas (*e.g.*, la eliminación gaussiana o la inversión de matrices). La solución de este sistema proporciona los valores para y_1^{k+1}, u_1^{k+1}, y_i^{k+1}, u_i^{k+1}, y_N^{k+1}, u_N^{k+1}, que son los valores de las incógnitas en el ciclo $k+1$ de iteración. Tercero, la matriz de coeficientes para la ecuación (12.3.26) es hueca, así que

los elementos distintos de cero están alrededor de la diagonal principal de la matriz. Cuarto, el procedimiento indicado aquí se repite hasta que la diferencia entre el valor de cualquier incógnita en dos ciclos de iteración sucesivos esté debajo de un valor de tolerancia predeterminado. Quinto, el ritmo de convergencia de este procedimiento depende,en gran medida, de la elección de los valores iniciales del tanteo. Mientras más cerca se estén estos valores a los reales, más rápida es la convergencia. En el caso de flujo no permanente en canales abiertos, los valores iniciales de tanteo pueden tomarse o bien como los del incremento de tiempo anterior, o como extrapolados a partir de éste.

Al aplicar esta metodología, es necesario evaluar los coeficientes de la ecuación (12.3.26). Los coeficientes son los valores de las funciones F y G en cada ciclo de iteración. Las derivadas parciales requeridas pueden encontrarse al derivar la ecuación (12.3.21) y (12.3.22) o

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = 1 - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i + u_{i+1} + b) + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1} - u_i + e) \left(1 - \frac{A_i}{T_i^2}\frac{dT_i}{dy_i}\right) - \frac{q}{2}\frac{\Delta t}{T_i^2}\frac{dT_i}{dy_i} \tag{12.3.28}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = 1 + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i'} + u_{i+1} + b) + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1} - u_i + \mathrm{e}) \left(1 - \frac{A_{i+1}}{T_{i+1}^2}\frac{dT_{i+1}}{dy_{i+1}}\right) - \frac{q}{2}\frac{\Delta t}{T_{i+1}^2}\frac{dT_{i+1}}{dy_{i+1}} \tag{12.3.29}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_i} = \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(y_{i+1} - y_i + c) - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{A_i}{T_i} + \frac{A_{i+1}}{T_{i+1}}\right) + \frac{m}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{12.3.30}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_{i+1}} = \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(y_{i+1} - y_i + c) + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{A_i}{T_i} + \frac{A_{i+1}}{T_{i+1}}\right) + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}h \tag{12.3.31}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} = -1 - \frac{2}{3}\Delta x\, S_{fi}\left(\frac{1}{P_i}\frac{dP_i}{dy_i} - \frac{T_i}{A_i}\right) - q\frac{\Delta x}{2g}u_i\frac{T_i}{A_i^2} \tag{12.3.32}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} = 1 + \frac{2}{3}\Delta x\, S_{fi+1}\left(\frac{1}{P_{i+1}}\frac{dP_{i+1}}{dy_{i+1}} - \frac{T_{i+1}}{A_{i+1}}\right) - q\frac{\Delta x}{2g}u_{i+1}\frac{T_{i+1}}{A_{i+1}^2} \tag{12.3.33}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial u_i} = \frac{1}{g}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{4g}(d' - 2u_i) + \Delta x\frac{S_{fi}}{u_i} + \frac{\Delta x}{2g}\frac{q}{A_i}u_i \tag{12.3.34}$$

y

$$\frac{\partial G_i}{\partial u_{i+1}} = \frac{1}{g}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{4g}(c' + 2u_{i+1}) + \Delta x\frac{S_{fi+1}}{u_{i+1}} + \frac{\Delta x}{2g}\frac{q}{A_{i+1}}u_{i+1} \tag{12.3.35}$$

Es necesario hacer seis comentarios y precauciones respecto a los esquemas de diferencias finitas implícitos para la solución de problemas de flujo no permanente. Primero, Amein y Chu (1975) notaron que la técnica implícita de di-

ferencias finitas centradas, analizada con gran detalle aquí, es precisa y estable para flujos que varían gradualmente. Aun así, este esquema de diferencias produce oscilaciones numéricas, en ciertas condiciones de transitorios.

Segundo, Amein y Chu (1975) también notaron que, más Q, u es la variable dependiente preferida en las ecuaciones fundamentales, ya que Q es, en general, una función más suave de x y t. Por ejemplo, entre dos secciones adyacentes, el área y la velocidad media pueden cambiar significativamente, mientras que el valor de Q —que es el producto del área y la velocidad media— cambiaría suavemente. Si se emplea Q como la variable dependiente, entonces las ecuaciones fundamentales son

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \qquad (12.3.36)$$

y

$$\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + qu = g\,(S_x - S_f) - g\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (12.3.37)$$

Tercero, Price (1974) comparó cuatro métodos numéricos para el tránsito de avenidas: *a*) el método de tresbolillo*, explícito (Liggett y Woolhiser, 1967), *b*) el método de dos pasos explícitos de Lax-Wendroff (e.g., Liggett y Woolhiser, 1967), *c*) el método implícito de cuatro puntos de Amein, y *d*) el método de malla fija de características (Baltzer y Lai, 1968). Esta investigación concluyó que los cuatro métodos eran precisos y que el de diferencias de cuatro puntos de Amein y Fang (1970) es el más eficiente para problemas de tránsito de avenidas. Price (1974) además notó que la precisión óptima se obtiene con este método cuando se elige el incremento de tiempo igual aproximadamente al incremento de espacio dividido por la velocidad de onda cinemática o

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{\frac{5}{3}\, Q/A} \qquad (12.3.38)$$

Cuarto, en mucho de los modelos estándar de flujo no permanente, se emplean esquemas de diferencias, similares al tratado aquí *e.g.*, el del National Weather Service (Fread, 1978) y el del USGS (Schaffranek, *et al.*, 1981). Muchos de estos modelos usan lo que se conoce como esquema de cuatro puntos *pesado*. Se favorece esa técnica numérica, ya que puede emplearse, sin tener problemas de incrementos desiguales de distancia, además, se pueden controlar sus características de estabilidad-convergencia. En el esquema pesado, el plano continuo $x - t$ —las derivadas en el tiempo en el plano continuo $x - t$— se especifican en una forma similar a la ecuación (12.3.10), pero las derivadas espaciales se aproximan por un cociente de diferencia finita proporcionado entre dos líneas adyacentes de tiempo, según los factores de peso θ y $1 - \theta$ (Fig. 12.5), donde $\theta = \Delta t'/\Delta t$. Para una función arbitraria

* [(Nota del traductor: en inglés es leapfrog)].

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x}(\Gamma_{i+1}^{j+1} - \Gamma_i^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(\Gamma_{i+1}^j - \Gamma_i^j) \tag{12.3.39}$$

Las variables que no son derivadas se aproximan de manera similar, o

$$\Gamma = \frac{\theta}{2}(\Gamma_i^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(\Gamma_i^j + \Gamma_{i+1}^j) \tag{12.3.40}$$

Cuando $\theta = 1$, se forma un esquema implícito completo, que es semejante al empleado por Amein y Chu (1975). Se obtiene un esquema centrado —similar al descrito con detalle en este capítulo— cuando $\theta = 0.5$. Si $\theta = 0$, se tiene un esquema explícito. Fread (1975a) examinó la influencia del factor de peso en la estabilidad y convergencia, asimismo concluyó que la precisión del cálculo decrece a medida que θ se aleja de 0.5 y se acerca a 1.0. El efecto sobre la precisión es más pronunciado al aumentar el incremento de tiempo. Fread (1978) recomendó un valor $\theta = 0.55$, ya que este valor del parámetro de peso minimiza la pérdida de precisión y también evade las inestabilidades bajo algunas de las condiciones transitorias reportadas por Amein y Chu (1975), Baltzer y Lai (1968), y Fread (1975b).

Sexto, Price (1974) notó —y Fread (1975b) coincide— que el método implícito descrito en esta sección puede ser impreciso cuando la avenida excede la capacidad del canal y se propaga encima de los taludes, o sobre la llanura de inundación. En esta situación, la velocidad de propagación de la onda de la avenida es diferente para el flujo del canal que está relacionada con el flujo sobre los taludes, causados por las diferentes propiedades hidráulicas entre las dos. Adicionalmente, Fread (1975b) notó que cuando el canal "meandrea" a través de la llanura de inundación, el tiempo de traslado de la onda puede cambiar como consecuencia de la diferencia de longitud entre los dos tramos.

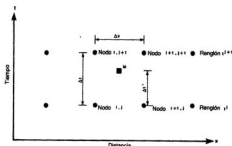


FIGURA 12.5 Red de puntos en el plano $x - t$.

12.4 GENERALIZACIÓN DEL ESQUEMA IMPLÍCITO DE CUATRO PUNTOS

De los comentarios anteriores respecto a la aproximación implícita de cuatro puntos, el último que se refiere al flujo sobre los taludes es crucial desde un punto de vista práctico. La forma modificada de las ecuaciones de St. Venant desarrolladas por (Fread 1975b, 1976, 1982) para estudiar el flujo sobre los taludes es

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial (A + A_0)}{\partial t} - q = 0 \qquad (12.4.1)$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} + gA\left(\frac{\partial z}{\partial x} + S_f + S_e\right) + L = 0 \qquad (12.4.2)$$

donde A = sección transversal activa de flujo
A_0 = sección transversal inactiva o fuera del canal
S_e = pendiente de la expansión-contracción
L = efecto en la cantidad de movimiento del flujo lateral —supuesto en este análisis— que entra o sale de manera perpendicular a la dirección del flujo principal

El término L tiene la siguiente forma: 1) entrada lateral, $L = 0$; 2) descarga lateral por infiltración, $L = -0.5q\ Q/A$; y 3) descarga lateral masiva, $L = -q\ Q/A$. Nótese, en este contexto, que el término *almacenamiento fuera del canal* indica las áreas donde la velocidad en el sentido longitudinal son despreciables respecto a las del canal principal. Los ejemplos de zonas muertas pueden incluir a ensenadas, barrancos, llanuras de inundación con mucha vegetación y tributarios que conectan con el canal, pero que no le pasan gasto.

Como antes, la pendiente de fricción en la ecuación (12.4.2), S_f, se estima a partir de la ecuación de Manning para flujo uniforme o

$$S_f = \frac{n^2 Q|Q|}{\phi^2 A^2 R^{4/3}} \qquad (12.4.3)$$

donde R = radio hidráulico de la sección transversal activa o

$$R = \frac{A}{T}$$

donde T = ancho superficial de la sección transversal activa. El término S_e en la ecuación (12.4.2) está dado por

$$S_e = \frac{k\,\Delta\,(Q/A)^2}{2g\,\Delta x} \qquad (12.4.4)$$

donde k = coeficiente de expansión-contracción (e.g., Morris y Wiggert, 1972) y $\Delta(Q/A)^2$ = diferencia entre la velocidad media de dos secciones adyacentes separadas por una distancia Δx.

Las ecuaciones (12.4.1) y (12.4.2) se modifican, para tomar en cuenta las diferencias en las propiedades de la onda de avenida del flujo, éste se presenta simultáneamente en las secciones del canal y en la llanura de inundación (Fread 1975b, 1976, 1982), o

$$\frac{\partial(K_c Q)}{\partial x_c} + \frac{\partial(K_l Q)}{\partial x_l} + \frac{\partial(K_r Q)}{\partial x_r} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \qquad (12.4.5)$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(K_c^2 Q^2/A_c)}{\partial x_c} + \frac{(K_l^2 Q^2/A_l)}{\partial x_l} + \frac{\partial(K_r^2 Q^2/A_r)}{\partial x_r} + gA_c\left(\frac{\partial z}{\partial x_c} + S_{fc} + S_e\right) + gA_l\left(\frac{\partial z}{\partial x_l} + S_{fl}\right) + gA_r\left(\frac{\partial z}{\partial x_r} + S_{fr}\right) = 0 \qquad (12.4.6)$$

donde los subíndices c, l y r representan el canal, la llanura de inundación izquierda, y la llanura de inundación derecha, respectivamente. Los parámetros K_c, K_l, y K_r se emplean para repartir el gasto Q en gasto del canal, gasto en la llanura de inundación izquierda y gasto en la llanura de inundación derecha. Estos parámetros tienen las siguientes definiciones

$$K_c = \frac{1}{1 + k_l + k_r} \qquad (12.4.7)$$

$$K_l = \frac{k_l}{1 + k_l + k_r} \qquad (12.4.8)$$

$$K_r = \frac{k_r}{1 + k_l + k_r} \qquad (12.4.9)$$

donde

$$k_l = \frac{Q_l}{Q_c} = \frac{n_c}{n_l}\frac{A_l}{A_c}\left(\frac{R_l}{R_c}\right)^{2/3}\left(\frac{\Delta x_c}{\Delta x_l}\right)^{1/2} \qquad (12.4.10)$$

y

$$k_r = \frac{Q_r}{Q_c} = \frac{n_c}{n_r}\frac{A_r}{A_c}\left(\frac{R_r}{R_c}\right)^{2/3}\left(\frac{\Delta x_c}{\Delta x_r}\right)^{1/2} \qquad (12.4.11)$$

Los términos de la pendiente de fricción en la ecuación (12.4.6) están dados por

$$S_{fc} = \frac{n_c^2|K_c Q|K_c Q}{\phi^2 A_c^2 R_c^{4/3}} \qquad (12.4.12)$$

$$S_{fl} = \frac{n_l^2|K_l Q|K_l Q}{\phi^2 A_l^2 R_l^{4/3}} \qquad (12.4.13)$$

y

$$S_{fr} = \frac{n_r^2\,|K_r Q|\,K_r Q}{\phi^2 A_r^2 R_r^{4/3}} \qquad (12.4.14)$$

En la ecuación (12.4.5) la variable A es el área transversal total o

$$A = A_c + A_l + A_r + A_0 \qquad (12.4.15)$$

donde A_0 = área de almacenamiento fuera del canal (inactiva).

Las ecuaciones (12.4.5) y (12.4.6) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico que deben, en el caso general, resolverse numéricamente (e.g., por un esquema implícito de cuatro puntos).

12.5 CONDICIONES DE FRONTERA E INICIALES

Como se notó previamente en este capítulo, la solución de las ecuaciones de régimen de flujo no permanente requieren que se especifiquen las condiciones de frontera en todo el periodo de simulación. Un conjunto de condiciones de frontera se debe especificar en los extremos físicos del sistema, además, son necesarios condiciones adicionales en los entronques dentro del sistema (e.g., en los nodos donde los tributarios se juntan con el canal principal y en los nodos donde el canal se divide para pasar por una isla).

Se pueden especificar varias combinaciones de condiciones de frontera en los extremos físicos de una red. Las condiciones externas que se suelen especificar son: gasto cero, gasto en función del tiempo, elevación en función del tiempo, o una relación conocida única entre el nivel y el gasto. Fread (1975b) notó que, cuando no se presentan disturbios en el flujo aguas abajo del tramo que se está transitando que puedan propagarse dentro del tramo e influir en el gasto, siempre se dispone de una ecuación de tránsito, que es la ecuación de flujo uniforme de Manning o Chezy.

Las condiciones de frontera internas más comunes ocurren en nodos donde un tributario llega al canal o se divide por la presencia de una isla. Si las diferencias de velocidad y las pérdidas de energía ocasionadas por la turbulencia se desprecian en estos entronques, se puede entonces especificar las condiciones de frontera apropiadas (Schaffranek, *et al.*, 1981). Para un entronque compuesto de N ramas, la continuidad requiere que

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = W_k \qquad (12.5.1)$$

donde W_k es un gasto externo especificado en el nodo k.

Adicionalmente, la elevación en el entronque debe tener un solo valor. Para un entronque con n ramas.

$$y_i = y_{i+1} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, (N-1) \qquad (12.5.2)$$

Por ende, en cualquier entronque interno de N ramas se tiene una ecuación de continuidad. [Ec. (12.5.1)] y $(N-1)$ ecuaciones que especifican la compatibilidad de elevaciones [Ec. (12.5.2)] que deben satisfacerse. En la figura 12.6 se muestra una red típica de nodos para un ejemplo hipotético.

La solución de las ecuaciones fundamentales del flujo no permanente y las

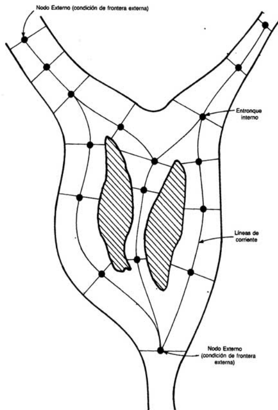


FIGURA 12.6 Red de nodos para flujo no permanente.

condiciones de frontera especificadas también requieren que se especifiquen los valores iniciales de las variables no conocidas. Los valores iniciales pueden obtenerse mediante mediciones o estimados por cálculo (e.g., el flujo uniforme, el flujo gradualmente variado o las simulaciones anteriores de flujo no permanente). Aunque es deseable tener condiciones iniciales razonables, pueden usarse estimaciones, si se deja un tiempo suficiente en el modelo de flujo no permanente para disipar los errores y para que converja a la solución real. Los

modelos, con un alto grado de disipación convergirán más rápido que los modelos de sistemas con bajo grado de disipación de energía (Lai, 1965a, 1965b).

12.6 CALIBRACIÓN Y VERIFICACIÓN

Como es el caso de cualquier modelo, los modelos de flujo no permanente deben calibrarse y verificarse. Éstos son dos procedimientos que requieren datos de prototipo precisos. Como notaron French y Krenkel (1980), los procesos de calibración y verificación necesita dos conjuntos prototipo de datos independientes y estadísticamente confiables. Uno de los conjuntos se emplea para establecer los valores óptimos de los coeficientes "libres", el segundo se emplea para verificar que el proceso de calibración haya establecido los coeficientes óptimos.

En el proceso de calibración, se usan los datos prototipo para refinar los valores de las variables menos cuantificables (e.g., el coeficiente de fricción). El objetivo de este proceso es ajustar estas variables para que pueda repetirse en forma precisa el sistema del prototipo para una gama de condiciones de flujo. Aunque la reproducción de las elevaciones de la superficie del agua por el modelo es valiosa, la reproducción del hidrograma del prototipo en tiempo y magnitud es mucho más importante. Si se puede obtener un alto grado de calibración y verificación, puede entonces extenderse la aplicación del modelo más allá de los límites de los datos usados en el proceso de calibración y verificación. En general, los datos para el proceso de calibración y verificación de un modelo de flujo no permanente consisten en dos series de tiempo de gastos medidos simultáneamente con las elevaciones de la superficie del agua. La meta de los procedimientos de calibración y verificación es satisfacer algún criterio de bondad de ajuste (e.g., minimizar los cuadros de las diferencias entre los valores medidos y simulados).

Aunque en teoría todos los aspectos y variables pueden estar sujetos a ajustes y a afinación, en la práctica algunas variables no pueden determinarse directamente. Por ejemplo, en el caso de modelos de flujo no permanente, no se suelen ajustar los datos de geometría del canal, ya que éstos pueden medirse con una precisión razonable. En estos modelos, la atención generalmente se centra en el valor del coeficiente de fricción, una variable que no se mide a menudo en forma directa.

La dificultad en la determinación teórica de un valor preciso del coeficiente de fricción se debe principalmente al hecho de que en la hidráulica aplicada, la relación empleada para obtener la disipación de energía es el resultado del empirismo. Por otra parte, la formulación empleada para la disipación en modelos de flujo no permanente es una aproximación que ha sido tomada de una fórmula empírica o semiempírica desarrollada para el flujo permanente uniforme. En realidad, se dispone de muy poca información auténtica sobre el efecto de la resistencia del perímetro, en condiciones de flujo no permanente.

Schaffranek, *et al.*, (1981) han sugerido que la calibración de un modelo de flujo no permanente debe empezar con la recolección de un conjunto de datos

durante condiciones permanentes, o casi permanentes, de flujo. Si se dispone de este conjunto, puede determinarse el coeficiente de fricción simplemente a partir de la ecuación de Manning o Chezy para flujo uniforme. En este momento se harán varios comentarios sobre el procedimiento de calibración:

1. El empleo de un coeficiente de fricción demasiado pequeño reduce la resistencia al flujo y aumenta la cantidad de movimiento o inercia. Las simulaciones resultantes tendrán picos que son demasiados altos, y puntos mínimos que serán demasiado bajos. En general, también se presenta un desfasamiento que tal vez no se desee. El uso de un coeficiente de fricción demasiado grande tiene los efectos opuestos en los resultados de la simulación.

2. Los registros de elevación de la superficie del agua pueden ser erróneos, como consecuencia de errores en el banco de nivel, imprecisiones en el levantamiento topográfico o desplazamiento de la estructura de medición. El resultado de este tipo de error es aumentar o disminuir la pendiente de la superficie del agua a través del tramo en que éste se presenta. Un aumento en la pendiente de la superficie del agua causa un mayor gasto hacia aguas abajo, mientras que una disminución de la pendiente de la superficie del agua tiene el efecto opuesto.

3. El empleo de una sección transversal demasiado grande produce picos y vados magnificados, mientras que el de una demasiado pequeña tiene el efecto opuesto.

4. Algunos consideran al factor de peso θ [Ec. (12.3.39)] como una variable de calibración (véase p. ej., Schaffranek, *et al.*, 1981). Los valores apropiados de θ parecen encontrarse entre los valores $0.6 \leq \theta \leq 1.0$. Los valores de θ que sean menores de 0.6 pueden provocar inestabilidades. *Nota*: este problema se mencionó anteriormente en la sección 12.3, además, Fread (1978) recomienda que $\theta = 0.55$. Schaffranek, *et al.*, (1981) notaron que si bien $\theta = 1.0$ proporciona la mayor estabilidad calculatoria, también ocasiona un amortiguamiento de la onda calculada.

Schaffranek, *et al.*, (1981) notaron que la calibración de modelos de flujo no permanente puede variar desde simple hasta difícil, según sea la complejidad del régimen de flujo simulado y la interconección de canales dentro del prototipo. Las redes de canales en las que el gasto sólo tiene una trayectoria entre dos ubicaciones son, a menudo, más fácil de calibrar que las redes de canales donde el gasto puede usar más de una ruta entre dos ubicaciones. En esta última situación, quizá aparezcan circulaciones erróneas que hagan inútil el modelo.

Como puede discernirse del estudio anterior, la determinación del valor óptimo del coeficiente de fricción es el objetivo principal en la calibración de un modelo de flujo no permanente unidimensional. Un modelo obvio, y muy usa-

do para lograr esto, es el de una técnica de tanteo, en la que las ecuaciones de régimen se resuelven repetidamente para valores diferentes del coeficiente de fricción. El valor de este coeficiente que produce el mejor ajuste —medido por algún criterio de bondad de ajuste— entre los valores medidos y los simulados, es el valor óptimo. Esta búsqueda por tanteo para los valores óptimos puede ser tediosa, difícil, y costosa. Además, en el caso de un modelo de un sistema de ríos, Fread y Smith (1978) han notado que la modificación del valor del coeficiente de fricción en un tributario puede afectar el flujo aguas arriba y abajo del tributario en el tronco principal del río, así como al flujo en los otros tributarios. Esto es particularmente cierto en ríos con tributarios importantes y/o cuando la pendiente del río es pequeña, e.g., 2 ft/milla (0.38 m/km).

En general, la determinación de los valores de los parámetros en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, para un conjunto dado de condiciones de frontera e iniciales, se le denomina *problema inverso.* Fread y Smith (1978) han desarrollado una metodología de optimización para la determinación del coeficiente de fricción en modelos de flujo no permanente unidimensionales. En este método se supone que el coeficiente de fricción cambia con el nivel y el gasto en el canal pero no es una función de la distancia longitudinal. El criterio de bondad de ajuste empleado por Fread y Smith (1978) es la minimización del valor absoluto de la suma de las diferencias entre los valores observados y los simulados de las elevaciones o gastos.

En su desarrollo, Fread y Smith (1978) supusieron que el flujo estaba regido por las ecuaciones (12.4.1) y (12.4.2) con la pendiente de fondo dada por la ecuación (12.4.3). Estos investigadores supusieron además, que estas ecuaciones se resolvían por un esquema no lineal pesado de cuatro puntos, y que se especificaban las siguientes condiciones:

1. La condición inicial era la especificación de los niveles y los gastos en todos los nodos del cálculo en el tramo *A-B* (Fig. 12.7).
2. La condición de frontera de aguas arriba es un hidrograma conocido o

$$Q_A = Q'_A(t) \tag{12.6.1}$$

3. La condición de frontera de aguas abajo es una gráfica de niveles o

$$y_B = y'_B(t) \tag{12.6.2}$$

4. Se conocen todas las entradas y salidas laterales.

Nótese que al especificar un hidrograma en la frontera aguas arriba se toman en cuenta todas las perturbaciones que ocurren aguas arriba del tramo *A-B* que pudieran afectar el flujo en el tramo *A-B*. Al especificar la condición de frontera de aguas abajo, se toman en cuenta todas las perturbaciones que se presentan aguas abajo del tramo. Finalmente, como se notó arriba, el coefi-



FIGURA 12.7 Esquema del tramo *A-B* del canal. (*Fread y Smith, 1978.*)

ciente de fricción n no varía en función de la distancia dentro del tramo A-B pero es una función del nivel del gasto. Fread y Smith (1978) supusieron que la variación de n con el gasto está descrita por una función del gasto medio en el tramo seccionalmente lineal (Fig. 12.8). En esta figura, el rango total de gastos posibles se divide en un número de estratos ($j = 1, 2, \ldots, J$), y a cada estrato se le asocia un punto de equilibrio (n, Q) en la $n(Q)$ ava sección de la función lineal continua.

En este análisis,se busca un valor óptimo de $n(Q)$ que minimice el valor absoluto de las diferencias entre los valores estimados de los niveles $\hat{y}_A$ y los niveles medidos y_A en la frontera de aguas arriba. Bajo esta definición, la función objetivo para la minimización es

$$\text{mín}\,(S_T) = \left|\sum_{j=1}^{J} S_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{M_J} \sum_{i=1}^{M_J} \left(\hat{y}_A - y_A^i\right)\right| \qquad (12.6.3)$$

donde M_J = número total de niveles asociado con los gastos en el estrato j. Dentro de cada estrato es conveniente minimizar la función objetivo para el estrato S_j donde

$$S_j = \frac{1}{M_J} \sum_{i=1}^{M_J} \left(\hat{y}_A - y_A^i\right) \qquad (12.6.4)$$

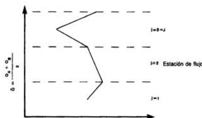


FIGURA 12.8 Relación funcional típica $n(\overline{Q})$ para cada *A-B* (Fig. 12.7). (*Fread y Smith, 1978.*)

Nótese que, ya que

$$\left| \sum_{j=1}^{J} S_j \right| \leq \sum_{j=1}^{J} \left| S_j \right| \tag{12.6.5}$$

la minimización de S_j para cada estrato da como resultado el valor mínimo de S_T.

La función objetivo para el estrato j puede expresarse en la siguiente forma funcional.

$$\text{mín } S_j \{y_{Aj} [n_j (\overline{Q}_j)]\}; \quad j = 1, 2, \ldots, J \tag{12.6.6}$$

donde S_j = una función de los niveles medidos y estimados en la frontera de aguas arriba. Según Fread y Smith (1978) una forma equivalente de la ecuación (12.6.7) es

$$S_j \{y_{Aj} [n_j (\overline{Q}_j)]\} = 0; \quad j = 1, 2, \ldots, J \tag{12.6.7}$$

Si se expresa la ecuación (12.6.4) o (12.6.6) en la forma de la ecuación (12.6.7), puede emplearse un algoritmo tipo gradiente Newton-Raphson para mejorar la estimación de $n(\overline{Q})$, de tal forma que se minimice la función objetivo. Con estas definiciones, la solución es como sigue:

1. Se estiman los valores iniciales de la función $n(\overline{Q})$. Estos valores iniciales pueden ser complicadas adivinanzas o el resultado de la aplicación de la ecuación de Manning a los datos de la condición de frontera; e.g.,

$$n_j^1 = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{Mj} \frac{\phi A R^{2/3}}{(Q_A + q\,\Delta x)} \left(\frac{y_{Ai} - y_{Bi}}{\Delta x} \right)^{1/2} \tag{12.6.8}$$

donde el superíndice en el coeficiente de fricción de Manning denota el número de iteraciones y Δx es la distancia entre las estaciones A y B. Si las estimaciones iniciales se desvían significativamente de los valores óptimos, quizá los pasos que siguen el esquema de cálculo no converjan.

2. Se resuelven las ecuaciones fundamentales; *i.e.*, ecuaciones (12.4.1), (12.4.2), (12.6.1), (12.6.2).

3. Se evalúa la función objetivo; la ecuación (12.6.3), para cada estrato de gasto.

4. Se estiman valores mejorados para la función $n(\overline{Q})$. Si $k = 1$, entonces

$$n_j^{k+1} = n_j^1 \frac{1.00 - 0.01\, S_j^1}{|S_j^1|} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, J \tag{12.6.9}$$

Si $k > 1$, entonces

$$n_j^{k+1} = n_j^k - \frac{S_j^k \left(n_j^k - n_j^{k-1} \right)}{S_j^k - S_j^{k-1}} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, J \tag{12.6.10}$$

5. En este momento, se evalúa la función objetivo y se emplean las siguientes desigualdades para determinar si se necesitan iteraciones adicionales. Si

$$S_T^k = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} S_j^k < \epsilon \tag{12.6.11}$$

o

$$S_T^k \geq S_T^{k-1} \tag{12.6.12}$$

donde ϵ es un criterio de convergencia, entonces se ha encontrado un valor óptimo de la función $n(\overline{Q})$.

La técnica de optimización de la función $n(\overline{Q})$ puede aplicarse a sistemas de ríos que tienen múltiples tramos y/o tributarios. Fread y Smith (1978) notaron que cuando se trata de un sistema de ríos, se requieren mediciones de gasto sólo en el extremo superior del tronco principal del río y de cada tributario; pero, se necesitan medidas de niveles en todas las estaciones de medición. Este conjunto de mediciones necesarios puede ser el indicado para sistemas de ríos relativamente planos y grandes, donde los perfiles de flujo gradualmente variados pueden dificultar mucho la medición de gastos.

BIBLIOGRAFÍA

Amein, M., "Streamflow Routing on Computer by Characteristics," *Water Resources Research*, vol. 2, no. 1, 1966, pp. 123–130.

Amein, M., "An Implicit Method for Numerical Flood Routing," *Water Resources Research*, vol. 4, no. 4, 1968, pp. 719–726.

Amein, M., and Fang, C. S., "Implicit Flood Routing in Natural Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY12, December 1970, pp. 2481–2500.

Amein, M., and Chu, H. L., "Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flows," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 101, no. HY6, June 1975, pp. 717–731.

Baltzer, R. A., and Lai, C., "Computer Simulations of Unsteady Flow in Waterways," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 94, no. HY 4, July 1968, pp. 1083–1117.

Fletcher, A. G., and Hamilton, W. S., "Flood Routing in an Irregular Channel," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 93, no. EM3, June 1967, pp. 45–62.

Fread, D. L., "Numerical Properties of Implicit Four Point Finite Difference Equations of Unsteady Flow," *NOAA Technical Memorandum NWS HYDRO*, 18, NOAA, 1975a.

Fread, D. L., Discussion of "Comparison of Four Numerical Method for Flood Routing," by R. K. Price, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 101, no. HY3, 1975b, pp. 565–567.

Fread, D. L., "Flood Routing in Meandering Rivers with Flood Plains," *Proceedings, Rivers '76*, Third Annual Symposium of Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, American Society of Civil Engineers, vol. 1, 1976, pp. 16–35.

Fread, D. L., "National Weather Service Operational Dynamic Wave Model," National Weather Service, NOAA, Silver Spring, Md., 1978.

Fread, D. L., "DAMBRK: The NWS Dam Break Flood Forecasting Model," Office of Hydrology, National Weather Service, Silver Spring, Md., 1982.

Fread, D. L., and Smith, G. F., "Calibration Technique for 1-D Unsteady Flow Models," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY7, July 1978, pp. 1027–1044.

French, R. H., and Krenkel, P. A., "Effectiveness of River Models," *Progress in Water Technology*, no. 13, no. 99, 1980.

Lai, C., "Flows of Homogeneous Density in Tidal Reaches: Solution by Method of Characteristics," U.S. Geological Survey Open File Report, Washington, 1965a.

Lai, C., "Flows of Homogeneous Density in Tidal Reaches: Solution by Implicit Method," U.S. Geological Survey Open File Report, Washington, 1965b.

Liggett, J. A., and Woolhiser, D. A., "Difference Solution of Shallow-Water Equations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 93, no. EM2, April 1967, pp. 39–71.

Morris, H. M., and Wiggert, J. M., *Applied Hydraulics in Engineering*, Ronald Press, New York, 1972, pp. 570–573.

Ponce, V. M., Li, R. M., and Simons, D. B., "Applicability of Kinematic and Diffusion Models," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY3, March 1978, pp. 353–360.

Price, R. K., "Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 100, no. HY7, July 1974, pp. 879–899.

Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

Schaffranek, R. W., Baltzer, R. A., and Goldberg, D. E., "A Model for Simulation of Flow in Singular and Interconnected Channels," chapter C3, *Techniques of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey*, Washington, 1981.

Viessman, W., Jr., Knapp, J. W., Lewis, G. L., and Harbaugh, T. E., *Introduction to Hydrology*, 2d ed., Harper & Row, New York, 1972.

Weinmann, D. E., and Laurenson, E. M., "Approximate Flood Routing Methods: A Review," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 105, no. HY12, December 1979, pp. 1521–1536.

TRECE



Flujo rápidamente variado, no permanente

SINOPSIS

En este capítulo se discuten los flujos clasificados como rápidamente variados no permanentes. Este tipo de flujo puede producirse como consecuencia de la operación brusca de estructuras de control, de la acción de las mareas, la ruptura catastrófica de una presa, o un flujo supercrítico en un canal con pendiente fuerte en el tirante normal (olas crecientes). El capítulo comienza con un tratamiento analítico de las ondas elementales, que incluye un tratamiento detallado del problema de ruptura de presa, hace hincapié en: las técnicas que dan estimaciones de los tirantes aguas abajo del flujo, las técnicas para la determinación de la formación de olas crecientes, los métodos para determinar donde se formarán las olas crecientes y en la técnica para la estimación de la altura resultante de la ola creciente.

13.1 INTRODUCCIÓN

Como se notó en el capítulo anterior, muchos de los fenómenos que revisten gran importancia para el ingeniero hidráulico involucran flujos no permanentes. El término *flujo rápidamente variado no permanente* se refiere a flujos en los que: la curvatura de la onda es pronunciada, el cambio del tirante en el tiempo es rápido, la aceleración vertical de las partículas del agua es significativa en comparación a la aceleración total y el efecto de fricción de las fronteras se puede despreciar. Algunos ejemplos de flujo rápidamente variado no permanente son: la ruptura catastrófica de una presa, las ondas de mareas y las ondas que pueden producirse con la operación brusca de estructuras de control, como las compuertas.

13.2 ONDAS ELEMENTALES*

Si la onda se produce por acción de mareas (e.g., el río Severn de Inglaterra o el Chien Tang en la República Popular China) se le denomina *onda de marea*. Como ejemplo elemental, considérese una onda positiva que se produce al cerrar en forma rápida y parcial una compuerta en un canal rectangular horizontal sin fricción (Fig. 13.1*a*). En esta figura se supone que el observador no se mueve y ve el paso de la onda; claramente, esto es por definición un fenómeno no permanente, ya que el observador presencia un cambio en el tirante en función del tiempo. En la figura 13.1*b* se ha transformado el sistema de coordenadas a un sistema que se traslada en la dirección del movimiento de la onda,

* *Nota del traductor:* en este capítulo se usará el término onda como el equivalente a "surge" en inglés. En este sentido onda quiere decir un frente de ondas que se desplaza en el canal produciendo un cambio abrupto en el tirante a su paso por el canal.

a la velocidad de la onda. Esta figura equivale a que el observador se estuviese moviendo con la onda, así que al observador el fenómeno le parece estacionario. La ecuación de continuidad para flujo permanente aplicada a la figura 13.1*b* da

$$(u_1 + c)y_1 = (u_2 + c)y_2 \qquad (13.2.1)$$

Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento a la figura 13.1*b* se obtiene

$$\gamma \frac{y_1^2}{2} - \gamma \frac{y_2^2}{2} = \frac{\gamma}{g} y_1(u_1 + c)(u_2 + c - u_1 - c)$$

o

$$\frac{\gamma}{2}(y_1^2 - y_2^2) = \frac{\gamma}{g} y_1(u_1 + c)(u_2 - u_1) \qquad (13.2.2)$$

donde se ha despreciado la fricción de pared. Si se elimina u_2 en la ecuación (13.2.2) mediante pasos algebraicos la ecuación (13.2.1.) da

$$u_1 + c = \sqrt{g y_1}\left[\frac{y_2}{2y_1}\left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right)\right]^{1/2} \qquad (13.2.3)$$

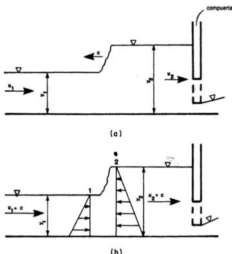


FIGURA 13.1 *a*) Onda positiva en un canal rectangular; observador estacionario. *b*) Onda positiva en un canal rectangular; desplazamiento del observador con la onda.

Respecto a la ecuación (13.2.3), se deben tomar en cuenta las siguientes observaciones:

1. A medida que y_1 tiende a y_2, *i.e.*, la altura de la onda se vuelve incremental), la ecuación (13.2.3) se convierte en

$$u_1 + c = \sqrt{gy_1}$$

Además, si el agua no se mueve, entonces

$$c = \sqrt{gy_1}$$

o

$$1 = \frac{c}{\sqrt{gy_1}}$$

que es, por definición, el número de Froude.

2. Si $c = 0$, entonces la ecuación (13.2.3) es análoga a las derivadas para el salto hidráulico en el capítulo 3 *i.e.*, las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5). Por ende, una onda positiva se puede considerar como un salto hidráulico en movimiento.

EJEMPLO 13.1

Un canal horizontal sin fricción con 3.0 m (9.8 ft) de ancho tiene un gasto de 18 m³/s (640 ft³/s) con un tirante de 2.0 m (6.6 ft). Si el gasto se reduce bruscamente a 12 m³/s (420 ft³/s), estímese la altura y la velocidad de la onda resultante. Este ejemplo fue presentado por primera vez por Streeter y Wylie (1975).

Solución

Según los datos del problema

$$y_1 = 2.0 \text{ m } (6.6 \text{ ft})$$

y

$$u_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{18}{(2.0)(3.0)} = 3.0 \text{ m/s } (9.8 \text{ ft/s})$$

además

$$q_2 = u_2 y_2 = \frac{Q_2}{b} = \frac{12}{3.0} = 4.0 \text{ (m}^3\text{/s)/m } [43 \text{ (ft}^3\text{/s)/ft}]$$

si se desarrolla la ecuación (13.2.1)

$$u_1 y_1 + y_1 c = u_2 y_2 + y_2 c$$

$$u_1 y_1 = u_2 y_2 + c(y_2 - y_1)$$

y si se sustituye da

$$(3.0)(2.0) = 4.0 + c(y_2 - 2.0)$$
$$6.0 = 4.0 + c(y_2 - 2.0)$$

Al resolver las ecuaciones anteriores para la celeridad de la onda se tiene

$$c = \frac{6.0 - 4.0}{y_2 - 2.0} = \frac{2.0}{y_2 - 2.0} \qquad (13.2.4)$$

Si se reordena la ecuación (13.2.2) da

$$y_2^2 - y_1^2 = \left(\frac{2y_1}{g}\right)(u_1 + c)(u_1 - u_2)$$

y al sustituir se tiene

$$y_2^2 - (2.0)^2 = 2\left(\frac{2.0}{9.8}\right)(c + 3.0)(3.0 - u_2)$$
$$y_2^2 - (2.0)^2 = 0.41(c + 3.0)(3.0 - u_2)$$

Cuando la ecuación (13.2.4) se sustituye en la ecuación anterior para c y $u_2 = 4.0/y_2$ da

$$y_2^2 - 4.0 = 0.41\left(\frac{2.0}{y_2 - 2.0} + 3.0\right)\left(3.0 - \frac{4.0}{y_2}\right)$$

Esta ecuación se resuelve por tanteo, y se encuentra que

$$y_2 = 2.8 \text{ m } (9.2 \text{ ft})$$

y
$$u_2 = \frac{4.0}{y_2} = \frac{4.0}{2.8} = 1.4 \text{ m/s } (4.6 \text{ ft/s})$$

Por tanto, la altura de la onda es 0.80 m (2.6 ft) y la celeridad o velocidad de la onda es

$$c = \frac{2}{y_2 - 2.0} = \frac{2}{2.8 - 2.0} = 2.5 \text{ m/s } (8.2 \text{ ft/s})$$

La onda positiva se produce con frecuencia el disminuir el gasto aguas abajo, mientras que la onda negativa puede originarse por un aumento en el gasto aguas abajo. En la figura 13.2*a* se muestra una onda negativa desde el punto de vista de un sistema de coordenadas estacionarias, y la figura 13.2*b* muestra la misma situación, desde un punto de vista de un sistema de coordenadas que se traslada a la velocidad de la onda. Si se aplica la ecuación de continuidad entre los puntos 1 y 2 de la figura 13.2*b* se obtiene

$$(u - \delta u - c)(y - \delta y) = (u - c)y$$

y al desarrollarla

$$-u\,\delta y + c\,\delta y - y\,\delta u - yc + yu + \delta y\,\delta u = uy - cy$$

Si se desprecia el término $\delta y\,\delta u$, la ecuación anterior se puede simplificar para dar

$$(c - u)\,\delta y = y\,\delta u \qquad (13.2.5)$$

o

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{c - u}{y} \qquad (13.2.6)$$

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control definido en la figura 13.2*b*, es

$$\gamma\frac{(y - \delta y)^2}{2} - \gamma\frac{y^2}{2} = \frac{\gamma}{g}[u - c - (u - \delta u - c)](u - c)\,y$$

Cuando se simplifica esta ecuación y se desprecia los productos de cantidades pequeñas, se obtiene

$$\delta y = \frac{c - u}{g}\,\delta u$$

o

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{g}{c - u} \qquad (13.2.7)$$

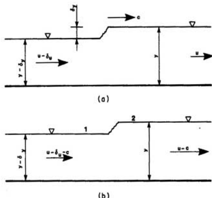


FIGURA 13.2 *a*) Onda negativa en un canal rectangular; sistema de coordenadas estacionarias. *b*) Onda negativa en un canal rectangular; sistema de coordenadas móvil.

Al igualar las ecuaciones (13.2.6) y (13.2.7) y al resolver para c da

$$\frac{c-u}{y} = \frac{g}{c-u}$$

$$(c-u)^2 = gy$$

o

$$c = u \pm \sqrt{gy} \tag{13.2.8}$$

La ecuación (13.2.8) demuestra que la velocidad de una onda elemental en agua quieta es $\sqrt{gy}$; en el caso de una onda negativa elemental, su celeridad es $\sqrt{gy}$ relativa al flujo.

Si se elimina c de las ecuaciones (13.2.6) y (13.2.7), el resultado es

$$\frac{du}{dy} = \pm \sqrt{\frac{g}{y}} \tag{13.2.9}$$

Por ende, dadas las condiciones de frontera apropiadas, se puede resolver el problema.

EJEMPLO 13.2

Al cerrar una compuerta en forma parcial se produce una onda negativa aguas abajo de ésta. Si el canal es rectangular y no tiene fricción, determínese la celeridad de la onda y la velocidad del flujo, justo atrás de la onda.

Solución

Hágase referencia a la figura 13.3; antes de que se bajara la compuerta, el tirante era y_0 y la velocidad del flujo u_0. Después de bajar la compuerta, el tirante es y_1 y la velocidad u_1. Ya que la onda se mueve en la dirección coordenada $+x$, la ecuación (13.2.8) es

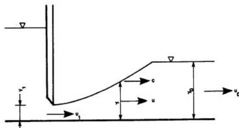


FIGURA 13.3 Generación de una onda negativa por cierre de compuerta.

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{g}{y}}$$

Si se integra esta ecuación y se elimina la constante de integración al aplicar las condiciones iniciales da

$$u = u_0 - 2\sqrt{g}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \qquad (13.2.10)$$

La celeridad de la onda está dada por la ecuación (13.2.8) como

$$c = u + \sqrt{gy}$$

o, al sustituir para u

$$c = u_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy} \qquad (13.2.11)$$

Si se baja la compuerta en el tiempo $t = 0$, entonces la posición de la onda la determina

$$x = ct$$

o

$$x = (u_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy})t \qquad (13.2.12)$$

Si se elimina y de las ecuaciones (13.2.11) y (13.2.12), el resultado es

$$u = \frac{u_0}{3} + \frac{2}{3}\frac{x}{t} - \frac{2}{3}\sqrt{gy_0}$$

EJEMPLO 13.3

En la figura 13.3 la compuerta se mueve en un tiempo $t = 0$, de tal forma que el gasto se reduce en un 50%. Si inicialmente, $u_0 = 20$ ft/s (6.1 m/s) y $y_0 = 10$ ft (3.0 m), determínese u_1, y_1, y el perfil de la superficie del agua.

Solución

En el tiempo $t = 0$, la siguiente relación de continuidad es válida:

$$q = u_0 y_0 = 20(10) = 200 \text{ (ft}^3\text{/s)/ft } [18.6 \text{ (m}^3\text{/s)/m}]$$

donde q es el gasto por unidad de ancho o unitario. Después que se baja la compuerta

$$q = 0.5(u_0 y_0) = 0.5(200) = 100 = u_1 y_1 \qquad (13.2.13)$$

Según la ecuación (13.2.10)

$$u_1 = u_0 - 2\sqrt{g}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y_1})$$

o

$$= 20 - 2\sqrt{32.2}(\sqrt{10} - \sqrt{y_1}) \qquad (13.2.14)$$

$$= 20 - 11.3(3.2 - \sqrt{y_1})$$

Las ecuaciones (13.2.13) y (13.2.14) deben resolverse simultáneamente por tanteo —o por alguna otra técnica— para determinar los valores de y_1 y u_1. O

$$y_1 = 7.0 \text{ ft } (2.1 \text{ m})$$

y

$$u_1 = 14 \text{ ft/s } (4.3 \text{ m/s})$$

La forma de la superficie del agua está dada por la ecuación (13.2.12) o

$$x = (u_0 - 2\sqrt{gy_0} + \sqrt{gy})t$$

y

$$= [20 - 2\sqrt{32.2(10)} + 3\sqrt{32.2y}]t$$

$$= (17\sqrt{y} - 16)t$$

Uno de los problemas más críticos e interesantes en el tema de flujo rápidamente variado no permanente es el de una ruptura catastrófica de presa. Puede obtenerse una solución analítica de este problema cuando se supone que existe un canal horizontal no friccionante, con un tirante y_0 en un lado de la compuerta y sin agua en el otro lado (Fig. 13.4*a*). La compuerta se quita bruscamente. Si se desprecian las aceleraciones verticales, entonces $u_0 = 0$, y varía desde y_0 hasta 0, y la velocidad de flujo en cualquier sección quedaría dada por la ecuación (13.2.10) o

$$u = -2\sqrt{g}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \qquad (13.2.15)$$

por lo que la forma de la superficie delagua estaría dada por la ecuación (13.2.12) o

$$x = (3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_0})t \qquad (13.2.16)$$

De la ecuación (13.2.16), se determina que en $x = 0$ para todos los t,

$$u = \tfrac{4}{9}y_0 \qquad (13.2.17)$$

Al sustituir esta relación en la ecuación (13.2.15) da

$$u = -\tfrac{2}{3}\sqrt{gy_0} \qquad (13.2.18)$$

lo cual demuestra que la velocidad del flujo es independiente del tiempo. En esta ecuación, el signo negativo indica que la onda se mueve hacia aguas arriba. La forma de la superficie del agua es la de una parábola cóncava hacia arriba con su vértice al final de la onda (Fig. 13.4*b*). En el caso de una ruptura real de la presa, esta solución puede dar una estimación burda de la situación

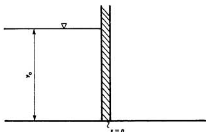
verdadera, en la que la fricción y la aceleración vertical son consideraciones importantes.

Cuando chocan dos ondas que viajan en direcciones opuestas (Fig. 13.5*a*), el resultado equivale a dos nuevas ondas que viajan en direcciones invertidas (Fig. 13.5*b*). La solución se puede obtener mediante la aplicación de los principios de continuidad y de cantidad de movimiento a la situación mostrada en la figura 13.5*c*.

Continuidad

$$(u^L + c^L)y^L = (u + c^L)y \tag{13.2.19}$$

$$(u^R + c^R)y^R = (u - c^R)y \tag{13.2.20}$$



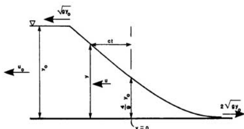


FIGURA 13.4 *a)* Problema de la ruptura de presa antes de que se quite la compuerta. *b)* Problema de la ruptura de presa después de que se quitó la compuerta.

Cantidad de movimiento

$$[(y^L)^2 - y^2] = \frac{2y^L}{g}(u^L + c^L)(u^L - u) \qquad (13.2.21)$$

$$[y^2 - (y^R)^2] = \frac{2y^R}{g}(u^R + c^R)(u - u^R) \qquad (13.2.22)$$

En las ecuaciones (13.2.19) a (13.2.22) se conoven u^R, y^R, u^L, y^L, y g, mientras que se desconocen y, c^R, c^L, y u. Por ende, se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, así que y, c^R, c^L, y u pueden determinarse por una solución de las ecuaciones simultáneas.

La presencia de un escalón en el canal también puede provocar una situación bastante compleja al pasar la onda sobre éste.

Nota: un escalón puede ser real o ficticio. Por ejemplo, un escalón ficticio se puede emplear para simular el efecto de la pendiente del canal. En las secciones anteriores de este capítulo, la pendiente del canal se consideró despreciable; si éste no fuese el caso, entonces puede efectuarse un análisis simplificado de la onda, si se supone que el efecto de la pendiente es como una serie de escalones. Si se efectúa este análisis, la longitud del canal se divide en una serie de tramos, y cada tramo se trata como si fuese horizontal. La mer-

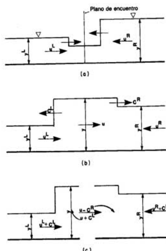


FIGURA 13.5 *a)* Posición de las dos ondas; antes del encuentro. *b)* Posición de las dos ondas; después del encuentro. *c)* Encuentro de las dos ondas reducido a flujo permanente.

ma efectiva en la elevación del fondo se representa por un escalón cuya altura F es igual a la pendiente del canal, multiplicada por la longitud del tramo (Fig. 13.6*a*).

Cuando la onda llega al escalón se producen dos ondas nuevas: una viaja aguas arriba y otra va hacia aguas abajo (Fig. 13.6*b*). Nuevamente, el problema puede resolverse aplicando los principios de continuidad y cantidad de movimiento (Fig. 13.6*c*) o

Continuidad

$$(u^L + c^L)y^L = (u + c^L)y \qquad (13.2.23)$$

$$(u^R + c^R)y^R = (u^L - c^R)(y + F) \qquad (13.2.24)$$

Cantidad de movimiento

$$(y^L)^2 - y^2 = \frac{2}{g}(u^L + c^L)y^L(u^L - u) \qquad (13.2.25)$$

$$(y + F)^2 - (y^R)^2 = \frac{2y^R}{g}(u^R + c^R)(u^L + u^R) \qquad (13.2.26)$$

En las ecuaciones anteriores se desconocen u, c^L, u^L, c^R, y y. Por ende, se tienen cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. La relación requerida para resolver el problema es

$$uy = u^L(y + F) \qquad (13.2.27)$$

13.3 RUPTURA DE UNA PRESA

Un ejemplo significativo y de importancia crucial de flujo rápidamente variado no permanente es la falla o ruptura de una presa. Cuando falla una presa, se libera el agua almacenada y se puede producir una inundación catastrófica en el valle, aguas abajo. El Army Corps of Engineers de los Estados Unidos (escrito anónimo, 1975) ha estimado que en ese país de América hay aproximadamente 50 000 presas con alturas mayores a los 25 ft (7.6 m), o volúmenes almacenados en exceso a los 50 acre-ft (62 000 m^3). Este reporte además clasificó a 20 000 de estas presas, cuya ubicación —en caso de falla— produciría importantes pérdidas de vidas humanas y/o daños materiales.

Las fallas de presas son causadas muchas veces por el derrame de agua sobre la estructura, el cual, a su vez, es ocasionado por una capacidad inadecuada del vertedor de demasías, la infiltración o los entubamientos a través de la cortina o sobre los conductos internos, las fallas del talud, los daños por terremotos, la licuación de cortinas de tierra por terremotos, o por las ondas ge-

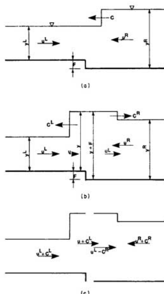


FIGURA 13.6 *a*) Onda sobre un escalón; antes de su llegada. *b*) Onda sobre un escalón; después de su llegada. *c*) Onda sobre un escalón reducida a flujo permanente.

neradas dentro del vaso por derrumbes. Middlebrooks (1952) describe las fallas de presas que ocurrieron en los Estados Unidos previas a 1951; Johnson e Illes (1976) han resumido fallas de presas en todo el mundo.

En las secciones anteriores se presentó y discutió una solución simplificada del problema de ruptura de presa. Recuérdese que en este análisis se supuso que la estructura completa fallaba en forma instantánea. Aunque, en general, la suposición de falla instantánea de la estructura no es muy realista, varios investigadores la han empleado (véase, por ejemplo, Stoker, 1957, Su y Barnes, 1970, y Sakkas y Strelkoff, 1973). Otros investigadores (e.g., el Corps of Engineers, escritos anónimos, 1960, 1961, y Fread, 1982) han reconocido que la formación de un boquete o abertura en la presa es un fenómeno que depende del tiempo. En la discusión que sigue, el término *rúptura o boquete* se empleará para referirse a la abertura que se forma en la cortina a medida que falla la cortina.

Las cortinas de tierra o enrocamiento, que con mucho son más numerosas que todas las otras cortinas juntas, no fallan en forma completa ni instantánea.

Fread (1982) notó que una ruptura completamente formada en una cortina de tierra tiende a tener un ancho b que, por lo general, está dentro de los siguientes valores.

$$h_D < \bar{b} < 3h_D \tag{13.3.1}$$

donde h_D = altura de la cortina. Para cortinas de tierra, el ancho de la ruptura es menor que el ancho total de la cortina. Además, la formación de la ruptura requiere una cantidad finita de tiempo que puede variar desde unos minutos hasta algunas horas, según sea la altura de la cortina, los materiales empleados en su construcción, el grado de compactación y la magnitud y duración del agua que se derrama. La falla por entubamiento se presenta en algún punto debajo de la corona de la cortina, y es el resultado de canales internos que se forman dentro de la cortina con el agua que se escapa. A medida que el proceso de erosión se lleva a cabo, se forma un boquete cada vez mayor; el tamaño de este boquete aumenta mucho más cuando la corona de la cortina cae a la larga hacia la cavidad producida. Debe notarse en este momento que las presas de tierras mal construidas y los terraplenes que hacen la función de cortina en condiciones extremas (e.g., terraplenes de ferrocarriles y pilas de materiales de desecho) pueden fallar en minutos y tener anchos de ruptura cercanos al límite superior definido por la ecuación (13.3.1), o aun exceder este límite. También debe notarse que las presas formadas por escombros de derrumbes tendrán características de falla que pueden diferir en forma importante de las anotadas arriba para presas de tierra construidas.

Las cortinas de concreto de gravedad también tienden a fallar con rupturas parciales, a medida que una o más de las secciones monolíticas de concreto formadas durante su construcción se ven forzadas a separarse por la acción del agua que escapa. El tiempo requerido para la formación de la ruptura, en este caso, es de pocos minutos.

Para el caso de cortinas de concreto de arco, la suposición de falla completa e instantánea puede acercarse mucho a la situación real.

En este momento, se discutirá el modelo de ruptura de presa desarrollado por Fread (1982). Aunque se dispone de varios modelos (e.g., Brevard y Theurer, 1979, Balloffet, *et al.*, 1974, Rajar, 1978, y Gundlach y Thomas, 1977), este modelo representa el tratamiento más actualizado y tiene un grado bastante bueno de flexibilidad.

Hidrograma de salida de la presa

Como notó Fread (1982), una capital fuente de error en la estimación del hidrograma de salida es la cuantificación del tamaño, de la forma, y del tiempo de formación de la ruptura. De estas tres consideraciones, la de la forma es la menos importante, además, la del tiempo de formación se vuelve cada vez más insignificante a medida que aumenta el volumen en el vaso. En el tiempo de la falla, (i.e., en cualquier momento después de que se formó la ruptura) el gasto total de la presa consiste en el flujo a través de las salidas de diseño

y el flujo a través de la ruptura o boquete que puede aproximarse como el flujo sobre un vertedor de cresta ancha o

$$Q = Q_D + Q_b \tag{13.3.2}$$

donde Q = gasto total de salida
Q_D = gasto a través de las salidas de diseño
Q_b = gasto a través de la ruptura

En la Figura 13.7, el gasto a través del boquete en el modelo computacional DAMBRK (Fread, 1982) se estima por

$$Q_b = C_1(h - h_b)^{1.5} + C_2(h - h_b)^{2.5} \tag{13.3.3}$$

donde
$$C_1 = 3.1 b_i C_v K_s \tag{13.3.4}$$

$$C_2 = 2.45 z C_v K_s \tag{13.3.5}$$

$$h_b = h_d - (h_d - h_{bm}) \frac{t_b}{\tau} \quad \text{para } t_b \leq \tau \tag{13.3.6}$$

$$= h_{bm} \quad \text{para } t_b > \tau \tag{13.3.7}$$

$$b_i = \frac{b t_b}{\tau} \quad \text{para } t_b \leq \tau \tag{13.3.8}$$

$$C_v = 1.0 + \frac{0.023 Q^2}{B_d^2 (h - h_{bm})^2 (h - h_b)} \tag{13.3.9}$$

$$K_s = 1.0 \quad \text{para } \frac{h_t - h_b}{h - h_b} \leq 0.67 \tag{13.3.10}$$

$$= 1.0 - 27.8 \left(\frac{h_t - h_b}{h - h_b} - 0.67 \right) \quad \text{para } \frac{h_t - h_b}{h - h_b} > 0.67 \tag{13.3.11}$$

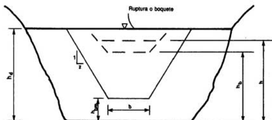


FIGURA 13.7 Ruptura de una presa. (*Fread, 1982.*)

donde h = elevación del agua almacenada
h_b = elevación instantánea del fondo de la ruptura
h_d = altura de la corona
b_i = ancho instantáneo de la ruptura
t_b = intervalo de tiempo desde el inicio de la ruptura
h_t = tirante aguas abajo
K_s = factor de corrección por el efecto del nivel de aguas abajo en el gasto del vertedor
C_v = factor de corrección por velocidad de llegada
τ = tiempo desde el inicio de la ruptura hasta la "falla completa"
h_{bm} = elevación final del fondo del boquete
z = talud del boquete (Fig. 13.7)
b = ancho final de la ruptura

La elevación aguas abajo (h_t) se estima a partir de la ecuación de Manning o

$$Q = \frac{\phi}{n} AR^{2/3}\sqrt{S}$$

donde cada término en esta ecuación se aplica al canal inmediatamente aguas abajo de la presa. Dado A y R son función de h_t, la ecuación de Manning en esta situación es implícita.

Si la ruptura o boquete se forma por entubamiento, entonces las ecuaciones dadas arriba —que suponen un flujo sobre un vertedor de cresta ancha— deben reemplazarse por la ecuación de flujo en un orificio o

$$Q_b = 4.8A_p(h - \bar{h})^{0.5} \tag{13.3.12}$$

donde

$$A_p = [2b_i + 4z(h_f - h_b)](h_f - h_b) \tag{13.3.13}$$

$$\bar{h} = h_f \quad \text{para } h_t \le (2h_f - h_b) \tag{13.3.14}$$

$$= h_t \quad \text{para } h_t > (2h_f - h_b) \tag{13.3.15}$$

$$h_b = h_f - (h_f - h_{bm})\frac{t_b}{\tau} \quad \text{para } t_b \le \tau \tag{13.3.16}$$

donde h_f = altura de la superficie del agua cuando comienza el entubamiento. Si $\bar{h} = h_f$ y

$$h - h_b < 2.2(h_f - h_b) \tag{13.3.17}$$

entonces el flujo deja de ser de tipo orificio y se convierte en flujo tipo vertedor de cresta ancha.

Todas las ecuaciones que rigen el gasto sobre la ruptura de la presa dependen de la elevación de la superficie del agua en el vaso. Obviamente, la salida de gasto del vaso produce una disminución de h, lo que a la vez produce una disminución de Q; cualquier gasto de entrada al vaso produce un aumento en

h que ocasiona un aumento en Q. Por ende, la determinación instantánea de Q requiere una consideración de las características de gastos de salida y de entrada, así como las del almacenamiento del vaso. El modelo DAMBRK emplea la técnica de tránsito hidrológico de avenidas, que está basada en el principio de conservación de masa o

$$\frac{dS}{dt} = I - Q \tag{13.3.18}$$

donde dS/dt = ritmo de crecimiento del volumen almacenado
I = gasto de entrada
Q = gasto total de salida

En la forma de diferencias finitas la ecuación (13.3.18) queda como

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{2} - \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{2} \tag{13.3.19}$$

y

$$\Delta S = \frac{[A_s(t + \Delta t) + A_s(t)][h(t + \Delta t) - h(t)]}{2} \tag{13.3.20}$$

donde A_s = área superficial del vaso correspondiente a la elevación h. Si se combinan las ecuaciones (13.3.2), (13.3.3) o (13.3.12), (13.3.19), y (13.3.20) se obtiene una función para estimar el gasto. En la ecuación resultante sólo A_s y h son incógnitas y A_s es una función de h. Por ende, puede resolverse la ecuación mediante una técnica iterativa para determinar h, y después estimarse Q. El incremento del tiempo empleado en este cálculo debe ser lo suficientemente pequeño para minimizar el error de la integración numérica, e.g., $\tau/50$.

Nota: el empleo de una técnica hidrológica de tránsito de avenidas implica que la superficie del vaso se encuentra nivelada, lo que es una buena aproximación sólo si el rompimiento de la cortina ocurre lentamente. Si la presa falla en forma instantánea y produce una onda negativa en el vaso, entonces debe emplearse una técnica de tránsito más compleja.

El método anterior para la estimación del hidrograma de salida para una presa con un boquete es un componente del modelo DAMBRK y requiere tener acceso a una computadora relativamente grande y rápida para su solución. En muchos casos, el uso de modelos complejos como el DAMBRK quizás no sea factible, ya que el tiempo de respuesta para advertencia es limitado y/o no se dispone de facilidades de cómputo adecuadas. Por estas razones Wetmore y Fread (1981) desarrollaron una técnica simplificada para estimar el gasto máximo de salida a través de una ruptura y el nivel máximo a una distancia especificada aguas abajo de la presa con ruptura. El modelo original se ha modificado (escrito anónimo, 1982).

En el modelo simplificado de ruptura de presa se supone que la ruptura es

de forma rectangular (Fig. 13.8). Entonces, el gasto instantáneo a través del boquete está dado por la ecuación del vertedor de cresta ancha o

$$Q_b = 3.1 b_r h^{(1.5)} \qquad (13.3.21)$$

donde b_r = ancho del boquete, ft
h = carga sobre el boquete
Q_b = gasto a través del boquete, ft³/s

Si el boquete se forma en un tiempo finito τ, el volumen de agua que sale del vaso está dado por la integral del gasto instantáneo. Este volumen de salida también debe ser igual al producto de la superficie del vaso A_s por la integral del descenso del nivel instantáneo y_d sobre el cambio total en el nivel del vaso y_f, o

$$3.1 b_r \int_0^{\tau} h^{1.5}\, dt = A_s \int_0^{y_f} dy_d \qquad (13.3.22)$$

El desarrollo de la ecuación (13.3.22) supone tácitamente que la superficie del vaso permanece constante durante el intervalo de tiempo τ en el que se forma el boquete.

La carga instantánea sobre el vertedor puede expresarse en términos del descenso instantáneo de nivel o

$$h = (H - y_b) - y_d \qquad (13.3.23)$$

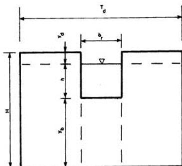


FIGURA 13.8 Geometría del boquete instantáneo para cálculos simplificados del gasto, con $0 \le t \le \gamma$. (*Wetmore y Fread, 1981.*).

donde y_b = altura instantánea del fondo del boquete (Fig. 13.8). Al sustituir la ecuación (13.3.23) en la ecuación (13.3.22) se obtiene una expresión que no se puede integrar en forma analítica. Wetmore y Fread (1981) supusieron que la ecuación (13.3.23) puede aproximarse por

$$h = \frac{1}{\Gamma}(H - y_d) \tag{13.3.24}$$

donde Γ = es el coeficiente empírico correctivo para la suposición inherente en esta ecuación. Al sustituir la ecuación (13.3.24) en la ecuación (13.3.22) se obtiene

$$\frac{3.1b_r}{\Gamma}\int_0^{\tau}(H - y_d)^{1.5}\,dt = A_s\int_0^{y_f} dy_d$$

Si se reordena esta ecuación

$$\int_0^{\tau} dt = \frac{\Gamma A_s}{3.1b_r}\int_0^{y_f}\frac{dy_d}{(H - y_d)^{3/2}} \tag{13.3.25}$$

y al resolver y evaluar en los límites de integración da

$$\tau = \frac{2A_s\Gamma}{3.1b_r}\left(\frac{1}{\sqrt{H - y_f}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right) \tag{13.3.26}$$

donde A_s = superficie del vaso, ft²
b_r = ancho del boquete, ft
τ = tiempo de la falla, s

Respecto a estas ecuaciones, debe notarse que la suposición de que la ecuación (13.3.23) puede aproximarse con la (13.3.24) se verificó al comparar los gastos calculados con esta suposición, con los estimados por el modelo DAMBRK. A partir de estas comparaciones también se determinó que

$$\Gamma = 3$$

Cuando se sustituye este valor de Γ en la ecuación (13.3.26) se obtiene

$$\tau = \frac{1.94A_s}{b_r}\left(\frac{1}{\sqrt{H - y_f}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right) \tag{13.3.27}$$

Si τ es grande y el volumen de almacenamiento del vaso es pequeño, entonces las suposiciones hechas en el desarrollo anterior proporcionan estimaciones del gasto pico de ruptura que son mucho mayores que las que se observarían en la realidad.

Al reordenar la ecuación (13.3.27) se obtiene una expresión para la carga máxima sobre el vertedor o

$$H - y_f = h(\text{máx}) = \left\{\frac{1.94A_s/b_r}{\tau + [1.94A_s/(b_r\sqrt{H})]}\right\}^2 \tag{13.3.28}$$

Entonces, de la ecuación (13.3.21) el gasto máximo de salida del boquete es

$$Q(\text{máx}) = 3.1b_r[h(\text{máx})]^{1.5} = 3.1b_r\left\{\frac{1.94A_s/b_r}{\tau + [1.94A_s/(b_r\sqrt{H})]}\right\}^3 \qquad (13.3.29)$$

Como se notó anteriormente, sólo en contadas ocasiones fallará la presa en forma rápida, y en este caso se producirá una onda negativa que puede alterar en forma importante el gasto a través de la ruptura. En este caso, la ecuación (13.3.29) no dará una estimación precisa del gasto pico de salida. Si

$$\tau < 3.6H$$

entonces

$$Q(\text{máx}) = 3.1b_r(I_v I_n H)^{1.5} \qquad (13.3.30)$$

donde

$$I_v = 1.0 + 0.148\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^2(\beta+1)^2 - 0.083\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^3(\beta+1)^{5/2}$$

$$I_n = 1.0 - 0.5467\left(\frac{b_r}{T_d}\right)(\beta+1)^{1/2} + 0.2989\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^2(\beta+1)^{1/4}$$

$$- 0.1634\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^3(\beta+1)^{1/8} + 0.0893\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^4(\beta+1)^{1/16}$$

$$- 0.0486\left(\frac{b_r}{T_d}\right)^5(\beta+1)^{1/32}$$

T_d = ancho superficial del valle en la corona de la cortina y β = un coeficiente de ajuste del canal que se define abajo (estudio anónimo, 1982).

En este momento del análisis, se debe estimar el tirante inmediatamente aguas abajo de la cortina rota para el gasto Q(máx) para determinar si el gasto máximo se debe corregir por sumergencia a la salida. Aunque se presenta en el capítulo 1 un método para interpolar las características geométricas requeridas del canal, se empleará aquí el método de interpolación usado por Wetmore y Fread (1981). Se supone que el canal aguas abajo de la presa es prismático, que puede definirse por una sección transversal de una sola distancia ponderada con un ancho superior del canal, como una función de potencia del tirante. Sakkas y Strelkoff (1973) también describen un método similar a éste para definir el canal de aguas abajo. La aproximación del canal como un canal prismático se efectúa en tres pasos: primero, se obtienen datos del ancho superficial contra tirante, a partir de levantamientos en el sitio o de planos topográficos. Después, para cada tirante y_i, se define un ancho ponderado en la distancia superior $\overline{T}_i$

$$\overline{T}_i = \sum_{j=2}^{N}\left[\frac{(X_j - X_{j-1})(T_{i,j-1} + T_{i,j})/2}{X_N - X_1}\right] \qquad (13.3.31)$$

donde y_i = tirante i-ésimo ($i = 1, 2, \ldots, M$)
$T_{i,j}$ = ancho superficial correspondiente al tirante y_i
$\overline{T}_i$ = ancho superficial ponderado en distancia
X_j = distancia aguas abajo a la sección transversal j ($j = 1, 2, \ldots, N$)

El uso recursivo de la ecuación (13.3.31) da una tabla de valores de $\overline{T}_i$ contra y_i, que pueden emplearse para desarrollar una ecuación de regresión para el ancho superficial ponderado en distancia de la forma

$$T = \theta y^{\beta} \tag{13.3.32}$$

que describe la geometría prismática del canal. Los parámetros β y θ se estiman con

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{M} [(\log y_i)(\log \overline{T}_i)] - \left[\sum_{i=1}^{M} (\log y_i) \sum_{i=1}^{M} (\log \overline{T}_i) \right] \Big/ M}{\sum_{i=1}^{M} (\log y_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{M} \log y_i \right)^2 \Big/ M} \tag{13.3.33}$$

y

$$\log \theta = \frac{\sum_{i=1}^{M} \log \overline{T}_i}{M} - \beta \left(\frac{\sum_{i=1}^{M} \log y_i}{M} \right) \tag{13.3.34}$$

o

$$\theta = 10^{\log \theta} \tag{13.3.35}$$

En el caso de un canal de aguas abajo con taludes muy inclinados o vegetación muy densa que están muy próximas al canal, quizá sea necesario definir un tirante y_s arriba del cual la ecuación (13.3.32) ya no es válida (Fig. 13.9).

Dada esta definición empírica del canal de aguas abajo y el gasto máximo de la presa rota, se puede estimar el tirante máximo inmediatamente aguas abajo de la presa. Para empezar, se calcula el gasto que corresponde al tirante normal y_s o

$$Q_s = \frac{\phi}{n} \sqrt{S} A_s \left(\frac{A_s}{T_s} \right)^{2/3} \tag{13.3.36}$$

Como consecuencia de la suposición de que el canal es prismático, T_s está dado por la ecuación (13.3.32), con $y = y_s$, así que A_s se estima con

$$A_s = \frac{\theta y_s^{\beta+1}}{\beta + 1} \tag{13.3.37}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (13.3.32) y (13.3.37) en la ecuación (13.3.36) da

$$Q_s = \frac{\phi}{n}\sqrt{S}\left[\frac{\theta}{(\beta+1)^{5/3}}\right] y_s^{\beta+5/3} \tag{13.3.38}$$

Si el gasto dado por la ecuación (13.3.38) es mayor que el gasto de pico estimado de la presa rota, i.e.,

$$Q_s > Q(\text{máx})$$

entonces, el tirante máximo inmediatamente abajo de la cortina está dado por

$$y(\text{máx}) = \left[\frac{Q(\text{máx})}{\zeta}\right]^{1/(\beta+5/3)} \tag{13.3.39}$$

donde

$$\zeta = \frac{\phi}{n}\sqrt{S}\,\frac{\theta}{(\beta+1)^{5/3}}$$

Recuérdese que ϕ es un coeficiente cuyo valor se determina según el sistema de unidades empleado; esto es, $\phi = 1$ para el SI de unidades y $\phi = 1.49$ para el sistema inglés de unidades. Si el gasto dado por la ecuación (13.3.38) es menor al gasto pico dado por la presa rota, i.e.,

$$Q_s < Q(\text{máx})$$

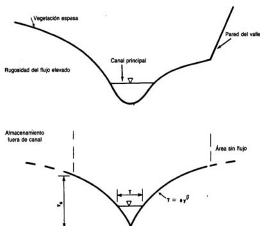


FIGURA 13.9 Sección transversal prismática aproximada de aguas abajo. (*Wetmore y Fread, 1981.*)

entonces, el tirante máximo inmediatamente aguas abajo de la cortina está dado por

$$y(\text{máx}) = [Q(\text{máx})]^{3/5}\left[\frac{1}{\zeta(\beta+1)^{5/3}y_s^2}\right]^{3/5} + \frac{\beta}{\beta+1}y_s \qquad (13.3.40)$$

Una vez que se ha determinado el y(máx) con cualquiera de las ecuaciones (13.3.39) o (13.3.40), debe compararse este tirante con la carga sobre el boquete para determinar si se necesita de una corrección por sumergencia.

Nota: en el caso de la falla instantánea, no se requiere una corrección por sumergencia.

Si

$$\frac{y(\text{máx})}{h(\text{máx})} > 0.67 \qquad (13.3.41)$$

donde h(máx) está dada por la ecuación (13.3.28), entonces debe estimarse un factor de corrección por elevación de aguas abajo, según

$$K_s^* = 1 - 27.8\left[\frac{y(\text{máx})}{h(\text{máx})} - 0.67\right]^3 \qquad (13.3.42)$$

Este valor de K_s^* se emplea entonces en la ecuación (13.3.43) para obtener un corrector medio de sumergencia o

$$K_s^k = \frac{K_s^* + K_s^{k-1}}{2} \qquad (13.3.43)$$

donde el superíndice k es un contador de iteraciones ($k = 1, 2, \ldots$) y $K_s^0 =$ 1.En este momento, nótese que en algunos casos K_s^* puede estimarse menor que 0; en estos casos, debe fijarse en 0 para prevenir sobrecompensación por sumergencia. Ahora puede obtenerse un gasto en el boquete corregido por

$$Q^k(\text{máx}) = K_s^k Q^{k-1}(\text{máx}) \qquad (13.3.44)$$

Q^k(máx) entonces se compara con Q_s y se estima un nuevo tirante y^k(máx) a partir de la ecuación (13.3.39) o (13.3.40). También, ya que se disminuye el gasto en el boquete, se debe estimar una elevación corregida sobre el boquete o

$$h^k(\text{máx}) = h^{k-1}(\text{máx}) + [Q^{k-1}(\text{máx}) - Q^k(\text{máx})]\,\frac{\tau}{2A_s} \qquad (13.3.45)$$

donde τ está en segundos y A_s está en ft cuadrados. La razón y^k(máx)/ h^k(máx) se calcula y emplea en la ecuación (13.3.42) para estimar el nuevo valor de K_s^*. Si el nuevo valor de la sumergencia media calculada con la ecuación (13.3.43) difiere mucho del calculado en la iteración anterior, entonces debe repetirse el procedimiento. En general, son suficientes dos o tres iteraciones para obtener una estimación precisa del gasto pico en el boquete.

TABLA 13.1 Datos de ruptura de presa

Descripción del parámetro	Parámetro	Valor
Superficie del vaso a la elevación máxima de éste	A_s	350 acre
Altura de la cortina	H	50 ft
Ancho final del boquete	b_r	100 ft
Tiempo de falla	τ	0.75 h
Pendiente aguas abajo	S	0.0008

EJEMPLO 13.4

Para los datos del vaso y el canal, que están resumidos en las tablas 13.1 y 13.2, estímese el gasto pico y el tirante máximo aguas abajo de la cortina. El coeficiente de Manning del canal de aguas abajo se supone que es igual a 0.045. Este ejemplo se presentó por primera vez en un estudio anónimo de 1982.

Solución

El primer paso en la solución de este problema es el establecimiento de una sección transversal ponderada de una sola distancia. Para y = 8 ft (2.4 m), los datos en la tabla 13.2 y en la ecuación (13.3.31) dan

$$\overline{T} = \sum_{j=2}^{N} \left[\frac{(X_j - X_{j-1})(T_{i,j-1} + T_{i,j})/2}{X_N - X_1} \right]$$

y

$$\overline{T}_8 = \frac{(12.3 - 0)(480 + 437)/2 + (40.5 - 12.3)(437 + 456)/2}{40.5 - 0}$$

$$= 450.1 \text{ ft } (137 \text{ m})$$

Para y = 18 ft (5.5 m)

$$\overline{T}_{18} = \frac{(12.3 - 0)(1300 + 1337)/2 + (40.5 - 12.3)(826 + 858)/2}{40.5 - 0}$$

$$= 848.4 \text{ ft } (259 \text{ m})$$

TABLA 13.2 Descripción del canal de aguas abajo

Milla 0.0		Milla 12.3		Milla 40.5	
Tirante ft	Ancho superficial ft	Tirante ft	Ancho superficial ft	Tirante ft	Ancho superficial ft
0	0	0	0	0	0
8	480	8	437	8	456
18	900	18	826	18	858
28	1300	28	1337	28	1338
38	1350	38	1407	38	1456

Para y = 28 ft (8.5 m)

$$\overline{T}_{28} = \frac{(12.3 - 0)(1300 + 1337)/2 + (40.5 - 12.3)(1337 + 1338)/2}{40.5 - 0}$$

$= 1331.7$ ft (406 m)

Para y = 38 ft (12 m)

$$\overline{T}_{38} = \frac{(12.3 - 0)(1350 + 1407)/2 + (40.5 - 12.3)(1407 + 1456)/2}{40.5 - 0}$$

$= 1415.4$ ft (431 m)

Un examen de los datos de la tabla 13.2 y de los cálculos anteriores indica que, a una profundidad mayor de 28 ft (8.5 m), los anchos superficiales aumentan muy lentamente. Por tanto, un valor razonable de y_s es de aproximadamente 30 ft (9.1 m). El ancho superficial ponderado en la distancia para y_s = 30 ft (9.1 m) se determina al interpolar primeramente anchos superficiales apropiados en la tabla 13.2 y después al emplear la ecuación (13.3.31) o

$$\overline{T}_{30} = \frac{(12.3 - 0)(1310 + 1351)/2 + (40.5 - 12.3)(1351 + 1362)/2}{40.5 - 0}$$

$= 1348.6$ ft (411 m)

El coeficiente β para la ecuación (13.3.32) se estima con la ecuación (13.3.33) o

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{M} [(\log y_i)(\log \overline{T}_i)] - \left[\left(\sum_{i=1}^{M} \log y_i \right) \left(\sum_{i=1}^{M} \log \overline{T}_i \right) \right] \Big/ M}{\sum_{i=1}^{M} (\log y_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{M} \log y_i \right)^2 \Big/ M}$$

Los datos de estos cálculos se resumen en la tabla 13.3.

$$\beta = \frac{15.22 - [(5.09)(11.83)]/4}{6.67 - (5.09)^2/4} = 0.86$$

TABLA 13.3 Resumen de los cálculos de β y θ

y_i, ft	$\log y_i$	$(\log y_i)^2$	$\overline{T}_i$, ft	$\log \overline{T}_i$	$\log \overline{T}_i \log y_i$
8	0.90	0.82	450	2.65	2.39
18	1.26	1.58	848	2.93	3.69
28	1.45	2.09	1332	3.12	4.52
30	1.48	2.18	1349	3.13	4.62
	$\Sigma (\log y_i) = 5.09$	$\Sigma (\log y_i)^2 = 6.67$		$\Sigma (\log \overline{T}_i) = 11.83$	$\Sigma (\log \overline{T}_i)(\log y_i) = 15.22$

el coeficiente θ para la ecuación (13.3.32) se estima con las ecuaciones (13.3.34) y (13.3.35) o

$$\log \theta = \frac{\sum_{i=1}^{M} \log \overline{T}_i}{M} - \beta \left(\frac{\sum_{i=1}^{M} \log y_i}{M} \right)$$

Si se emplean los datos de la tabla 13.3

$$\log \theta = \frac{11.83}{4} - 0.86 \left(\frac{5.09}{4} \right) = 1.86$$

y

$$\theta = 10^{\log \theta} = 10^{1.86} = 73.0$$

Por tanto, el ancho superficial ponderado en distancia del canal aguas abajo de la presa, está dado por

$$\overline{T} = 73.0 y^{0.86} \quad \text{para } 0 \leq y \leq 30 \text{ ft}$$

El gasto máximo a través del boquete está dado por la ecuación (13.3.29) o

$$Q(\text{máx}) = 3.1 b_r \left\{ \frac{1.94 A_s / b_r}{\tau + [1.94 A_s / (b_r \sqrt{H})]} \right\}^3$$

$$= 3.1\,(100) \left\{ \frac{1.94(350)(43\,560)/100}{0.75(60)(60) + [1.94(350)(43\,560)/(100\sqrt{50})]} \right\}^3$$

$$= 90\,800 \text{ ft}^3/\text{s } (2570 \text{ m}^3/\text{s})$$

donde, por definición, se tienen 43 560 ft²/acre. El gasto aguas abajo que corresponde a un tirante $y_s = 30$ ft (9.1 m) está dado por la ecuación (13.3.38) o

$$Q_s = \frac{1.49}{n} \sqrt{S} \left[\frac{\theta}{(\beta + 1)^{5/3}} \right] y_s^{\beta + 5/3}$$

$$= \frac{1.49}{0.045} \sqrt{0.0008} \left[\frac{73}{(0.86 + 1)^{5/3}} \right] (30)^{0.86 + 5/3}$$

$$= 131\,000 \text{ ft}^3/\text{s } (3700 \text{ m}^3/\text{s})$$

Ya que $Q_s > Q(\text{máx})$, la ecuación (13.3.39) debe emplearse para determinar $y(\text{máx})$ o

$$\zeta = \frac{\phi}{n} \sqrt{S} \frac{\theta}{(\beta + 1)^{5/3}}$$

$$= \frac{1.49}{0.045} \sqrt{0.0008} \left[\frac{73}{(0.86 + 1)^{5/3}} \right] = 24.3$$

y $$y(\text{máx}) = \left[\frac{Q(\text{máx})}{\zeta}\right]^{1/(\beta+5/3)} = \left(\frac{90\,000}{24.3}\right)^{1/(0.86+5/3)}$$

$$= 25.8 \text{ ft } (7.86 \text{ m})$$

Para verificar si se debe corregir por sumergencia, debe estimarse la carga sobre el vertedor con la ecuación (13.3.28).

$$h(\text{máx}) = \left\{\frac{1.94A_s/b_r}{\tau + [1.94A_s/(b_r\sqrt{H})]}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{1.94(350)(43\,560)/100}{0.75(60)(60) + [1.94(350)(43\,560)/(100\sqrt{50})]}\right\}^2$$

$$= 44.1 \text{ ft } (13.4 \text{ m})$$

La razón entre $y(\text{máx})$ y $h(\text{máx})$ se verifica entonces, ecuación (13.3.41) o

$$\frac{y(\text{máx})}{h(\text{máx})} = \frac{25.8}{44.1} = 0.58$$

Puesto que esta razón es menor que 0.67, el tirante aguas abajo no afecta el gasto a través del boquete.

Tránsito de avenidas

Después de que se ha estimado el hidrograma de salida de la presa fallada, se puede predecir la ocurrencia de inundación en las áreas de aguas abajo, mediante cualquiera de las técnicas de tránsito de avenidas en ríos. Una característica distintiva de las ondas de inundación causadas por ruptura de presas es su gran magnitud, en comparación con las ondas de avenidas normales, y su menor duración. El tiempo, desde el inicio hasta el gasto máximo, es generalmente del mismo orden de magnitud τ y, por ende, puede variar desde unos minutos hasta unas pocas horas. Dada la corta duración y la gran magnitud del gasto pico —características que se combinan para producir componentes de aceleración mucho mayores que las que se producen en avenidas causadas por escurrimientos en cuencas— se requiere a menudo de un método de onda dinámica para transitar en forma precisa el flujo hacia aguas abajo (Fread, 1982). Este método emplea las ecuaciones de St. Venant (Cap. 12); la aplicabilidad de estas ecuaciones al caso de la ruptura de presa se ha demostrado por Terzidis y Strelkoff (1970), y Martin y Zovne (1971).

Wetmore y Fread (1981) y un estudio anónimo (1982) también han desarrollado una técnica no computacional de tránsito de la onda de avenida causada por una ruptura de presa a través del valle de aguas abajo. Las curvas de tránsito empleadas en esta técnica se desarrollaron al usar datos obtenidos a partir de varias corridas del modelo NWS DAMBRK, además, se encuentran agrupadas en familias que están basadas en el número de Froude asocia-

do con los picos de la onda de avenida. El empleo de estas curvas requiere que se definan varios parámetros de tránsito.

El parámetro de distancia X_c se calcula a partir de la ecuación (13.3.46) o la (13.3.47). Si la altura de la cortina H es menor que y_s (Fig. 13.9), entonces

$$X_c = \frac{\beta + 1}{\theta}\left(\frac{V}{H^{\beta+1}}\right)\left[\frac{6}{1 + 4(0.5)^{\beta+1}}\right] \tag{13.3.46}$$

donde X_c = parámetro de distancia, ft
H = altura de la cortina, ft
V = volumen del vaso, ft^3

Si la altura de la cortina es mayor que y_s, entonces

$$X_c = \frac{6V}{\theta y_s^\beta \{3H - 5[\beta y_s/(\beta + 1)]\}} \tag{13.3.47}$$

Dentro de una distancia X_c aguas abajo de la presa fallada, la onda de avenida se atenúa de tal forma que en el punto X_c el tirante es y_x (Fig. 13.10), que está en función del tirante máximo en el tramo y(máx). El tirante medio en el tramo es, por definición,

$$\bar{y} = \frac{y(\text{máx}) + y_x}{2} = \Gamma y(\text{máx}) \tag{13.3.48}$$

donde $\bar{y}$ = tirante medio y Γ = factor de peso que se determina iterativamente. La estimación inicial de Γ es 0.95.

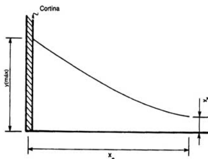


FIGURA 13.10 Amortiguamiento de la onda de inundación.

El tirante hidráulico medio en el tramo se estima con

$$\text{Si } Q(\text{máx}) > Q_s, \text{ entonces } D = \frac{\Gamma y(\text{máx})}{\beta + 1} \tag{13.3.49}$$

$$\text{Si } Q(\text{máx}) < Q_s, \text{ entonces } D = \Gamma y(\text{máx}) - y_s + \frac{y_s}{\beta + 1} \tag{13.3.50}$$

Con el tirante hidráulico determinado, se puede estimar la velocidad media del flujo con la ecuación de Manning

$$\overline{u} = \frac{\phi}{n} \sqrt{S}\, D^{2/3} \tag{13.3.51}$$

donde S = pendiente media del tramo completo de tránsito hacia aguas abajo. El número de Froude medio en el tramo bajo consideración es

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}} \tag{13.3.52}$$

Se define entonces un parámetro adimensional de volumen V^* como la razón entre el volumen del vaso y el volumen del flujo en el tramo definido por la distancia X_c o

$$V^* = \frac{V}{A_x X_c} \tag{13.3.53}$$

donde $\quad \text{Si } Q(\text{máx}) < Q_s, \text{ entonces } A_x = \theta[\Gamma y(\text{máx})]^\beta D \quad (13.3.54)$

$$\text{Si } Q(\text{máx}) > Q_s, \text{ entonces } A_x = \theta y_s^\beta D \tag{13.3.55}$$

En la tabla 13.4 están resumidas las ecuaciones empleadas para calcular los parámetros de tránsito de aguas abajo.

Con los valores conocidos de $\mathbf{F}$ y V^*, puede identificarse la curva correcta de tránsito en las figuras 13.11 a 13.13 y verificarse la estimación original del factor de peso empleado en la ecuación (13.3.48).Esto es, la ordenada de la curva apropiada de tránsito en $X^* = 1$ es la razón entre el gasto pico Q_x en $x = X_c$ yel gasto pico en el boquete $Q(\text{máx})$. Si se conoce Q_x, se puede estimar el tirante en $x = X_c$ a partir de

Si $Q_s > Q_x$

$$y_x = \left[\frac{Q_x}{\zeta}\right]^{1/(\beta+5/3)} \tag{13.3.56}$$

donde $$\zeta = \frac{\phi}{n} \sqrt{S} \frac{\theta}{(\beta + 1)^{5/3}}$$

Si $Q_s < Q_x$

TABLA 13.4 Resumen de las ecuaciones de parámetros de tránsito

Parámetro	Caso I		Caso II	
	Condición	Ecuación	Condición	Ecuación
X_c	$H < y_s$	$X_c = \frac{\beta + 1}{\theta}\left(\frac{V}{H^{\beta+1}}\right)\left[\frac{6}{1 + 4(0.5)^{\beta+1}}\right]$	$H > y_s$	$X_c = \frac{6V}{\theta y_s^\beta \{3H - 5[\beta y_s/(\beta + 1)]\}}$
Γ	$\Gamma = 0.95$ estimación inicial			
D, ft	$Q(\text{máx}) < Q_s$	$D = \frac{\Gamma y(\text{máx})}{\beta + 1}$	$Q(\text{máx}) > Q_s$	$D = \Gamma y(\text{máx}) - y_s + \frac{y_s}{\beta + 1}$
$\overline{u}$, ft/s	$\overline{u} = \frac{1.49}{n}\sqrt{S}\,(D)^{2/3}$			
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}}$			
A_x, ft^2	$Q(\text{máx}) < Q_s$	$A_x = \theta[\Gamma y(\text{máx})]^\beta D$	$Q(\text{máx}) > Q_s$	$A_x = \theta y_s^\beta D$
V^*	$V^* = \frac{V}{A_x X_c}$			

$$y_x = (Q_x)^{3/5}\left[\frac{1}{\zeta(\beta+1)^{5/3}y_s^{\beta}}\right]^{3/5} + \frac{\beta}{\beta+1}\,y_s \tag{13.3.57}$$

El valor de Γ en la ecuación (13.3.48) puede verificarse por

$$\Gamma = \frac{y(\text{máx}) + y_x}{2y(\text{máx})} \tag{13.3.58}$$

Si se tiene una diferencia significativa entre el valor de Γ estimado por la ecuación (13.3.58) y la estimación original de Γ, entonces se deben repetir los cálculos indicados en las ecuaciones (13.3.49) a (13.3.57).

Una vez que se tienen calculados los parámetros de tránsito correctos, puede identificarse la curva correcta de tránsito y adimensionalizar las distancias requeridas hacia aguas abajo para la estimación de los gastos pico con

$$X_i^* = \frac{x_i}{X_c} \tag{13.3.59}$$

donde x_i ($i = 1, 2, \ldots$) = distancia hacia aguas abajo al punto i-ésimo de la predicción. Con esto, para encontrar el gasto pico y el tirante en un punto aguas abajo, se consulta la curva apropiada en las figuras 13.11 a 13.13 y se determina la ordenada correspondiente a V^* y a X_i^*. Al multiplicar el valor de

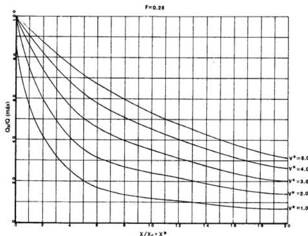


FIGURA 13.11 Curvas simplificadas de tránsito de avenidas, $FC = 0.25$. (*Estudio anónimo*, 1982.)

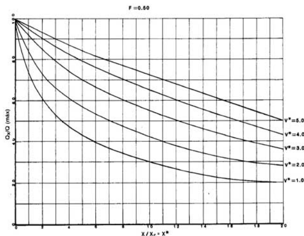


FIGURA 13.12 Curvas simplificadas de tránsito de avenidas, $FC = 0.50$. (*Estudio anónimo, 1982.*)

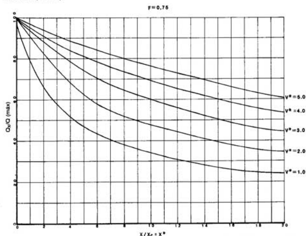


FIGURA 13.13 Curvas simplificadas de tránsito de avenidas, $FC = 0.75$. (*Estudio anónimo, 1982.*)

esta ordenada por Q(máx) da una estimación del gasto pico a una distancia x_i aguas abajo de la presa fallada. El tirante pico en esta ubicación puede estimarse a partir de la ecuación (13.3.56) o la (13.3.57).

El tiempo que tarda la avenida en llegar al punto x_i puede estimarse calculando primero la velocidad media del flujo en un punto intermedio entre la cortina y el punto x_i. En este cálculo, las curvas de tránsito se emplean nuevamente para determinar el gasto pico en $X^* = 0.5$; el tirante pico correspondiente a este flujo se determina aplicando la ecuación (13.3.56) o la (13.3.57). Para este tirante y gasto, el tirante hidráulico es

$$\text{Si } y_x < y_s, \text{ entonces } D_x = \frac{y_x}{\beta + 1} \tag{13.3.60}$$

$$\text{Si } y_x > y_s, \text{ entonces } D_x = y_x - y_s + \frac{y_s}{\beta + 1} \tag{13.3.61}$$

y la velocidad media del flujo es

$$\overline{u} = \frac{\phi}{n} \sqrt{S}\, (D_x)^{2/3} \tag{13.3.62}$$

La velocidad de la onda de avenida queda entonces determinada por la ecuación de celeridad de onda o

$$c = \overline{u} \left[\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right) \right] \tag{13.3.63}$$

donde c = celeridad de onda en ft por segundo. Por ende, el tiempo que tarda en presentarse el gasto y el tirante pico en la posición x_i pies aguas abajo de la presa fallada es

$$t_a = \tau + \frac{x_i}{c} \tag{13.3.64}$$

donde t_a = tiempo de llegada en segundos, si τ se especifica en segundos, x_i en ft, y c en ft por segundo.

Alguien que emplea esta técnica quizá quiera también estimar el tiempo en el que empieza o cesa la inundación en una estación a una distancia especificada aguas abajo. Primero se debe calcular o especificar el gasto Q_f, que corresponde al tirante en la sección transversal, mediante

$$Q_f = \theta y^{\beta} \tag{13.3.65}$$

entonces

$$t_f = t_a - \frac{Q_x - Q_f}{Q_x} \tau \tag{13.3.66}$$

donde t_f = tiempo al inicio de la inundación en segundos. Una estimación del tiempo en el que cesa la inundación está dada por

$$t_c = t_f + \left(\frac{2V}{Q_x} - \tau\right)\left(\frac{Q_x - Q_f}{Q_x}\right) \qquad (13.3.67)$$

donde t_c = tiempo en segundos, para el cual cesa la inundación en una estación aguas abajo.

EJEMPLO 13.5

Con los datos presentados y estimados en el ejemplo 13.4, determínese: 1) el gasto pico, 2) el tirante máximo, y 3) el tiempo en el que se presenta la onda de avenida en estaciones ubicadas a 12.3 y 40.5 millas aguas abajo de la presa fallada. Por conveniencia, los parámetros dados y calculados se resumen en la tabla 13.5. Este ejemplo se presentó por primera vez en un estudio anónimo en 1982.

Solución

Del ejemplo 13.4, la altura de la cortina excede a y_s; por tanto se empleará la ecuación (13.3.47) para determinar el parámetro de tránsito o

$$X_c = \frac{6V}{\theta y_s^{\beta}\{3H - 5[\beta y_s/(\beta + 1)]\}}$$

$$= \frac{6(8750)(43\,560)}{73(30)^{0.86}\{3(50) - 5[0.86(30)/(0.86 + 1)]\}}$$

$$= 20\,800 \text{ ft } (6340 \text{ m})$$

donde, por definición, se tienen 43 560 ft²/acre. Si se supone que Γ = 0.95, el tirante medio aguas abajo de la cortina es

$$\bar{y} = \Gamma y(\text{máx}) = 0.95(25.8) = 24.5 \text{ ft } (7.47 \text{ m})$$

Ya que $Q(\text{máx}) < Q_s$, se emplea la ecuación (13.3.49) para estimar el tirante hidráulico medio aguas abajo o

$$D = \frac{\Gamma y(\text{máx})}{\beta + 1} = \frac{0.95(25.8)}{0.86 + 1} = 13.2 \text{ ft } (4.0 \text{ m})$$

Cuando se emplea la ecuación (13.3.51), la velocidad media aguas abajo es

$$\bar{u} = \frac{1.49}{n}\sqrt{S}D^{2/3} = \frac{1.49}{0.045}\sqrt{0.0008}(13.2)^{2/3} = 5.2 \text{ ft/s } (1.6 \text{ m/s})$$

TABLA 13.5 Resumen de los valores de las variables para el ejemplo 13.5

Descripción del parámetro	Parámetro	Valor
Volumen del vaso	V	8750 acre·ft
Altura de la cortina	H	50 ft
Gasto máximo en el boquete	Q(máx)	90 800 ft^3/s
Carga máxima sobre el vertedor	h(máx)	44.1 ft
Altura de la pared del valle	y_s	30 ft
Coeficientes de ajuste del canal	θ	73.0
	β	0.86
Pendiente del canal de aguas abajo	S	0.0008
Coeficiente de rugosidad de Manning	n	0.045
Tirante máximo aguas abajo de la cortina	y(máx)	25.8 ft

Con la ecuación (13.3.52), el número de Froude es

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gD}} = \frac{5.2}{\sqrt{32.2(13.2)}} = 0.25$$

El área hidráulica correspondiente a este tirante hidráulico está dado por la ecuación (13.3.54), puesto que $Q(\text{máx}) < Q_s$ o

$$A_x = \theta[\Gamma y(\text{máx})]^\beta D = 73[0.95(25.8)]^{0.86}(13.2)$$
$$= 15\,100 \text{ ft}^2 \text{ (1400 m}^2\text{)}$$

El parámetro de tránsito adimensional V^* está dado por la ecuación (13.3.53).

$$V^* = \frac{V}{A_x X_c} = \frac{8750(43\,560)}{15\,100(20\,800)} = 1.21$$

Entonces con $\mathbf{F} = 0.25$ y $V^* = 1.2$, pueden emplearse las figuras 13.12 y 13.13 para verificar el valor supuesto de Γ. De la figura 13.12.

$$\text{para } \mathbf{F} = 0.25,\ x/X_c = 1, \text{ y } V^* = 1.2\text{: } Q_x/Q(\text{máx}) = 0.60$$

Por ende, el gasto pico en $x = X_c$

$$Q_x = 0.60Q(\text{máx}) = 0.60(90\,800) = 54\,500 \text{ ft}^3\text{/s (1540 m}^3\text{/s)}$$

El tirante máximo en $x = X_c$ se estima con la ecuación (13.3.56), puesto que $Q_s > Q_x$ o

$$y_x = \left(\frac{Q_x}{\zeta}\right)^{1/(\beta+5/3)}$$

donde

$$\zeta = \frac{\phi}{n}\sqrt{S}\frac{\theta}{(\beta+1)^{5/3}} = \frac{1.49}{0.045}\sqrt{0.0008}\frac{73}{(0.86+1)^{5/3}} = 24.3$$

y
$$y_x = \left(\frac{54\,500}{24.3}\right)^{1/(0.86+5/3)} = 21.2 \text{ ft } (6.5 \text{ m})$$

Se estima ahora un nuevo valor del factor de peso Γ a partir de la ecuación (13.3.58).

$$\Gamma = \frac{y(\text{máx}) + y_x}{2y(\text{máx})} = \frac{25.8 + 21.2}{2(25.8)} = 0.91$$

La diferencia porcentual entre el valor de Γ que se supuso y el estimado arriba, es

$$\Delta\% = \frac{0.95 - 0.91}{0.95}100 = 4.2\%$$

Las distancias adimensionales X_i^* a los puntos del pronóstico en las millas 12.3 y 40.5 son

$$X_1^* = \frac{x}{X_c} = \frac{12.3(5280)}{20\,800} = 3.1$$

y
$$X_2^* = \frac{x}{X_c} = \frac{40.5(5280)}{20\,800} = 10.3$$

Pronóstico en la milla 12.3

De la figura 13.11

$$\text{para } \mathbf{F} = 0.25,\ X_1^* = 3.1, \text{ y } \quad V^* = 1.2\text{: } \frac{Q_x}{Q(\text{máx})} = 0.34$$

Por ende, el gasto pico en la estación es

$$Q_x = 0.34Q(\text{máx}) = 0.34(90\,800) = 30\,900 \text{ ft}^3/\text{s } (875 \text{ m}^3/\text{s})$$

El tirante pico estimado a partir de la ecuación (13.3.56) o

$$y_x = \left(\frac{Q_x}{\zeta}\right)^{1/(\beta+5/3)} = \left(\frac{30\,900}{24.3}\right)^{1/(0.86+5/3)} = 16.9 \text{ ft } (5.2 \text{ m})$$

Para estimar el tiempo que tarda en llegar la onda de avenida a esta estación, se debe determinar la velocidad del flujo en punto intermedio entre la cortina y la milla 12.3. El parámetro adimensional para el punto intermedio es

$$\frac{x}{X_c} = \frac{12.3(5280)}{2(20\ 800)} = 1.6$$

De la figura 13.11

$$\text{para } \mathbf{F} = 0.25,\ X^* = 1.6, \text{ y } V^* = 1.2\text{:} \ \frac{Q_{x/2}}{Q(\text{máx})} = 0.5$$

y $\quad Q_{x/2} = 0.5Q(\text{máx}) = 0.5(90\ 800) = 45\ 400 \text{ ft}^3\text{/s } (1290 \text{ m}^3\text{/s})$

El tirante pico en este tramo se estima a partir de la ecuación (13.3.36), ya que $Q_s > Q_{x/2}$ o

$$y_{x/2} = \left(\frac{Q_{x/2}}{\zeta}\right)^{1/(\beta+5/3)} = \left(\frac{45\ 400}{24.3}\right)^{1/(0.86+5/3)} = 19.7 \text{ ft } (6.0 \text{ m})$$

El tirante hidráulico en el punto intermedio se estima con la ecuación (13.3.60), puesto que $y_{x/2} < y_c$ o

$$D_{x/2} = \frac{y_{x/2}}{\beta + 1} = \frac{19.7}{0.86 + 1} = 10.6 \text{ ft } (3.2 \text{ m})$$

La velocidad media del flujo está dada por la ecuación (13.3.62)

$$\overline{u} = \frac{1.49}{n}\sqrt{S}D_{x/2}^{2/3} = \frac{1.49}{0.045}\sqrt{0.0008}(10.6)^{2/3} = 4.5 \text{ ft/s } (1.4 \text{ m/s})$$

La celeridad de la onda de avenida se estima con la ecuación (13.3.63)

$$c = \overline{u}\left[\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)\right] = 4.5\left[\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{0.86}{0.86 + 1}\right)\right]$$
$$= 6.1 \text{ ft/s } (1.9 \text{ m/s})$$

Entonces, el tiempo que tarda en llegar el gasto pico a la milla 12.3 queda determinado por la ecuación (13.3.64) como

$$t_a = \tau + \frac{x_i}{c} = 0.75(60)(60) + \frac{12.3(5280)}{6.1} = 13\ 347 \text{ s}$$
$$= \frac{13\ 347}{60(60)} = 3.7 \text{ h}$$

Pronóstico en la milla 40.5

Se repite el procedimiento para encontrar el gasto y el tirante pico, así

como el tiempo que tarda en llegar la avenida a la milla 40.5, obteniéndose los siguientes resultados.

$$X_2^* = \frac{x}{X_c} = \frac{40.5(5280)}{20\,800} = 10.3$$

$$\frac{Q_x}{Q(\text{máx})} = 0.14$$

$$Q_x(X_2^* = 10.2) = 12\,700 \text{ ft}^3/\text{s } (360 \text{ m}^3/\text{s})$$

$$y_x = 11.9 \text{ ft } (3.6 \text{ m})$$

$$Q_{x/2} = 0.20(90\,800) = 18\,200 \text{ ft}^3/\text{s } (515 \text{ m}^3/\text{s})$$

$$y_{x/2} = 13.7 \text{ ft } (4.2 \text{ m})$$

$$D_{x/2} = 7.37 \text{ ft } (2.2 \text{ m})$$

$$\overline{u} = 3.55 \text{ ft/s } (1.1 \text{ m/s})$$

Al concluir esta sección, se deben hacer algunos comentarios. Primero, aunque es preferible el empleo de un modelo complejo como el DAMBRK para la estimación del gasto y del tirante picos, en muchos casos el tiempo disponible para este pronóstico puede impedir el empleo de este modelo. En estos casos, pueden hacerse estimaciones razonables con la técnica simplificada desarrollada por Wetmore y Fread (1981) y el estudio anónimo (1982). Segundo, cuando el valle aguas abajo del río se ensancha bruscamente, la metodología simplificada ya no se puede aplicar al problema de la ruptura de presa. Por ejemplo, en el caso de la falla de la presa Teton, no se podían efectuar cálculos manuales pasado la estación ubicada a 8.5 millas aguas abajo de la cortina. Tercero, la tarea que más consume tiempo al emplear un modelo digital o simplificado es la adquisición de datos. Wetmore y Fread (1981) han presentado un conjunto de datos que no se cumplen (Tabla 13.6).

Fread (1981) también examinó el efecto de los errores en varios de los pará-

TABLA 13.6 Datos de entrada que no se cumplen (Wetmore y Fread, 1981)

Variable	Unidades	No cumplen	Descripción
b_r	pies	2 (profundidad del boquete)	Ancho del boquete
τ	h	0.1–2	Tiempo de falla
y_s	pies	$H/2$	Elevación del valle, base de la pared, o vegetación
n		0.06	Coeficiente n de Manning de aguas abajo
S		Altura de la cortina/longitud de la cortina	Pendiente de fondo del canal de aguas abajo

metros sobre las estimaciones de gasto y tirantes aguas abajo. Las conclusiones de este estudio son:

1. Como se notó anteriormente, una importante fuente de error es la predicción del tamaño de la forma y del tiempo de formación del boquete. De estas tres características, la forma es la menos importante y el tiempo de formación aumenta en importancia a medida que aumenta el volumen en el vaso. Un método para evaluar el efecto de la incertidumbre sobre el ancho y tiempo de formación del boquete es considerar dos posibilidades: primero, el ancho máximo probable de boquete y el tiempo mínimo de formación de éste; segundo, ancho mínimo probable y tiempo máximo probable de formación del boquete. La primera posibilidad da una estimación de la avenida máxima aguas abajo, mientras que la segunda proporciona una estimación de la avenida mínima aguas abajo.

2. En alguna medida los errores siempre están presentes en la descripción de la sección transversal del canal. En general, los errores en la estimación del área hidráulica producen errores significativamente menores en el tirante.

3. Los errores en la estimación del coeficiente de fricción son el resultado de factores como: *a*) superficies de inundación extensas que previamente no han sufrido inundaciones; *b*) la superficie inundada contiene elementos rugosos que no son típicos de inundaciones normales, por ejemplo edificios y árboles; *c*) el flujo sobre la llanura de inundación puede hacer un "corto circuito" a través de algunos rasgos del canal, como los meandros; *d*) los escombros o la basura que se desarraigó y transportó por las aguas de inundación pueden causar obstaculación del flujo si el detrito o basura se atrapa contra estructuras permanentes; y *e*) el sedimento atrapado detrás de la cortina puede producir menor resistencia al flujo si se deposita en la llanura de inundación. El efecto de los rasgos *a*) y *b*) en el tirante estimado aguas abajo y en la celeridad de la onda de inundación puede analizarse en forma analítica. Fread (1981) demostró que el efecto de los errores en la estimación del coeficiente de fricción causado por estos factores, se veía reducido en la estimación del tirante y de la celeridad de onda.

También debe notarse en este momento, que en inundaciones originadas por rupturas de presa, donde los flujos con elevaciones más altas de lo normal inundan superficies que no están normalmente cubiertas de aguas, pueden ocurrir importantes pérdidas de gasto volumétrico. Estas pérdidas de gasto son difíciles de predecir y por lo general se desprecian.

13.4 ONDAS EN CANALES ABIERTOS

Hay varias estructuras de ingeniería que suelen encontrarse en sistemas de irrigación e hidroeléctricos que, bajo algunas condiciones de operación, pueden producir la formación de una onda aguas arriba o aguas abajo de la estructura. Por ejemplo, puede desarrollarse una onda en un canal de una planta hidroeléctrica cuando se produce una caída repentina de carga de la red; pueden producirse ondas aguas abajo de vasos cuyas descargas están reguladas primordialmente por requerimientos de potencia hidroeléctrica; y pueden originarse ondas en canales de irrigación como resultado de la abertura o el cierre rápido de compuertas de control. Estos tipos de situaciones de flujo tienen, a menudo, flujos gradualmente variados no permanentes en ambos lados de la onda. En el pasado, se usaba el método de las características (Sec. 12.2) para estimar las porciones del flujo gradualmente variado no permanente mediante la utilización de las ecuaciones de onda para estimar las condiciones de flujo inmediatamente aguas arriba y abajo de la onda (véase, por ejemplo, Streeter y Wylie, 1967). Esta técnica de solución es a la vez rigurosa y precisa, pero es muy difícil de implementar, ya que requiere primero que se detecte la creación de la onda y después se siga el movimiento de la onda a medida que se mueve a través del sistema. Diversos investigadores (véase, p. ej., Martin y DeFazio, 1969, Martin y Zovne, 1971, y Terzidis y Strelkoff, 1970) han demostrado que, cuando no se consideran las ecuaciones de la onda y se trata el flujo como si fuese no permanente y gradualmente variado a través de todo el sistema, los resultados se comparan de manera favorable con el método riguroso y con los datos empíricos y de laboratorio con que se disponen.

En el capítulo 12, se presentaron y se resolvieron las ecuaciones que rigen el flujo gradualmente variado no permanente, por lo que se denomina un esquema implícito pesado de cuatro puntos (Sec. 12.3 y 12.4). Adicionalmente se apuntó en las secciones 12.3 y 12.4 que el factor de peso θ debe caer dentro del siguiente intervalo:

$$0.5 \leq \theta \leq 1.0$$

con un valor recomendado de aproximadamente 0.55. Chaudry y Contractor (1973) han notado que en el caso del flujo en una onda, el valor óptimo de θ puede diferir del recomendado para el flujo gradualmente variado no permanente. Chaudry y Contractor (1973) llegaron a las siguientes conclusiones:

1. El uso de $\theta = 0.5$ para ondas de flujo produce un frente de onda pronunciado, pero también produce una importante inestabilidad numérica después de pasada la onda.
2. El uso de $\theta = 1$ produce un frente de onda difuso pero no produce inestabilidad numérica.
3. Los valores de θ que están en el intervalo de 0.5 a 1.0, dan soluciones con características intermedias entre los extremos descritos arriba.

4. El uso de $\theta = 0.6$ produce soluciones en las que se tiene muy poca o ninguna inestabilidad numérica y también producen un frente de onda pronunciado.
5. Los valores de θ menores que 0.6 pueden ser apropiados en canales donde los coeficientes de fricción de pared son mayores que los estudiados por Chaudry y Contractor (1973).

Nota: en los casos estudiados por estos investigadores, el coeficiente de Manning se encontraba entre los valores 0.01 a 0.03. Además se notó que el valor óptimo de θ también puede estar en función de lo pronunciado de la onda.

Por ende, se concluye que con una calibración y verificación apropiadas se pueden emplear los métodos numéricos presentados en el capítulo 12 para el tratamiento de flujo gradualmente variado, no permanente, a fin de estimar el flujo causado por ondas en canales abiertos.

13.5 FLUJO PULSANTE; OLAS CRECIENTES

Cuando la pendiente de un canal se vuelve muy pronunciada, el flujo supercrítico resultante al llegar al tirante normal puede evolucionar en una serie de ondas someras conocidas como *olas crecientes*. A medida que estas ondas se desarrollan hacia aguas abajo, terminan rompiéndose y forman golpes hidráulicos u ondas de choque. La figura 13.14 muestra en forma esquemática el desarrollo de un flujo pulsante (ondas crecientes) en un canal de pendiente fuerte. Cuando se presenta este tipo de flujo, el aumento del tirante requiere

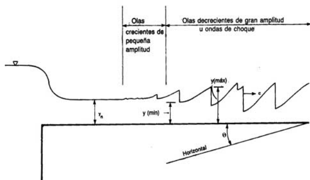


FIGURA 13.14 Esquema definitorio que muestra el desarrollo de las ondas crecientes naturales. (*Brock, 1969.*)

un mayor bordo libre, además, la concentración de masa en el frente de onda quizá necesite mayores factores de seguridad estructurales. Al considerar el fenómeno del flujo pulsante, se necesita definir, en primera instancia, el tipo de canales en el que se puede presentar y después estimar la altura de onda resultante.

Escoffier (1950) y Escoffier y Boyd (1962) consideraron que las condiciones teóricas con las cuales el flujo uniforme debe considerarse inestable. En el caso de una distribución no uniforme de velocidades en la dirección vertical (i.e., flujo bidimensional) Escoffier (1950) demostró que cuando

$$\sqrt{\frac{A}{gT}}\frac{du}{dy} > 1 \tag{13.5.1}$$

o

$$\sqrt{\frac{A}{gT}}\frac{du}{dy} < -1 \tag{13.5.2}$$

el flujo se debe considerar inestable ya que las ondas pequeñas que se generan tienden a aumentar de tamaño. En estas ecuaciones, A = área hidráulica, T = ancho superficial, u = velocidad en la dirección longitudinal y y = coordenada vertical. Montuori (1963) demostró que las condiciones especificadas por las ecuaciones (13.5.1) y (13.5.2) son equivalentes al número de Vedernikov, donde

$$\mathbf{V} = \beta\theta\mathbf{F} \tag{13.5.3}$$

donde β = exponente asociado con el radio hidráulico en la ecuación general de flujo uniforme ($\beta = 2$ para flujo laminar, $\beta = \frac{1}{2}$ para flujo turbulento si se emplea la ecuación de Chezy; y $\beta = \frac{2}{3}$ para flujo turbulento si se emplea la ecuación de Manning) y θ = factor de forma del canal definido como

$$\theta = 1 - R\frac{dP}{dA} \tag{13.5.4}$$

donde R = radio hidráulico
P = perímetro mojado
A = área hidráulica
$\mathbf{F}$ = número de Froude (véase p. ej., Chow 1959)

Si $\mathbf{V} < 1$ prevalece el flujo estable; pero si $\mathbf{V} > 1$, entonces habrá flujo inestable. En un trabajo subsecuente, Escoffier y Boyd (1962) desarrollaron una relación análoga para el punto de transición entre el flujo estable y el inestable para flujo unidimensional (i.e., velocidad uniforme en la dirección vertical). En este desarrollo, si

$$J > \left|5.723\frac{\rho^{1/3}}{\delta^{1/2}}\frac{d\zeta}{d\rho}\right| \tag{13.5.5}$$

entonces el flujo es inestable. En la ecuación (13.5.5.)

$$\zeta = \frac{y}{b}$$
$$\rho = \frac{R}{b}$$
$$\delta = \frac{D}{b} \qquad (13.5.6)$$
$$J = \frac{b^{1/6}\sqrt{S}}{n}$$

donde b = ancho de fondo para canales rectangulares y trapeciales y diámetro para canales circulares
D = tirante hidráulico
S = pendiente del canal
n = coeficiente de rugosidad de Manning

EJEMPLO 13.6

Si

$$S_0 = 0.10$$
$$y_N = 1.0 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$
$$\overline{u} = 32 \text{ ft/s } (9.8 \text{ m/s})$$
$$b = 10 \text{ ft } (3.0 \text{ m})$$

y el canal es de sección rectangular, determínese si el flujo resultante es estable o inestable.

Solución

Escoffier y Boyd (1962) aseveraron que el punto de transición entre flujo estable e inestable definido por la ecuación (13.5.5) da una estimación más conservadora que las ecuaciones (13.5.1) y (13.5.2). Los parámetros en el lado derecho de la ecuación (13.5.5) son

$$P = b + 2y = 10 + 2(1) = 12 \text{ ft } (3.7 \text{ m})$$
$$A = by = 10(1) = 10 \text{ ft}^2 \ (0.93 \text{ m}^2)$$
$$D = \frac{A}{T} = \frac{A}{b} = \frac{10}{10} = 1 \text{ ft } (0.30 \text{ m})$$
$$R = \frac{A}{P} = \frac{10}{12} = 0.83 \text{ ft } (0.25 \text{ m})$$

y
$$\rho = \frac{R}{b} = \frac{0.83}{10} = 0.083$$
$$\delta = \frac{D}{b} = \frac{1}{10} = 0.10$$
$$\zeta = \frac{y}{b} = \frac{1}{10} = 0.10$$

La derivada $d\zeta/d\rho$ que aparece en el lado derecho de la ecuación (13.5.5) se estima en forma numérica o

y	R	$\zeta = y/b$	$\rho = R/b$	$d\zeta/d\rho$
0.5	0.45	0.05	0.045	
				1.3
1.0	0.83	0.10	0.083	
				1.4
1.5	1.15	0.15	0.12	

En el intervalo de interés
$$\frac{d\zeta}{d\rho} = 1.35$$

Entonces
$$\left| 5.723 \frac{\rho^{1/3}}{\sqrt{\delta}} \frac{d\zeta}{d\rho} \right| = \left| 5.723 \frac{(0.083)^{1/3}}{\sqrt{0.10}} (1.35) \right| = 11$$

El lado izquierdo de la ecuación (13.5.5) está dado por la ecuación (13.5.6) o
$$J = \frac{b^{1/6}\sqrt{S}}{n}$$

n se estima con la ecuación de Manning o
$$n = \frac{1.49}{\overline{u}} R^{2/3}\sqrt{S} = \frac{1.49}{32} (0.83)^{0.667} \sqrt{0.1}$$
$$= 0.013$$

Por ende
$$J = \frac{(10)^{1/6}\sqrt{0.10}}{0.013} = 36$$

Puesto que el lado izquierdo de la ecuación (13.5.5) es mayor que el derecho, se concluye que se presentará el flujo pulsante en este canal.

La conclusión a la que se llegó arriba, mediante los resultados de Escoffier y Boyd (1962), puede verificarse si se estima el número de Vedernikov o

$$\mathbf{V} = \beta\theta\mathbf{F}$$

donde $\beta = 2/3$ (ecuación de Manning)

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gy}} = \frac{32}{\sqrt{32.2(1)}} = 5.6$$

y

$$\theta = 1 - R\frac{dP}{dA}$$

La derivada dP/dA se estima con un esquema numérico o

y	P	A	dP/dA
0.5	11	5	
			0.20
1.0	12	10	
			0.20
1.5	13	15	

y $dP/dA = 0.20$. Por ende,

$$\theta = 1 - R\frac{dP}{dA} = 1 - 0.83(0.20) = 0.83$$

y

$$\mathbf{V} = (2/3)(0.83)(5.6) = 3.1$$

Ya que $\mathbf{V} \geq 1$, esta técnica también predice flujo inestable.

La mayor parte de las investigaciones sobre flujo pulsante u olas crecientes se han enfocado en establecer los criterios que deben satisfacerse antes de que se pueda establecer el tren de olas crecientes. Aunque estos criterios son útiles para alertar al diseñador sobre el problema potencial, no dan información sobre los tirantes máximos y mínimos que pueden presentarse. Estos criterios tampoco proporcionan información sobre las propiedades del tren de olas crecientes en función de la distancia a lo largo del canal. Brock (1969) examinó cuatro propiedades de los trenes de olas crecientes en una serie de experimentos: $y(\text{máx})$ = tirante máximo de aguas abajo (Fig. 13.14) $y(\text{mín})$

= tirante mínimo aguas abajo (Fig. 13.14), c = celeridad de onda, y T = periodo de la onda. Para cada una de las tres pendientes empleadas en estos experimentos (S = 0.05, 0.08, y 0.12) el número de Froude varió muy poco (3.5 < **F** < 5.6), y el tirante normal se cambió por un factor de 2. Las conclusiones de este estudio fueron:

1. Para una S fija y un cambio pequeño de **F** $\overline{y}'$(máx), $\overline{T}'$, $\overline{y}'$(mín), $\sigma'_{y(\text{máx})}$, y σ'_T pueden expresarse en función de x' donde $\overline{y}'$(máx) = $\overline{y}$(máx)/y_N = tirante máximo adimensional, $\overline{T}' = S\overline{T}/\sqrt{gy_N}$ = periodo medio de onda adimensional, $\overline{y}'$(mín) = $\overline{y}$(mín)/(y_N = tirante mínimo adimensional, $\sigma'_{y(\text{máx})} = \sigma_{y(\text{máx})}/y_N$ = desviación estándard de y(máx), $\sigma'_T = S\sigma_T/\sqrt{gy_N}$ = desviación estándard adimensional de T, y $x' = x/y_N$ = distancia longitudinal adimensional.
2. A medida que se incrementaron S y **F**, aparecieron ondas crecientes de amplitud significante para valores menores de x'. *Nota:* la amplitud significante se definió como $\overline{y}'$(máx) = 1.1.)
3. El ritmo de crecimiento en la amplitud de las ondas crecientes con la distancia, ∂y(máx)/∂x, para un valor dado de $\overline{y}'$(máx) aumentaba al incrementarse **F** y esta se incrementaba cuando S aumentaba.
4. Se identificaron dos fases en el desarrollo de la onda creciente. En el desarrollo inicial, las ondas crecientes se formaban pero no podían sobrellevarse y combinarse con otras ondas; por lo que, $\overline{T}'$ permanecía constante en esta fase. En la fase final de desarrollo, las ondas se sobrellevaban y combinaban. En esta fase $\overline{T}'$ aumentaba de manera casi lineal con x'.
5. La distribución de frecuencia de y(máx), T, y c para un gasto dado en una estación dada puede aproximarse mediante una distribución gausiana. La distribución de los valores de y(mín) estaba cargada hacia los valores pequeños.
6. La naturaleza del fondo del canal en la vecindad de la entrada, aparentemente tiene una gran influencia sobre la distancia desde la entrada en la que se observan y pueden medirse las ondas crecientes. Si el fondo del canal, cerca de la entrada, es suave, las ondas crecientes empiezan a desarrollarse aguas arriba de las que se formarían si la entrada fuese rugosa. Brock (1969) supuso que estos resultados se pueden explicar en función del desarrollo de la capa límite.

Gracias a las observaciones anteriores y a sus resultados experimentales, Brock (1969) propuso las siguientes explicaciones: primero, para el caso de un canal rectangular ancho, se pueden emplear los resultados resumidos en la tabla 13.7 para predecir el desarrollo de las olas crecientes. (*Nota:* en términos de este desarrollo, las olas crecientes empiezan a desarrollarse cuando $\overline{y}'$ (máx) = 1.1.)

El efecto de la pendiente del canal en el desarrollo de las olas crecientes no pudo determinarse a partir de los resultados de laboratorio. Brock (1969) sugirió que como una primera aproximación, los valores de x' de la tabla 13.7 deben considerarse como una función de **F**. Por ejemplo, para un flujo en el que $\mathbf{F} = 3.75$, las olas crecientes empezaran a aparecer en $x' = 2100$ y las de choque (las ondas formadas por el proceso de sobreelevación), en $x' = 2600$. Segundo, para canales rectangulares anchos en los que los valores de **F** y S se pueden comparar con los estudiados por Brock, pueden emplearse las figuras 13.15 y 13.16 junto con

$$y(\text{máx})_{\text{máx}} = \bar{y}(\text{máx}) + 2.58\sigma_{y(\text{máx})} \tag{13.5.7}$$

para estimar el tirante máximo esperado aguas abajo.

Thorsky y Haggman (1970) notaron en un estudio que los resultados y la teoría presentados por Brock (1969) parecen estar bastante de acuerdo con la literatura previa sobre olas crecientes. Aunque también es claro que se necesita más investigación en esta área. Por ejemplo, Thorsky y Haggman (1970) notaron que la forma del canal puede tener una influencia decisiva sobre la generación de ondas crecientes; ésta es una observación que no se ha considerado en la literatura actualmente disponible. Además, pueden existir formas de canal que no producen ondas; este tema no se ha discutido en forma adecuada por la literatura.

EJEMPLO 13.7

Considerando los datos iniciales del ejemplo 13.6

$$S = 0.10$$

$$y_N = 0.30 \text{ m } (1.0 \text{ ft})$$

$$\bar{u} = 9.8 \text{ m/s } (32 \text{ ft/s})$$

$$b = 3.0 \text{ m } (9.8 \text{ ft})$$

y el canal es de forma rectangular, estímese la distancia al inicio de la formación de olas crecientes, la distancia al inicio de la formación de la onda de choque, y el tirante máximo aguas abajo.

TABLA 13.7 Valores experimentales de x' para la formación de olas y ondas de choque (Brock, 1969)

	Valores de x'		
Condición de onda	$S = 0.05011$ $3.71 < \mathbf{F} < 3.81$	$S = 0.08429$ $4.96 < \mathbf{F} < 5.06$	$S = 0.1192$ $5.60 < \mathbf{F} < 5.98$
$y(\text{máx}) = 1.1$	2100	1300–1650	1150–1250
Ondas de choque	2600	2150	1800–2250

Solución
De los datos dados

$$\mathbf{F} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{gy_N}} = \frac{9.8}{\sqrt{9.8(0.3)}} = 5.7$$

La pendiente dada del canal y el número de Froude calculado indican que los datos en la cuarta columna de la tabla 13.7 deben emplearse para estimar la distancia en la que se forman las ondas crecientes y la onda de choque. La distancia al inicio de la formación de ondas crecientes se estima por

$$x' = \frac{x}{y_N} \simeq 1200$$

$$x \simeq 1200y_n = 1200(0.3) = 360 \text{ m (1200 ft)}$$

La distancia a la formación de la onda de choque se estima por

$$x' = \frac{x}{y_N} \simeq 2000$$

$$x \simeq 2000y_N = 2000(0.3) = 600 \text{ m (2000 ft)}$$

Una estimación del tirante máximo esperado aguas abajo se obtiene a partir de la ecuación (13.5.7) o

$$y(\text{máx})_{\text{máx}} = \overline{y}(\text{máx}) + 2.58\sigma_{y(\text{máx})}$$

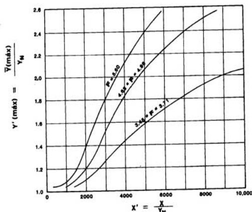


FIGURA 13.15 y'(máx) como una función de F y x'. (*Brock*, 1969.)

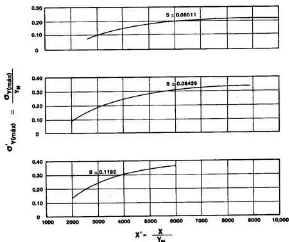


FIGURA 13.16 Curvas para $\sigma'_{y(máx)}$ como una función de la pendiente del canal y x'. (Brock, 1969).

De la figura 13.15, con $x' = 2000$

$$\overline{y}'(\text{máx}) = \frac{\overline{y}(\text{máx})}{y_N} \simeq 1.4$$

$$\overline{y}(\text{máx}) \simeq 1.4y_n = 1.4(0.3) = 0.42 \text{ m } (1.4 \text{ ft})$$

y de la figura 13.16, con $x' = 2000$

$$\sigma'_{y(\text{máx})} = \frac{\sigma_{y(\text{máx})}}{y_N} = 0.15$$

$$= \simeq 0.15y_N = 0.15(0.3) = 0.045 \text{ m } (0.15 \text{ ft})$$

Por ende,

$$y(\text{máx})_{\text{máx}} = 0.42 + 2.58(0.045) = 0.54 \text{ m } (1.8 \text{ ft})$$

BIBLIOGRAFÍA

Anonymous, "Floods Resulting from Suddenly Breached Dams—Conditions of Minimum Resistance, Hydraulic Model Investigation," Misc. Paper 2-374, Report 1, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., February 1960.

Anonymous, "Floods Resulting from Suddenly Breached Dams—Conditions of High Resistance, Hydraulic Model Investigation," Misc. Paper 2-374, Report 2, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., November 1961.

Anonymous, "National Program of Inspection of Dams," Department of the Army, Office of Chief of Engineers, Washington, 1975.

Anonymous, "Simplified Dam-Break Model Users Manual," U.S. National Weather Service, Silver Spring, Md., 1982.

Balloffet, A., Cole, E., and Balloffet, A. F., "Dam Collapse Wave in a River," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 100, no. HY5, May 1974, pp. 645–665.

Brevard, J. A., and Theurer, F. D., "Simplified Dam-Break Routing Procedure," *Technical Release Number 66*, U.S. Soil Conservation Service, Washington, 1979.

Brock, R. R., "Development of Roll-Wave Trains in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 95, no. HY4, July 1969, pp. 1401–1427.

Chaudhry, Y. M., and Contractor, D. N., "Application of the Implicit Method to Surges in Open Channels," *Water Resources Research*, vol. 9, no. 6, December 1973, pp. 1605–1612.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Escoffier, F. F., "A Graphical Method for Investigating the Stability of Flow in Open Channels or in Closed Conduits Flowing Full," *Transactions of the American Geophysical Union*, vol. 31, no. 4, August 1950.

Escoffier, F. F. and Boyd, M. B., "Stability Aspects of Flow in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 88, no. HY6, November 1962, pp. 145–166.

Fread, D. L., "Some Limitations of Dam-Break Flood Routing Models," Preprint, *American Society of Civil Engineers*, Fall Convention, St. Louis, Mo., October 1981.

Fread, D. L., "DAMBRK: The NWS Dam-Break Flood Forecasting Model," National Weather Service, Office of Hydrology, Silver Spring, Md., January 1982.

Gundlach, D. L., and Thomas, W. A., "Guidelines for Calculating and Routing a Dam-Break Flood," *Research Note No. 5*, U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, Davis, Calif., 1977.

Johnson, F. A., and Illes, P., "A Classification of Dam Failures," *Water Power and*

Dam Construction, December 1976, pp. 43–45.

Martin, C. S., and DeFazio, F. G., "Open Channel Surge Simulation by Digital Computer," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 95, no. HY6, June 1969, pp. 2049–2070.

Martin, C. S., and Zovne, J. J., "Finite Difference Simulation of Bore Propagation," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 97, no. HY7, July 1971, pp. 993–1010.

Middlebrooks, T. A., "Earth Dam Practice in the United States," *Centennial Transactions*, American Society of Civil Engineers, 1952, pp. 697–722.

Montuori, C., Discussion of "Stability Aspects of Flow in Open Channels," by F. F. Escoffier, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 89, no. HY4, July 1963, pp. 264–273.

Rajar, R., "Mathematical Simulation of Dam Break Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, no. HY7, July 1978, pp. 1011–1026.

Sakkas, I. G., and Strelkoff, T., "Dam Break Flood in a Prismatic Dry Channel," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 99, no. HY12, December 1973, pp. 2195–2216.

Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience Publishers, New York, 1957.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Hydraulic Transients*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

Su, S. T., and Barnes, A. H., "Geometric and Frictional Effects on Sudden Releases," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY11, November 1970, pp. 2185–2200.

Terzidis, G., and Strelkoff, T., "Computation of Open Channel Surges and Shocks," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY12, December 1970, pp. 2581–2610.

Thorsky, G. N., and Haggman, D. C., Discussion of "Development of Roll Wave Trains in Open Channels," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, no. HY4, April 1970, pp. 1069–1072.

Wetmore, J. N., and Fread, D. L., "The NWS Simplified Dam Break Flood Forecasting Model," *Proceedings of the Fifth Canadian Hydrotechnical Conference*, Fredericton, New Brunswick, Canada, May 1981.

CATORCE

Modelos hidráulicos

SINOPSIS

En este capítulo, se analizará el diseño, construcción, y uso de modelos físicos para la observación de los fenómenos de flujo en canales abiertos. Dentro de los tipos de modelos que se considerarán se encuentran los geométricamente distorsionados y no distorsionados, de fondo fijo y móvil, y de hielo.

En el caso de modelos de fondo fijo, se hace mayor hincapié en el problema de simular la dispersión en un modelo geométricamente distorsionado. Se demuestra que en general, la dispersión no se puede modelar en forma precisa con un modelo distorsionado.

En el caso de los modelos de fondo móvil, se estudian técnicas empíricas y teóricas para el diseño del modelo.

También se toma en consideración el tipo de material y métodos de construcción de los modelos físicos. Se discuten los problemas duales de la calibración y verificación.

En la sección final del capítulo, se tratan los modelos físicos sobre problemas de hielo en canales abiertos. Se consideran dos tipos de modelos. En el primero se modela la hidrodinámica e hidroelasticidad. Estos modelos deben emplearse cuando, por ejemplo, se estudian las fuerzas desarrolladas por una lámina de hielo sobre una estructura. En el segundo tipo sólo se debe simular la hidrodinámica en forma correcta, por ejemplo, en modelos que estudian el movimiento del hielo.

14.1 INTRODUCCIÓN

A diferencia de otros campos del trabajo científico, la ingeniería hidráulica moderna ha estado y sigue estando basada en gran medida en la experimentación. Un estudio de la historia de la hidráulica (véase, p. ej., Rouse e Ince, 1963) indica que se han alternado periodos de investigación experimental con periodos de análisis. Por ejemplo, como se notó por la Comisión de la Hydraulic División de la American Society of Civil Engineering (ASCE) (escrito anónimo, 1942), no fue sino hasta el siglo XVIII que se tenían acumulados datos experimentales suficientes para permitir predecir el progreso, y pasaron otros 100 años antes de que los resultados que hicieron posible este progreso fueran de alguna utilidad.

Durante el siglo XX, la ingeniería hidráulica se vio beneficiada en gran medida por los desarrollos de las teorías de capa límite y turbulencia en el campo de la mecánica de fluidos. Antes de estos desarrollos y de la llegada de la computadora digital de alta velocidad, muchos de los problemas en el campo de la hidráulica sólo podían resolverse con estudios en modelos. Hoy, el enfoque dual de estudios teóricos y de modelos está disponible para el ingeniero.

El empleo de modelos en el ambiente del laboratorio para la solución de problemas de ingeniería hidráulica requiere un entendimiento claro y preciso de los principios de similitud. Respecto a la similitud, previamente discutida en el capítulo 1, se tienen tres puntos de vista distintos.

1. *Similitud geométrica:* dos objetos son geométricamente similares si las razones de sus dimensiones correspondientes son iguales. Por esto, la *similitud geométrica* se refiere sólo a similitud en la forma.

2. *Similitud cinemática:* dos movimientos son cinemáticamente similares si *a*) los patrones o trayectorias del movimiento son geométricamente similares y *b*) las razones de las velocidades de las partículas involucradas en los dos movimientos son iguales.

3. *Similitud dinámica:* dos movimientos son dinámicamente similares si *a*) la razón de las masas de los objetos involucrados son iguales y *b*) las razones de las fuerzas que afectan el movimiento son iguales.

Nótese que aunque aquí la similitud geométrica y cinemática se puede lograr en la generalidad de las situaciones de modelaje, la similitud dinámica es un ideal que raramente, si es que alguna vez, puede lograrse en la práctica (escrito anónimo, 1942).

Como se notó en la sección 1.5, un enfoque para el desarrollo de los parámetros apropiados con el objeto de asegurar la similitud dinámica es el escalonamiento de las ecuaciones de régimen (Secc. 1.4). Un segundo método para lograr este objetivo es el empleo del concepto de análisis dimensional y el teorema II de Buckingham (véase, p. ej., Streeter y Wylie, 1975).

La experiencia dice que en la mayor parte de los modelos es necesario confinar la similitud a una sola fuerza. Ya que en gran parte de los problemas en canales abiertos la fuerza de gravedad es la primordial, este capítulo se enfoca a modelos diseñados para similitud respecto a la fuerza de gravedad. Además, el modelador está casi invariablemente restringido a emplear agua como el fluido del modelo. Debe mencionarse que se tienen, por supuesto, excepciones a estas aseveraciones cuando circunstancias especiales requieren excepciones (véase, p. ej., Walski, 1979). Adicionalmente, en la generalidad de los modelos de interés para el ingeniero hidráulico, el flujo debe ser turbulento en vez de laminar. Recuérdese que el flujo turbulento se presenta cuando el número de Reynolds, basado en el radio hidráulico, excede a 2 000. El flujo es laminar cuando el número de Reynolds es menor que 500. Entre estos límites está la zona de transición que debe evitarse en el diseño de modelos.

Además de las consideraciones teóricas, de las cuales sólo algunas se han discutido en los párrafos anteriores, el modelador debe preocuparse de las siguientes limitaciones físicas: *1*) tiempo, *2*) dinero, *3*) espacio de laboratorio, y *4*) abastecimiento de agua disponible. Estas cuatro consideraciones prácticas pueden tener un impacto crucial y significativo en cualquier esfuerzo de modelaje.

Las anteriores consideraciones teóricas y prácticas se combinan para producir razones de escala en el modelo dentro de los siguientes valores:

1. Modelos de vertedores, conductos, y otras estructuras, cuyos prototipos tienen superficies relativamente suaves y cuyas escalas varían desde 1:50

(distancia en el modelo: distancia en el prototipo) a 1:15. Estos modelos nunca deben distorsionarse.

2. Modelos de ríos, puertos, estuarios, y vasos, cuyos prototipos poseen superficies relativamente rugosas y tienen escalas horizontales que varían desde 1:2 000 hasta 1:100 y escalas verticales con valores desde 1:150 hasta 1:50. Los modelos en esta categoría casi siempre son distorsionados.

Los modelos de escala distorsionada se apartan de un cumplimiento estricto de similitud dinámica, y este distanciamiento es aceptable sólo cuando se puede renunciar al requerimiento de estricta similitud dinámica.

La necesidad de modelos distorsionados, o lo que se denomina más correctamente modelos geométricamente distorsionados, se encuentran sólo en el estudio de fenómenos de canales abiertos y se origina a partir de dos conjuntos de circunstancias:

1. La superficie requerida para un modelo no distorsionado sería tan grande que el espacio y consideraciones económicas dictan que la escala horizontal del modelo debe ser pequeña. En esta situación, si la escala vertical fuese igual a la horizontal, el tirante sería tan pequeño que no se podría medir en forma satisfactoria. Dadas estas circunstancias, se suele considerar el aumento de la escala vertical del modelo, relativa a la escala horizontal.
2. En el caso de un modelo de fondo móvil cuyo objetivo es simular el movimiento de material de fondo, las pendientes y velocidades que se tendrían en un modelo no distorsionado serían demasiado pequeñas para mover cualquiera de los materiales disponibles típicamente usados como material de fondo. Como antes, usualmente se considera deseable emplear una escala vertical mayor que la horizontal.

Aunque en las secciones subsecuentes de este capítulo el principio primordial empleado será la ley de Froude, es apropiado considerar, en este momento, no sólo las implicaciones de la ley de Froude, sino también otras leyes especializadas de modelaje.

Los modelos basados en la ley de Froude aseveran que la fuerza primordial que causa el movimiento del fluido es la gravedad y que todas las otras fuerzas, como la fricción del fluido y la tensión superficial, pueden despreciarse. Como se notó en la sección 1.5 si sólo se necesita la similitud del número de Froude, entonces.

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_P \tag{14.1.1}$$

donde $\mathbf{F}$ = número de Froude y los subíndices M y P designan los números de Froude del modelo y del prototipo, respectivamente. La ecuación (14.1.1) puede resolverse para dar

$$U_R = \frac{U_M}{U_P} = \left(\frac{g_M}{g_P}\frac{L_M}{L_P}\right)^{1/2} = \sqrt{g_R L_R} \tag{14.1.2}$$

donde R = subíndice que indica la razón entre la variable del modelo al prototipo
U_R = razón de velocidad
L_R = razón de escala de longitud
g_R = razón de gravedad

Ya que desde un punto de vista práctico no se puede alterar la aceleración de gravedad

$$g_R = 1$$

y la ecuación (14.1.2) queda como

$$U_R = \sqrt{L_R} \qquad (14.1.3)$$

Puesto que la velocidad del flujo se puede expresar en términos de distancia y tiempo, la escala de tiempos puede deducirse de la ecuación (14.1.3)

$$\frac{U_M}{U_P} = \frac{L_M/T_M}{L_P/T_P} = \frac{T_P L_M}{T_M L_P} = \frac{L_R}{T_R}$$

Al sustituir la ecuación (14.1.3) en este resultado se tiene

$$T_R = \sqrt{L_R} \qquad (14.1.4)$$

donde T_R = escala de tiempos. Con anterioridad en esta sección se notó que algunas veces deben emplearse modelos de Froude con escalas distorsionadas. En estos casos, debe diseñarse el modelo distorsionado para que

$$U_R = \sqrt{Y_R} \qquad (14.1.5)$$

donde Y_R = razón de escala vertical. La escala de tiempo es

$$T_R = \frac{L_R}{\sqrt{Y_R}} \qquad (14.1.6)$$

donde L_R = razón de escala horizontal. Aunque se recomiendan las ecuaciones (14.1.5) y (14.1.6) para formular modelos distorsionados (véase, p. ej., escrito anónimo, 1942), muchos modelos distorsionados se apartan de estas recomendaciones.

Deben considerarse también modelos que siguen la ley de Reynolds, en los que la viscosidad es la fuerza primordial y, por ende, se pueden despreciar en forma segura las fuerzas de gravedad y de tensión superficial. En los modelos basados en la ley de Reynolds

$$\mathbf{R}_R = 1 \qquad (14.1.7)$$

donde $\mathbf{R}$ = número de Reynolds; por tanto

$$U_R = \frac{\mu_R}{L_R \rho_R} \qquad (14.1.8)$$

y $$T_R = \frac{L_R \rho_R}{\mu_R} \tag{14.1.9}$$

donde ρ_R = razón de densidad y μ_R = razón de viscosidad dinámica.

Los modelos de la ley de Weber aseguran la similitud del modelo y del prototipo respecto a los efectos de tensión superficial. Aunque esta ley de modelaje es de primordial importancia en el estudio de formación de gotas, también puede tener una importancia crucial en algunos modelos de canales abiertos. Por ejemplo, los efectos de la tensión superficial son perceptibles en el flujo sobre vertedores cuando la carga sobre el vertedor es pequeña. Además algunos fenómenos de oleaje perceptibles en los modelos se originan por tensión superficial. El número de Weber se define por

$$\mathbf{W} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \tag{14.1.10}$$

donde U = velocidad característica
L = longitud característica
ρ = densidad del fluido
σ = esfuerzo de tensión superficial

Si se igualan los números de Weber en el prototipo y el modelo, da las siguientes relaciones para las razones de escalas de velocidad y tiempo:

$$U_R = \left(\frac{\sigma_R}{L_R \rho_R}\right)^{1/2} \tag{14.1.11}$$

y $$T_R = \left(\frac{L_R^3 \rho_R}{\sigma_R}\right)^{1/2} \tag{14.1.12}$$

La tabla 14.1 resume las relaciones que deben existir entre las diferentes propiedades de los fluidos empleados en el modelo y el prototipo, si se desea obtener una similitud perfecta entre el modelo y el prototipo bajo las leyes de modelaje vistas antes. Cada expresión de la tabla 14.1 es una combinación de las razones —del modelo al prototipo— entre una longitud arbitraria y una fuerza característica de cada ley. A menudo se considera al tiempo como una razón independiente y queda fijo una vez que se han seleccionado la razón de longitud y de fluidos para el modelo y el prototipo.

En el flujo de canales abiertos, la presencia de la superficie libre asegura el dominio de las fuerzas de gravedad; por ende, la ley de Froude es el principio fundamental sobre el que se construyen casi todos los modelos hidráulicos de canales abiertos. Los efectos de tensión superficial sólo tienen importancia cuando el radio de curvatura de la superficie libre o, las distancias a las fronteras sólidas, son muy pequeñas. Por esto, los efectos de tensión superficial son despreciables en la mayor parte de los prototipos, así que debe cuidarse que también sean despreciables en los modelos. Desde un punto de vista práctico, si los tirantes del modelo son mayores a 2 in (0.05 m), se pueden ignorar los efectos de tensión superficial. La viscosidad es mucho más importante y puede de ejercer su influencia en muchas situaciones diferentes. El único método para mantener los efectos viscosos iguales en el modelo y en el prototipo es el de mantener iguales los números de Reynolds y Froude en ambos. Desde un punto de vista práctico, este requisito no puede satisfacerse. Pero si el flujo en el modelo es turbulento, entonces el arrastre de forma quedará modelada de manera precisa, pero el arrastre superficial no quedará modelado en forma precisa. Por ende, el modelador debe preocuparse en todo momento con lo que se denomina *efectos de escala;* i.e., con las distorsiones introducidas por fuerzas que no son la fuerza dominante en la que se basa el modelo.

14.2 MODELOS DE FONDO FIJO DE RÍOS O DE CANALES

Para estudios de ríos o canales en los que no es importante el movimiento del fondo, puede emplearse un modelo no distorsionado o distorsionado, dependiendo de las características del flujo que se deben representar. Se recomienda el uso de un modelo no distorsionado si el estudio involucra la reproducción de flujo supercrítico, transiciones, patrones de ondas, o perfiles de la superficie del agua. Si se desea reproducir la capacidad del canal o su capacidad de almacenamiento, entonces el empleo de un modelo distorsionado es satisfactorio.

El uso de un modelo no distorsionado representa para el modelador un mínimo de problemas en su diseño y análisis. En un modelo con escalas distorsionadas, la dificultad principal es asegurar que el modelo sea lo suficientemente rugoso para que no se distorsione la conversión de energía cinética a potencial y viceversa. Para demostrar esta dificultad, considérese un modelo distorsionado en el cual la razón de escala vertical es Y_R y la razón de escala horizontal es L_R. Las velocidades medias de flujo en el prototipo y en el modelo están dadas por la ecuación de Manning o

$$\overline{u}_P = \frac{\phi R_P^{2/3} \sqrt{S_P}}{n_P} \tag{14.2.1}$$

y

$$\overline{u}_M = \frac{\phi R_M^{2/3} \sqrt{S_M}}{n_M} \tag{14.2.2}$$

TABLA 14.1 Escalas de propiedades del fluido (escrito anónimo, 1942)

Característica	Dimensión	Razón de escalas para la ley de			
		Froude	Reynolds	Weber	Cauchy
Fuerza característica		Gravedad	Viscosidad	Tensión superficial	Elasticidad
Longitud	L	L_R	L_R	L_R	L_R
Área	L^2	$(L_R)^2$	$(L_R)^2$	$(L_R)^2$	$(L_R)^2$
Volumen	L^3	$(L_R)^3$	$(L_R)^3$	$(L_R)^3$	$(L_R)^3$
		Propiedades cinemáticas			
Tiempo	T	$[(L\rho/\gamma)_R]^{1/2}$	$(L^2\rho/\mu)_R$	$[(L^3\rho/\sigma)_R]^{1/2}$	$[L(\rho/K)^{1/2}]_R$
Velocidad	L/T	$(L\gamma/\rho)_R$	$(\mu/L\rho)_R$	$[(\sigma/L\rho)_R]^{1/2}$	$[(K/\rho)^{1/2}]_R$
Aceleración	L/T^2	$(\gamma/\rho)_R$	$(\mu^2/\rho^2L^3)_R$	$(\sigma/L^2\rho)_R$	$(K/L\rho)_R$
Gasto	L^3/T	$[L^{5/2}(\gamma/\rho)^{1/2}]_R$	$(L\mu/\rho)_R$	$[L^{3/2}(\sigma/\rho)^{1/2}]_R$	$[L^2(K/\rho)^{1/2}]_R$
Viscosidad cinemática	L^2/T	$[L^{3/2}(\gamma/\rho)^{1/2}]_R$	$(\mu/\rho)_R$	$[(L\sigma/\rho)_R]^{1/2}$	$[L(K/\rho)^{1/2}]_R$
		Propiedades dinámicas			
Masa	M	$(L^3\rho)_R$	$(L^3\rho)_R$	$(L^3\rho)_R$	$(L^3\rho)_R$
Fuerza	ML/T^2	$(L^3\gamma)_R$	$(\mu^2/\rho)_R$	$(L\sigma)_R$	$(L^2K)_R$
Densidad	M/L^3	ρ_R	ρ_R	ρ_R	ρ_R
Peso específico	M/L^2T^2	γ_R	$(\mu^2/L^3\rho)_R$	$(\sigma/L^2)_R$	$(K/L)_R$
Viscosidad dinámica	M/LT	$[L^{3/2}(\rho\gamma)^{1/2}]_R$	μ_R	$[(L\rho\sigma)_R]^{1/2}$	$[L(K\rho)^{1/2}]_R$
Tensión superficial	M/T^2	$(L^2\gamma)_R$	$(\mu^2/L\rho)_R$	σ_R	$(LK)_R$
Elasticidad volumétrica	M/LT^2	$(L\gamma)_R$	$(\mu^2/L^2\rho)_R$	$(\sigma/L)_R$	K_R
Intensidad de presión	M/LT^2	$(L\gamma)_R$	$(\mu^2/L^2\rho)_R$	$(\sigma/L)_R$	K_R
Impulso de cantidad de movimiento	ML/T	$[L^{7/2}(\rho\gamma)^{1/2}]_R$	$(L^2\mu)_R$	$[L^{5/2}(\rho\sigma)^{1/2}]_R$	$[L^3(K\rho)^{1/2}]_R$
Energía y trabajo	ML^2/T^2	$(L^4\gamma)_R$	$(L\mu^2/\rho)_R$	$(L^2\sigma)_R$	$(L^3K)_R$
Potencia	ML^2/T^3	$(L^{7/2}\gamma^{3/2}/\rho^{1/2})_R$	$(\mu^3/L\rho^2)_R$	$[\sigma^{3/2}(L/\rho)^{1/2}]_R$	$(L^2K^{3/2}/\rho^{1/2})_R$

donde R = radio hidráulico
S = pendiente del fondo del canal
n = coeficiente de resistencia de Manning
ϕ = coeficiente cuyo valor depende del sistema de unidades empleado (1 para el SI, 1.49 para el sistema inglés)

Se tiene, al combinar estas ecuaciones para formar la razón de escala de velocidades que

$$U_R = \frac{\overline{u}_M}{\overline{u}_P} = \frac{(R_R)^{2/3}\sqrt{S_R}}{n_R}$$

y puesto que $S_R = Y_R/L_R$

$$U_R = \frac{(R_R)^{2/3}\sqrt{Y_R}}{n_R\sqrt{L_R}} \tag{14.2.3}$$

La razón de escala de gastos se puede obtener al observar que

$$Q_R = (L_R Y_R U_R)$$

o

$$Q_R = \frac{(R_R)^{2/3}\sqrt{L_R}\,(Y_R)^{3/2}}{n_R} \tag{14.2.4}$$

Se puede entonces definir la escala de tiempo como sigue

$$T_R = \frac{\text{escala de volúmenes}}{\text{escala de gastos}} = \frac{L_R^2 Y_R}{Q_R} \tag{14.2.5}$$

Nota: En un modelo hidráulico distorsionado, el radio hidráulico no se puede estimar analíticamente, por lo que se debe calcular sección por sección.

EJEMPLO 14.1

Si

$$L_R = 1/200$$
$$Y_R = 1/50$$
$$Q_R = 1/128\,000$$
$$n_P = 0.024$$

y las secciones correspondientes del prototipo y del modelo son las mostradas en la figura 14.1, determínense n_M y T_R. Este ejemplo se presentó por primera vez en un estudio anónimo (1942).

Solución

La escala de pendientes está dada por

$$S_R = \frac{Y_R}{L_R} = \frac{1/80}{1/200} = \frac{200}{80} = 2.5$$

A partir de la información de la figura 14.1

$$R_R = \frac{R_M}{R_P} = \frac{0.245}{23.9} = \frac{1}{97.5} = 0.0103$$

De la ecuación (14.2.4)

$$Q_R = \frac{1}{n_R}(R_R)^{2/3}(Y_R)^{3/2}\sqrt{L_R} = \frac{1}{n_R}\left(\frac{1}{97.5}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{80}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{200}}$$

o

$$= \frac{1}{128\,000} = \frac{1}{n_R}4.66 \times 10^{-6}$$

y

$$n_R = 4.66 \times 10^{-6}(128\,000) = 0.596$$

El valor requerido de n en el modelo es

$$n_M = 0.596n_P = 0.596(0.024) = 0.014$$

La razón de escala de tiempo para este juego de circunstancias se estima con la ecuación (14.2.5) o

$$T_R = \frac{L_R^2 Y_R}{Q_R} = \frac{(1/200)^2(1/80)}{(1/128\,000)} = 0.04 = \frac{1}{25}$$

Por ende, 1 h de tiempo del prototipo corresponde a 2.4 min en el modelo.

En el ejemplo anterior, un examen cuidadoso demuestra que bajo algunas circunstancias es posible que las fronteras del modelo resulten más rugosas que las del prototipo. Este sería el caso si $Q_R < {}^1/_{214\,590}$. Estas situaciones se

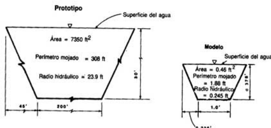


FIGURA 14.1 Esquema para el ejemplo 14.1.

presentan comúnmente en la práctica y pueden resolverse, en algunos casos, poniendo piedritas o tiras de metal dobladas en las fronteras del modelo para aumentar la rugosidad.

En este momento, es constructivo considerar el modelo del río Mississippi que se construyó por el U.S. Army Corps of Engineers en Vicksburg, Mississippi. La cuenca del río Mississippi se extiende aproximadamente 2 000 millas (3 200 km) en cada dirección. Por esto se escogió una escala horizontal de 1:2 000, y el modelo resultante ocupó una superficie de aproximadamente 1 milla^2 (2.6 km^2). Aun con esta escala relativamente grande, el modelo del río es de sólo 2 a 3 ft de ancho (0.61 a 0.91 m) donde el río del prototipo tiene un ancho de 1 milla (1.6 km). En la dimensión vertical, una escala de 1:2 000 proporciona tirantes extremadamente someros que presentan problemas de efectos causados por la tensión superficial y movimiento laminar; por esto, se escogió una escala vertical de 1:100 para el modelo. Esta escala asegura tirantes de, por lo menos, 1 in (0.025 m), elimina los efectos de tensión superficial, y produce un flujo turbulento. La distorsión de escalas no distorsiona la forma bruta del flujo y en muchos casos de resultados satisfactorios.

Hay varios procesos hidráulicos que no pueden hacerse con modelos distorsionados; por ejemplo, el estudio de dispersión de desechos en un río o estuario. Recuérdese de la sección 10.2 que la dispersión en un canal unidimensional está regida por

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ac) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}Ac) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial c}{\partial x}\right) \tag{14.2.6}$$

donde c = concentración de una substancia disuelta conservativa
t = tiempo
$\overline{u}$ = velocidad media en la dirección longitudinal
A = sección transversal del flujo
E = coeficiente de dispersión longitudinal

La ecuación (14.2.6) sólo emplea cantidades promedio sobre la sección transversal y supone que el transporte de masa que no se debe a la convección es proporcional al gradiente de concentración y al coeficiente de dispersión. En el capítulo 10, también se aseveró que E es una función de los gradientes de velocidad en las direcciones transversal y vertical. Con estas observaciones, puede esperarse que un modelo distorsionado —especialmente si se emplean elementos de rugosidad exagerados— no expresará correctamente los procesos de dispersión.

Por definición, el modelaje correcto de la dispersión de un contaminante es una simulación en donde la concentración relativa en cada punto del modelo sea igual a la concentración relativa en cada punto geométricamente correspondiente en el prototipo. La concentración relativa es la concentración real

dividida entre la entrada de masa por unidad de volumen del sistema. Para el modelaje correcto de una nube contaminante, una condición necesaria, mas no suficiente, es

$$(\sigma_x)_R = L_R \tag{14.2.7}$$

donde σ_x = varianza longitudinal de la nube dispersante, y, como antes, L_R = razón de escala horizontal. Entonces, según la ecuación (10.2.6)

$$E = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\sigma_x^2)$$

Si se combina la ecuación (10.2.6) con las ecuaciones (14.1.6) y (14.2.7), se obtiene una condición necesaria para el modelaje correcto o

$$E_R = \frac{L_R^2}{T_R} = \frac{L_R}{\sqrt{Y_R}} \tag{14.2.8}$$

Si se satisface la ecuación (14.2.8), entonces se pueden transponer los perfiles de concentración entre el prototipo y el modelo.

Fischer y Holley (1971) examinaron el problema de la reproducción correcta de una nube dispersante en un modelo de escalas distorsionado y notaron que el coeficiente de dispersión total E puede verse como si tuviese dos componentes, que son: *1)* E_v, la cual es la componente de dispersión asociada con la distribución de velocidades vertical, y *2)* E_t, que es el coeficiente de dispersión asociado con la distribución de velocidades transversal. En un flujo permanente dominado por gradientes verticales de velocidad, el coeficiente de dispersión puede estimarse por

$$E_v = 5.9yu_* \tag{14.2.9}$$

donde $u_* = \sqrt{gRS}$
y = tirante
R = radio hidráulico
S = pendiente longitudinal del canal

Fischer y Holley (1971) supusieron que

$$(u_*)_R = (g_R Y_R S_R)^{1/2} = \frac{Y_R}{\sqrt{L_R}} \tag{14.2.10}$$

donde g_R = 1. Al combinar las ecuaciones (14.2.9) y (14.2.10) se obtiene

$$(E_v)_R = \frac{Y_R^2}{\sqrt{L_R}} \tag{14.2.11}$$

Una comparación de las ecuaciones (14.2.8) y 14.2.11) demuestra que aun en este caso elemental, el modelo hidráulico distorsionado no expresará en for-

ma correcta la dispersión longitudinal. En flujos dominados por los gradientes transversales de velocidad, Fischer (1967) demostró que

$$E_t = \frac{0.3\langle u''^2 \rangle b^2}{Ru_*} \qquad (14.2.12)$$

donde b = distancia sobre la superficie del agua desde el hilo de máxima velocidad al talud más distante, u'' = diferencia entre la velocidad puntual y la velocidad media de la sección transversal, y $\langle\ \rangle$ indica un promedio sobre la sección transversal de la variable encerrada. Si se supone que

$$\frac{\langle u''^2_R \rangle}{\overline{u}^2_R} = 1$$

y se combina la ecuación (14.2.12) con esta suposición (Fischer y Holley, 1971), entonces

$$(E_t)_R = \frac{L_R^{5/2}}{Y_R} \qquad (14.2.13)$$

La ecuación (14.2.13) indica que el modelo hidráulico distorsionado no representará correctamente la dispersión de la nube contaminante cuando el flujo esté dominado por gradientes transversales de velocidad. Si se agregan tiras de rugosidad en la mayor parte de los modelos distorsionados aumenta la discrepancia notada entre el prototipo y el modelo. Basados en los resultados presentados arriba y en otros trabajos, Fischer y Holley (1971) concluyeron que:

1. En un modelo hidráulico distorsionado con flujo permanente, los efectos de dispersión de la distribución vertical de velocidad aumentan, mientras que los efectos de dispersión de los gradientes de velocidad transversal disminuyen. Aunque es concebible que, en casos específicos, estos efectos pueden cancelarse y producir una simulación correcta, las probabilidades de que esto ocurra deben considerarse mínimas.

2. En flujos oscilatorios, como los encontrados en los estuarios regidos por mareas, los efectos dispersivos causados por la distribución de velocidad vertical se magnifican mientras que los efectos de la distribución transversal de velocidad pueden aumentar, disminuir, o representarse correctamente, según sea el valor de la escala adimensional de tiempo para el prototipo.

3. En estuarios con mareas pronunciadas, los efectos dispersivos de los gradientes vertical y transversal de velocidad se incrementan; por ende, la dispersión ocurre mucho más rápidamente en el modelo que en el prototipo.

Otros investigadores (véase, p. ej., Moretti y McLaughlin, 1977, y Roberts y Street, 1980) han llegado a las mismas conclusiones. Moretti y MacLaughlin (1977) concluyeron que podían emplearse criterios de similitud para desarrollar modelos que representaran correctamente el mezclado vertical o el transversal, pero que no era posible que un modelo distorsionado simulara

correctamente ambos procesos en forma simultánea. Roberts, *et al.* (1979), describieron una serie inicial de experimentos en lo que ellos denominaron un equipo para distorsión variable (véase también Roberts, *et al.*, 1979) y llegaron a la conclusión de que, hasta el momento, no se conocen los detalles de los procesos de mezclado en un flujo turbulento y ni cómo varían éstos con una distorsión geométrica. Por ende, la conclusión general es que los modelos hidráulicos distorsionados no son apropiados en el estudio de fenómenos en los que la dispersión de un contaminante es de importancia crucial.

14.3 MODELOS DE FONDO MÓVIL

Cuando es de vital importancia el movimiento de materiales que componen los taludes y el fondo de un canal, se emplea un modelo de fondo móvil. Estos modelos pueden emplearse para atacar los siguientes problemas:

1. Morfología general de ríos. Cambios en: las pendientes del río, sección transversal, erosión, sedimentación, y cambios en el gasto y arrastre de sedimentos asociados a estructuras hidráulicas, o cambios en el uso de la tierra
2. Encauzamiento de ríos. Eliminación de curva o meandros, reubicación del canal principal, y la óptima ubicación y diseño de espigones
3. Desarrollo de llanuras de inundación
4. Ubicación y diseño de pilas de puentes
5. Erosión debajo de cortinas
6. Cruces de tuberías

En comparación con los modelos de fondo fijo descritos en la sección anterior de este capítulo, el diseño y operación de un modelo de fondo móvil es mucho más complejo. Dos dificultades importantes son:

1. La rugosidad de frontera del modelo no está controlada por el diseño, ya que es una variable dinámica controlada por el movimiento del sedimento y la forma del fondo que se desarrolla.
2. El modelo debe simular correctamente no sólo el movimiento del agua del prototipo sino también el movimiento del sedimento del prototipo.

Hay tres métodos de diseño de un modelo de fondo móvil que varían desde el puramente empírico por tanteo hasta el método esencialmente teórico desarrollado por Einstein y Chien (1956b).

Diseño por tanteo

El estudio de modelo de fondo móvil más antiguo que se conoce, se hizo en 1875 por Louis Jerome Fargue para mejoras en el río Garonne en Bordeaux

(Zwamborn, 1967). En 1885, Osborne Reynolds construyó un modelo físico con un fondo móvil para estudiar el estuario del río Mersey en Inglaterra. Estos primeros modelos se construyeron y emplearon en forma efectiva durante muchas décadas, antes de que se desarrollaran los principios teóricos modernos de modelaje. La base para el diseño en estos primeros modelos era la hipótesis de que si un modelo podía ajustarse para reproducir eventos que *habían* ocurrido en el prototipo, entonces el modelo también debería reproducir eventos que *ocurrirían* en el prototipo. La precisión de los resultados obtenidos por Fargue y Reynolds prueba la validez de esta hipótesis, la cual básicamente requiere el desarrollo de un modelo por tanteo, en conjunción con la verificación.

El enfoque de tanteo para el diseño de modelos de fondo móvil involucra la selección del material de fondo. Se establecen la velocidad del flujo requerida para mover el material seleccionado y el coeficiente de fricción que caracteriza al material. De aquí, se estima la escala vertical requerida para erosionar el material de fondo. Se construye entonces el modelo, y se ajustan las variables del modelo conforme se necesite para lograr una concordancia entre los resultados entre el modelo y el prototipo para un evento de verificación o una serie de eventos de verificación.

El o los eventos de verificación deben satisfacer los siguientes criterios:

1. El o los eventos empleados del prototipo para verificación del modelo deben involucrar fenómenos pertinentes, de acuerdo con los objetivos y metas del estudio del modelo propuesto. Por ejemplo, un modelo que se empleará para estudiar el movimiento de fondo no debe verificarse con datos de una avenida.

2. El o los eventos en los que se basará la verificación deben ser continuos y de una duración razonable.

3. El o los eventos en los que se basará la verificación no deben ser extremosos, a no ser de que ese sea el propósito del programa de modelaje.

4. Mientras más grande sea la diferencia entre las condiciones que se modelarán con las condiciones con que se verificará, mayor será la incertidumbre en los resultados del modelaje.

Como se indicó arriba, el desarrollo de un modelo de fondo móvil por este procedimiento de diseño (i.e., la comparación de datos del modelo y del prototipo) es un procedimiento por tanteo que se repite hasta lograr resultados satisfactorios. Algunas de las variables que pueden ajustarse o manipularse son:

1. Escala de gastos

2. Pendiente de la superficie del agua

3. Tipo de material de fondo

4. Magnitud de la escala de tiempos

5. Rugosidad de la frontera fija

En este momento se pueden hacer un número de comentarios misceláneos sobre modelos de fondo móvil:

1. En la práctica, se ha encontrado que las típicas velocidades bajas de un modelo no son suficientes para producir erosión en muchos de los materiales de fondo. Por ende, es indispensable un material de fondo en el modelo, que sea significativamente menos denso que la arena natural (gravedad específica $\simeq$ 2.65). Los materiales bituminosos (e.g., el polvo de carbón, con gravedad específica 1.3 o menos, o el plástico, con gravedad específica = 1.2 o menos), se emplean comúnmente.
2. Aunque en modelos de fondo fijo, en muchos casos puede emplearse la distorsión geométrica sin crear problemas insolubles, en un modelo de fondo móvil la distorsión geométrica de las escalas puede originar un canal cuyos taludes excedan el ángulo de reposo del material del fondo del canal. Si los taludes son estables en el prototipo, entonces los del modelo se pueden construir de material rígido.
3. La distorsión geométrica de las escalas también pueden producir un aumento en la pendiente longitudinal del modelo, lo cual obliga a un aumento en la rugosidad de las fronteras. Pero la rugosidad de pared no está sólo en función del material seleccionado, sino también en función del movimiento del fondo en sí. Por esto, en los modelos de fondo móvil, la distorsión geométrica de escalas debe evitarse o minimizarse.

Métodos teóricos

Aunque se pueden construir modelos de fondo móvil por tanteo, se dispone de técnicas explícitas de diseño que basados en conceptos teóricos y semiteóricos razonablemente bien establecidos. Por ejemplo, considérese la figura 7.13, que delimita el inicio de movimiento de partículas en función de dos parámetros adimensionales $\mathbf{R}_*$ y F_s donde

$$\mathbf{R}_* = \frac{u_* d}{\nu} \tag{14.3.1}$$

$$F_s = \frac{\tau_0}{(S_s - 1)d} = \frac{u_*^2}{(S_s - 1)gd} \tag{14.3.2}$$

donde R_* = número de Reynolds basado en la velocidad al cortante y en el tamaño de la partícula
u_* = velocidad al cortante
ν = viscosidad cinemática del fluido
S_s = gravedad específica de las partículas que componen el perímetro
d = diámetro de las partículas que componen el perímetro del canal

Como se sugirió anteriormente en este capítulo, el estado del fondo del canal está regido por la figura 7.13 y la ubicación de la línea $\mathbf{R}_* - F_s$ en esta figura. Por ende, se asevera que si F_s y $\mathbf{R}_*$ fuesen igual en el modelo y en el prototipo, entonces el estado del fondo sería el mismo en ambos casos. Adicionalmente, se puede suponer que la razón equivalente rugosidad-tamaño de partícula sería la misma en el prototipo y el modelo.

En un flujo que transporta sedimentos, el sedimento suspendido en el flujo reduce la resistencia al flujo, pero este efecto es pequeño comparado con el efecto de la formación de dunas en el fondo del canal. Einstein y Barbarossa (1956a) supusieron que el esfuerzo cortante en el fondo del canal está compuesto por dos componentes: $\tau_0' =$ un esfuerzo cortante provocado por la rugosidad intrínseca del sedimento que compone el fondo y $\tau_0'' =$ un esfuerzo cortante causado por el fondo o rugosidad de forma. Einstein y Barbarossa (1956a) supusieron además que el área total hidráulica A y el perímetro mojado total P podían dividirse también en componentes, y por tanto,

$$\tau_0' = \gamma R' S \tag{14.3.3}$$

$$\tau_0'' = \gamma R'' S \tag{14.3.4}$$

y

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'' = \gamma(R' + R'')S \tag{14.3.5}$$

donde R' y R'' son las componentes del radio hidráulico asociadas con τ_0'', y τ_0' respectivamente. En 1923 Strickler (véase, p. ej., Chow, 1959, o Henderson, 1966 o la Sección 4.3) aseveró que

$$n = 0.034 d^{1/6} \tag{14.3.6}$$

donde $n = n$ de Manning y $d =$ diámetro del sedimento. Entonces, si como se dijo en el párrafo anterior, la razón equivalente de rugosidad-tamaño de partícula es la misma en el modelo y en el prototipo

$$n_R = d_R^{1/6} \tag{14.3.7}$$

y

$$\left(\frac{R'}{R''}\right)_R = 1 \tag{14.3.8}$$

De la ecuación (14.2.3)

$$U_R = \frac{(R_R)^{2/3}\sqrt{Y_R}}{n_R\sqrt{L_R}}$$

$$n_R = \frac{(R_R)^{2/3}}{\sqrt{L_R}} \tag{14.3.9}$$

donde $U_R = \sqrt{Y_R}$. Al combinar las ecuaciones (14.3.7) y (14.3.9) se obtiene

$$d_R^{1/6} = \frac{(R_R)^{2/3}}{\sqrt{L_R}} \tag{14.3.10}$$

La implicación de la ecuación (14.3.8) es

$$\tau_0 = \gamma_R R_R S_R = \frac{\gamma_R R_R Y_R}{L_R} \tag{14.3.11}$$

Se deduce entonces de las ecuaciones (14.3.1) y (14.3.2) que

$$\frac{R_R Y_R}{\alpha_R L_R d_R} = 1 \tag{14.3.12}$$

y

$$\frac{R_R Y_R d_R^2}{L_R \nu_R^2} = 1 \tag{14.3.13}$$

donde $\alpha = S_s - 1$. R_R es una función de Y_R y L_R, y si $\nu_R = 1$, entor las ecuaciones (14.3.10) a (14.3.13) son un conjunto de tres ecuaciones co. :o incógnitas. Por ende, al diseñar un modelo de fondo móvil mediante este método, se selecciona una razón del modelo y se determinan las otras tres razones del modelo a partir de las ecuaciones (14.3.10), (14.3.12), y (14.3.13).

Respecto a las ecuaciones (14.3.10), (14.3.12), y (14.3.13) deben notarse las siguientes implicaciones:

1. Si $Y_R = L_R$, o sea, el modelo no es distorsionado, no se puede construir un modelo a escala, así, cualquier modelo tendrá que tener la misma escala que el prototipo.

2. Si la razón de gravedad específica se selecciona antes, entonces de las ecuaciones (14.3.12) y (14.3.13)

$$d_R = \alpha_R^{-(1/3)} \tag{14.3.14}$$

si $\nu_R = 1$. La ecuación (14.3.14) implica que si el material del sedimento empleado en el modelo tiene una gravedad específica menor que el material en el prototipo, entonces el tamaño del material empleado en el prototipo debe ser mayor.

3. Si R_R no puede suponerse igual a Y_R, entonces las razones de escala L_R y Y_R deben encontrarse por tanteo. Pero si $R_R = Y_R$, entonces

$$L_R = \alpha_R^{5/3} \tag{14.3.15}$$

y

$$Y_R = \alpha_R^{7/6} \tag{14.3.16}$$

4. Puede demostrarse que la razón entre el transporte de sedimento por unidad de ancho y del gasto por unidad de ancho debe ser mayor en el modelo que en el prototipo.

5. En la generalidad de los casos de diseño de modelos de fondo móvil, la ley de modelaje del número de Froude no se considera como una regla absoluta. Por ejemplo, si el número de Froude es pequeño, entonces los efectos

gravitacionales no son pronunciados; por ende, se pueden tolerar pequeños cambios en el número de Froude entre el modelo y el prototipo.

6. La razón de tamaño de partícula a la que se refiere la ecuación (14.3.10) caracteriza la rugosidad del fondo del canal, mientras que la razón de tamaño de partícula empleada en las ecuaciones (14.3.12) y (14.3.13) es característica de las propiedades de transporte de las partículas. Debe reconocerse que estas razones que caracterizan las distribuciones de tamaños de partículas en el prototipo y el modelo no son necesariamente iguales.

EJEMPLO 14.2

Un tramo de canal que es aproximadamente parabólico en corte transversal tiene un ancho superficial de 60 m (197 ft) cuando el tirante es de 1.5 m (4.9 ft). En el prototipo, la arena de cuarzo que compone el fondo tiene una gravedad específica de 2.65. Si se desea construir un modelo de fondo móvil de este tramo con material con gravedad específica de 1.2, determínese el tamaño apropiado de la partícula en el modelo y las razones de escalas de longitud L_R y Y_R.

Solución

Si se emplea el método de análisis de Einstein y Chien (1956b) y $U_R = 1$, entonces la razón de tamaño de partícula (modelo a prototipo) está dada por la ecuación (14.3.14) o

$$d_R = \alpha_R^{-1/3} = \left(\frac{1.2 - 1}{2.65 - 1}\right)^{-1/3} = 2.0$$

Por tanto, el tamaño de las partículas empleadas en el modelo debe ser aproximadamente el doble del tamaño de las partículas del prototipo.

Por tanto, las escalas L_R y Y_R se determinan resolviendo en forma simultánea las ecuaciones (14.3.12) y (14.3.13). Ya que $R_R = f(L_R, Y_R)$, la solución de estas ecuaciones debe efectuarse por tanteo. Los valores iniciales de tanteo para L_R y Y_R se determinan al suponer que $R_R = Y_R$; por lo que, según las ecuaciones (14.3.15) y (14.3.16)

$$L_R = \alpha_R^{5/3} = \left(\frac{1.2 - 1}{2.65 - 1}\right)^{5/3} = 0.030$$

y

$$Y_R = \alpha_R^{7/6} = \left(\frac{1.2 - 1}{2.65 - 1}\right)^{7/6} = 0.085$$

Para la sección parabólica definida para el canal, el radio hidráulico en el prototipo es (véase la Tabla 1.1)

$$R_P = \frac{2T^2y}{3T^2 + 8y^2} = \frac{2(60)^2(1.5)}{3(60)^2 + 8(1.5)^2} = 1.00 \text{ m (3.28 ft)}$$

El radio hidríaulico en el modelo para la escala geométrica supuesta es

$$R_M = \frac{(2TL_R)^2 yY_R}{(3TL_R)^2 + 8(yY_R)^2} = \frac{2[60(0.03)]^2(1.5)(0.085)}{3[(60(0.03)]^2 + 8[1.5(0.085)]^2}$$

$$= 0.084 \text{ m (0.28 ft)}$$

Por ende,

$$R_R = \frac{R_M}{R_P} = \frac{0.084}{1.0} = 0.084$$

En este momento, debe demostrarse que las escalas geométricas supuestas satisfacen las ecuaciones (14.3.12) y (14.3.13). La ecuación (14.3.12) requiere que

$$\frac{R_R Y_R}{\alpha_R L_R d_R} = 1$$

y

$$= \frac{0.084(0.085)}{[(1.2 - 1)/(2.65 - 1)](0.030)(2.0)} = 0.98$$

La ecuación (14.3.13) requiere que

$$\frac{R_R Y_R d_R^2}{L_R \nu_R^2} = 1$$

$$= \frac{0.084(0.085)(2.0)^2}{0.03(1.0)^2} = 0.95$$

Puesto que las ecuaciones (14.3.12) y (14.3.13) se satisfacen casi exactamente, se considera que

$$L_R = 0.03$$

y

$$Y_R = 0.085$$

Algunos investigadores [véase, p. ej., Bogardi, 1959, o Bogardi (en Henderson, 1966), y Raudkivi, 1976] han aseverado que el requisito de que F_s y $\mathbf{R}_*$ tengan exactamente el mismo valor en el modelo y el prototipo puede y debe relajarse un poco. cuando $\mathbf{R}_* \geq 100$ el flujo alrededor de los granos de sedimento es totalmente turbulento, y, como es el caso en otros modelos, no es necesario que $(\mathbf{R}_*)_M = (\mathbf{R})_P$ si se cumple que $(\mathbf{R}_*)_M \geq 100$. También se asevera que la formación del fondo es sólo una función de un parámetro β que se define por

$$\frac{1}{\beta} = d^{0.88}\left(\frac{u_*^2}{gd}\right) \tag{14.3.17}$$

donde la unidad de longitud empleada es el centímetro. Henderson (1966) notó que toda la evidencia a la que se hacía referencia como apoyo para la ecuación (14.3.17) era proporcionada por sistemas de agua sobre granos en los cuales $S_s = 2.65$ y $\nu = 0.011$ cm²/s (1.18×10^{-5} ft²/s). Por tanto la ecuación (14.3.2) se puede reescribir como

$$F_s = \frac{u_*^2}{(S_s - 1)gd} = \frac{456}{\beta^{1.41}}\left(\frac{u_* d}{\nu}\right)^{-5/6} \tag{14.3.18}$$

Los valores de β, en centímetros, dados por Bogardi para varias formaciones de fondo, se resumen en la tabla 14.2. Estos valores, cuando se emplean en la ecuación (14.3.18), definen una serie de bandas en el plano $F_s - \mathbf{R}_*$ (Fig. 14.2)

TABLA 14.2 Formación de fondo en función de β (Henderson, 1966)

Formación de fondo	β, cm
Inicio del movimiento	550
Formación de rizos	322
Desarrollo de dunas	66
Inicio de la transición	24
Desarrollo de antidunas	18.5

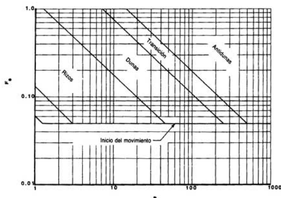


FIGURA 14.2 Relación entre la formación del fondo y la posición en el plano $F_2 - \mathbf{R}_*$.

que definen en forma gráfica las formaciones de fondo. En la figura 14.2 todas las líneas que definen las bandas de cada formación de fondo terminan en $F_s = 0.05$, que es el inicio del movimiento. La figura 14.2 también demuestra una contradicción en la teoría de Bogardi. Específicamente, antes se había establecido que si $\mathbf{R}_* \geq 100$, se tendrían formaciones de fondo similares en el modelo y en el prototipo; pero la figura 14.2 demuestra que si $\mathbf{R}_* \geq 100$, las formaciones del fondo en el modelo y en el prototipo pueden ser diferentes. La conclusión es que, para lograr una similitud entre el modelo y el prototipo, los valores de F_s y $\mathbf{R}_*$ no tienen que ser exactamente iguales; pero los puntos que representan al modelo y al prototipo deben estar dentro de las mismas bandas de forma de fondo de la figura 14.2.

Zwamborn (1966, 1967, 1969) ha desarrollado un conjunto de criterios de similitud para modelos de fondo móvil, que se han comprobado mediante correlaciones modelo-prototipo. Los criterios de similitud son:

1. El flujo en ríos naturales es siempre completamente turbulento. Para asegurar que el flujo en el modelo sea completamente turbulento, el número de Reynolds del modelo debe exceder de 600.
2. La similitud dinámica entre el modelo y el prototipo se logra cuando las razones modelo-prototipo de las fuerzas inerciales, gravitacionales, y de fricción son iguales. La similitud se logra cuando:
   a. El número de Froude en el modelo es igual al del prototipo.
   b. Los criterios de fricción se satisfacen cuando se cumplen tres condiciones. Primero, el producto del coeficiente de rugosidad de grano y el inverso de la raíz cuadrada de la pendiente son iguales en el modelo y en el prototipo o

$$C_R' = \frac{1}{\sqrt{S_R}} \qquad (14.3.19)$$

donde C'= coeficiente de rugosidad de grano

$$C' = 5.75\sqrt{g}\log\left(\frac{12R}{d_{90}}\right) \qquad (14.3.20)$$

d_{90} = diámetro debajo del cual se encuentra el 90% de los diámetros más pequeños de las partículas, y R = radio hidráulico. Segundo, la razón del cortante a la velocidad de asentamiento debe ser igual en el modelo y en el prototipo o

$$\left(\frac{u_*}{u_s}\right)_R = 1 \qquad (14.3.21)$$

donde $u_* = \sqrt{gRS}$ = velocidad al cortante y u_s = velocidad de asentamiento. Las velocidades de asentamiento de algunos materiales seleccionados para modelos se resumen en la figura 14.3 en función del tamaño

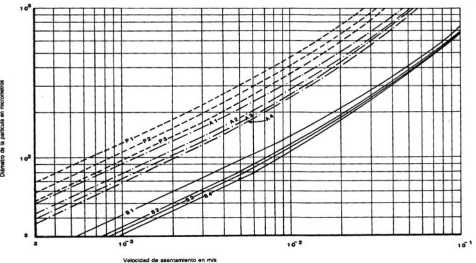


FIGURA 14.3 Curvas de velocidades de asentamiento. *(Zwanborn, 1969.)*

Perspex sp gr 1.18
P1 = 4.5°C (40°F)
P2 = 15.5°C (60°F)
P3 = 26.7°C (80°F))

Antracita sp gr 1.35
A1 = 4.5°C (40°F)
A2 = 15.5°C (60°F)
A3 = 21.1°C (70°F)
A4 = 26.7°C (80°F)

Arena sp gr 2.65
S1 = 4.5°C (40°F)
S2 = 15.5°C (60°F)
S3 = 21.1°C (70°F)
S4 = 26.7°C (80°F)

del grano y la temperatura del agua. Tercero, el número de Reynolds, basado en el diámetro del sedimento en el modelo, debe ser aproximadamente un décimo del número de Reynolds del grano del prototipo o

$$(\mathbf{R}_*)_R < \tfrac{1}{10} \qquad (14.3.22)$$

donde $\mathbf{R}_* = ud/\nu$ = número de Reynolds del grano
u = velocidad
ν = viscosidad cinemática

c. La distorsión de escalas geométricas no debe ser muy grande; i.e.,

$$\frac{Y_R}{L_R} < \frac{1}{4} \qquad (14.3.23)$$

3. El movimiento de sedimentos está estrechamente relacionado con el tipo de formación de fondo que, a su vez, está en función de u_*/u_s, $\mathbf{R}_*$, y $\mathbf{F}$. Para valores especificados de u_*/u_s y $\mathbf{F}$, se aseguran formaciones de fondo, y por ende la existencia de modelos similares del movimiento de fondo cuando el valor de $\mathbf{R}_*$ para el modelo está dentro de los valores determinados por u_*/u_s, y por el intervalo apropiado de $\mathbf{F}$, que define un tipo de formación de fondo (Fig. 14.4).

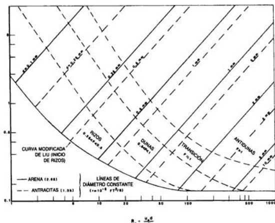


FIGURA 14.4 Criterios de formaciones de fondos. *(Zwanborn, 1969.)*

4. Dados los criterios de similitud definidos arriba, se pueden derivar los siguientes factores de escala.

Gasto

$$Q_R = L_R Y_R^{1.5} \tag{14.3.24}$$

Tiempo hidráulico

$$T_R = \frac{L_R}{U_R} \tag{14.3.25}$$

Tiempo sedimentológico

$$(T_s)_R = \frac{L_R Y_R \Delta_R}{(q_s)_R} \tag{14.3.26}$$

donde T_s = escala de tiempo del sedimento
Δ = densidad relativa del sedimento sumergido
q_s = gasto de sedimento de fondo por unidad de ancho

De la ecuación (14.3.26) es evidente que la determinación de la escala de tiempo para el sedimento requiere que se conozca el transporte de fondo en el modelo y en el prototipo. Aunque el transporte de fondo del prototipo puede estimarse (véase, p. ej., Rouse, 1958), Zwanborn (1966, 1967, y 1969) proporciona la siguiente relación aproximada:

$$(T_s)_R \simeq 10 T_R \tag{14.3.27}$$

La validez de los criterios de similitud dados arriba se han confirmado al comparar los resultados obtenidos en modelos con los observados en prototipos (véase, p. ej., Zwanborn, 1966, 1967, y 1969).

EJEMPLO 14.3

En el prototipo $u_*/u_s = 5.5$, $\mathbf{F} = 0.5$, y la formación del fondo es de dunas. Si se usan los criterios de Zwanborn (1966, 1967, y 1969) que se resumen en la figura 14.4, determínese el intervalo apropiado de números de Reynolds para el grano para el modelo.

Solución

Los números de Froude para el modelo y el prototipo son iguales; así, la ecuación (14.3.21) requiere

$$\left(\frac{u_*}{u_s}\right)_R = 1$$

Por tanto, de la figura 14.4, si el fondo tiene dunas

$$2 < (\mathbf{R.})_M < 5$$

Método del régimen

Se dice que un canal está en régimen cuando ha ajustado su pendiente y su forma a una condición de equilibrio. La implicación de que un canal está en régimen es que, no obstante que el fondo del canal está en movimiento, éste es estable porque el ritmo del transporte es igual al ritmo de suministro de sedimento. La hipótesis de régimen es un enfoque enteramente empírico, que no incorpora ninguna consideración teórica. Esta hipótesis se desarrolló en la India a partir de mediciones empíricas tomadas en canales de origen humano, que eran bastante uniformes pero de tamaños muy diferentes. Se desarrollaron tres ecuaciones que pueden reordenarse en una forma que implica que cualquiera de las tres variables —tirante medio, velocidad media, y ancho de canal— es una función única del gasto. Estas ecuaciones se desarrollaron al graficar los datos disponibles en un papel logarítmico y al determinar las rectas de mejor ajuste. Como notaron Einstein y Chien (1956b) en su respuesta a una polémica con Blench (1956), si se toma en cuenta que los datos empíricos se obtuvieron para canales que estaban vacíos o en funcionamiento con su gasto de diseño, los datos eran regulares.

En particular, la hipótesis de régimen asevera que

$$T \propto \sqrt{Q} \qquad (14.3.27)$$

$$Y \propto Q^{1/3} \qquad (14.3.28)$$

$$S \propto Q^{-1/6} \qquad (14.3.29)$$

De las ecuaciones (14.3.27) a (14.3.29), se pueden deducir las escalas apropiadas para el modelo, mediante la inducción o

$$L_R = \sqrt{Q_R} \qquad (14.3.30)$$

y

$$Y_R = Q_R^{1/3} \qquad (14.3.31)$$

Como resultado de las ecuaciones (14.3.30) y (14.3.31), se pueden colegir las siguientes escalas para el modelaje:

$$S_R = \frac{Y_R}{L_R} = \frac{Q_R^{1/3}}{\sqrt{Q_R}} = Q_R^{-1/6} \qquad (14.3.32)$$

$$Y_R = L_R^{2/3} \qquad (14.3.33)$$

y

$$Q_R = X_R Y_R^{3/2} \qquad (14.3.34)$$

Respecto a este método de diseño de un modelo de fondo móvil, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. De la ecuación (14.3.33), es obvio que el modelo tiene escalas geométricamente distorsionadas.
2. La ecuación (14.3.34) concuerda con la ley de modelaje de Froude.
3. Si se emplea este método de diseño, se supone tácitamente que el material de fondo del modelo es el mismo que el del prototipo.

Por ende, se concluye que la hipótesis de régimen proporciona resultados que son sorprendentemente concordantes con los requisitos de similitud. Hay que hacer notar dos objeciones a este proceso de diseño. Primero —como lo aseveraron Einstein y Chien (1956b)— las teorías o hipótesis que representen satisfactoriamente al flujo en los canales diseñados quizá no sean satisfactorias al aplicarse a ríos naturales. Einstein y Chien (1956b), empleando datos de ríos de los Estados Unidos, demostraron claramente que la aplicación de las ecuaciones (14.3.27) a (14.3.29) a ríos naturales quizá propicie importantes errores. Segundo, si se emplea el material de fondo del prototipo en el modelo, entonces las ecuaciones (14.3.15) y (14.3.16) predicen que $X_R = X_R$, así pues, el modelo es el prototipo.

14.4 MATERIALES Y CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Al construir un modelo físico, hidráulico, el modelador debe estar consciente de que el modelo tiene que:

1. Ser una réplica geométricamente escalada y precisa del prototipo
2. Retener su consistencia y precisión geométrica durante su operación
3. Contener las estructuras necesarias para controlar y medir el gasto
4. No presentar dificultad para hacer cambios fácil y rápidamente en detalle
5. Ser consistente con el propósito del estudio y su presupuesto

Los modelos a menudo se construyen con materiales fácilmente disponibles (e.g., madera, concreto, metal, cera, parafina, plástico, arena, y carbón). Los equipos de taller requeridos para preparar y modelar estos materiales también deben estar disponibles. En los siguientes párrafos de esta sección, se discutirá un número seleccionado de temas desde el punto de vista de los materiales y los métodos de construcción de modelos. En muchos casos, gran parte del tiempo requerido para llevar a cabo un estudio en un modelo se emplea en los procesos de diseño y construcción. Nótese que puede encontrarse más información sobre los materiales y técnicas constructivas en el escrito anónimo (1942) y en Sharp (1981).

Materiales

Madera Las maderas más apropiadas para la construcción de modelos hidráulicos son el sugar pine, ciprés, redwood, caoba, y triplay de marine grade.

En general, puesto que todos los tipos de maderas se ven afectadas en un mayor o menor grado por el agua, la madera debe impermeabilizarse en alguna forma (e.g., una capa inicial de aceite de linasa seguida por una o más capas de barniz es por general suficiente. La madera tiene la ventaja de ser relativamente barata y de fácil moldeo; en el caso de madera triplay, ésta puede doblarse o arrugarse un poco. Tiene las desventajas de que se puede ver afectada dimensionalmente por el contenido de agua y por dobleces, asimismo es opaca.

Lámina de metal La lámina de metal también es relativamente barata y puede moldearse fácilmente. Puede cortarse en cualquier forma y pegarse a la madera con tornillos. Las desventajas de la lámina de metal es que tiende a pandearse bajo esfuerzos desiguales y térmicos; no puede moldearse en superficies alabeadas; sus superficies deben protegerse contra la corrosión por pintura o galvanizado; y es opaca.

Plásticos Los plásticos como la lucita y plexiglass son transparentes y pueden moldearse con calor, maquinarse, o cortarse y pegarse en muchas formas. Son particularmente útiles cuando una de las metas del programa de modelaje es la visualización del flujo. Los plásticos tienen la desventaja de verse afectados por la humedad, temperatura, y luz solar.

Cera Tiene las ventajas de ser muy maleable y el agua no la daña y este material puede moldearse en una variedad de formas geométricas. La cera es particularmente apropiada para la construcción de superficies curvas en las que se requere mucha precisión. Las desventajas principales de la cera es su fragilidad, falta de resistencia estructural, opaquez, y que es fácilmente dañada por cambios de temperatura.

Cemento Tiene las ventajas de ser maleable cuando está mojado, el agua y los cambios de temperatura no le afecta. Con tarrajas, puede moldearse en varias formas y alizarse mucho si se trabaja con una cuchara hasta su fraguado inicial. La experiencia ha demostrado que la mejor mezcla es una parte de cemento por tres de arena (escrito anónimo, 1942). Este material es apropiado en modelos que involucran superficies alabeadas o áreas grandes. En general aun después del fraguado final, el cemento puede cortarse y parcharse fácilmente. La desventaja principal del cemento es que es opaco. El diseñador también debe estar consciente de que en un modelo recién construido de cemento, las sales del cemento se disolverán, y los sistemas de instrumentación que miden la conductividad del agua pueden verse afectados por este proceso de disolución.

Fibra de vidrio y resinas Cuando se desean construir formas complejas, éstas se pueden construir con fibra de vidrio o con moldes con resinas. Debe notarse que la exposición continua de técnicos a los vapores de resinas epóxicas puede ocasionar problemas serios de salud (Sharp, 1981).

Espuma de poliuretano En los últimos años, la espuma de poliuretano de alta densidad (6 a 12 lb/ft^3 o 940 a 1900 N/m^3) se ha empleado para modelar estructuras hidráulicas pequeñas. Aunque éste es un material de construcción relativamente caro, los costos de mano de obra se reducen como consecuencia de la facilidad con que puede cortarse y moldearse el material para obtener la forma correcta. La construcción de modelos con espuma de poliuretano comúnmente involucra pegar hojas de espuma con resinas epóxicas, moldearlas a la forma deseada, y finalmente sellando el modelo. Aunque se pueden emplear varios selladores, el "primer" de pintura para metal parece dar los mejores resultados (Sharp, 1981). La desventaja principal de este material es que cuando se emplean pegamentos, puede producirse separación en las juntas. Este problema aparentemente puede evitarse cuando se emplea una resina, por ejemplo fibra de vidrio. Quizá se presente algo de separación, aunque se emplee resina de fibra de vidrio, cuando las hojas de espuma son de un espesor menor a 1 in (2.5 cm).

Como lo indica el estudio anterior, pueden utilizarse muchos materiales en la construcción de un modelo. Cada material tiene ciertas ventajas y también un número de desventajas que no permiten su uso como material universal para modelos.

En la construcción de un modelo hidráulico, se deben establecer controles horizontales y verticales confiables y precisos. El método empleado para el control horizontal depende primordialmente del tamaño y forma del modelo. Por ejemplo, si el modelo es largo y angosto, el control horizontal puede establecerse con un travesaño que aproxime la línea central del modelo. En el caso de un modelo que sea a la vez largo y ancho, puede establecerse el control horizontal con un travesaño alrededor del perímetro del modelo. Si el modelo es muy grande, entonces se emplea un travesaño perimetral complementado por un sistema de malla cartesiano.

El establecimiento del control vertical suele basarse en la ubicación de un banco de nivel en la vecindad del modelo. Si el modelo es muy grande, entonces quizá sean necesarios bancos complementarios de nivel.

Una vez que se ha establecido el control horizontal y vertical, se debe establecer la topografía. Hay tres métodos que con frecuencia se usan para lograr esto:

1. *Tarrajas hembras:* representan secciones transversales del prototipo que se han reducido a un tamaño apropiado por las escalas geométricas durante el proceso de diseño (Fig. 14.5). Estas tarrajas se grafican y cortan con precisión y después se anclan firmemente en los modelos empleando las mallas de control horizontal y vertical establecidas para su ubicación. Después se moldea la superficie del modelo de acuerdo con la superficie establecida por las tarrajas.

   Los materiales empleados para hacer las tarrajas incluyen metal laminado, masonita, y madera. Se recomienda que las tarrajas no tengan una separación mayor de 2 ft (0.6 m) y no menor a 6 in (0.15 m).

2. *Tarrajas macho:* también puede establecerse la topografía del canal con la ayuda de tarrajas macho (Fig. 14.5). En este caso las tarrajas se apoyan en rieles graduados y se quitan después de que las superficies del canal se han formado.

3. *Clavos de madera:* puede establecerse la topografía de un área con clavos de madera puestos en el modelo, de tal forma que su cabeza refleje la elevación apropiada. La superficie se moldea de acuerdo con la elevación de las cabezas.

4. *Tarrajas horizontales:* si el grosor de la tarraja es idéntica a la distancia vertical escalada entre los entornos, pueden ponerse las tarrajas, una sobre otra, para formar un modelo sólido. Aunque el triplay y el poliuretano se han empleado con éxito en esta forma, es más común el uso de tarrajas delgadas separadas por espaciadores verticales para asegurar las elevaciones correctas. Si se emplea esta última metodología, las tarrajas deben ser de triplay rígido, de lámina de metal o cubiertas con material como fibra de vidrio.

Al considerar las técnicas de construcción de modelos discutidas arriba, debe comprenderse que ninguna de las técnicas producirá un modelo que sea geométricamente exacto. Aunque en todos los modelos se remarca el control horizontal y vertical entre los puntos, líneas, y planos de control, la topografía debe interpretarse por el ojo y la mano humana. En este momento, se deben notar los siguientes tres puntos: primero, las técnicas de construcción por tarrajas hembra o macho se consideran óptimas cuando se deben cubrir superficies muy grandes con relieves topográficos considerables. Segundo, cuando se emplea el método de la tarraja macho o hembra, el volumen entre las tarrajas se rellena con un material barato (e.g., se ha descubierto que una mezcla 50/50 de arcilla y arena fina es satisfactoria). Este material puede cubrirse con una capa delgada de cemento. Tercero, la técnica de la tarraja horizontal ha sido de gran utilidad cuando la extensión horizontal del modelo es grande y el relieve muy leve.

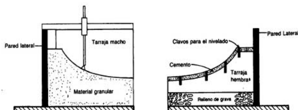


FIGURA 14.5 Esquema ilustrativo del uso de tarrajas macho y hembra y nivelamiento de clavos de madera en la construcción de modelos.

Las técnicas de construcción de modelos de fondo móvil son un poco diferentes de las empleadas en la construcción de modelos de fondo fijo. La construcción de modelos de fondo móvil requiere posicionar las guías o rieles guías en los bordes del modelo. Estos rieles o guías pueden ser las paredes del tanque del modelo si éstas se han construido en forma precisa. Puede emplearse el método de construcción de la tarraja macho; i.e., se suspenden las tarrajas de las guías o rieles guías y se forma la topografía apropiada. Según sea el tamaño de la cuenca del modelo y la presencia y distribución del enrocamiento del fondo en el prototipo, el fondo de la cuenca puede rellenarse con material barato como se sugirió para el caso de modelos de fondo fijo. En las capas superiores del modelo de fondo móvil, se coloca el sedimento del modelo. Al poner este material, se debe asegurar que la profundidad del sedimento móvil sea mayor que la erosión máxima factible.

14.5 CALIBRACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL MODELO FÍSICO

Al igual que en los modelos numéricos, un modelo no tiene ningún valor si no se puede usar para predecir el comportamiento del prototipo. Por ende, después de construido un modelo hidráulico, debe calibrarse y verificarse; i.e., se debe hacer una determinación que indique si los eventos del prototipo se reproducen precisamente en el modelo. En los modelos numéricos, con frecuencia se logra la concordancia entre el modelo y el prototipo ajustando los coeficientes empleados en el modelo hasta que se llega a una concordancia adecuada entre el modelo y el prototipo. En un modelo físico, la concordancia prototipo-modelo se logra ajustando las características físicas, como la rugosidad de fondo, el gasto, y/o los niveles del agua.

La buena calibración de un modelo numérico o físico requiere datos precisos del prototipo referentes a la geometría del canal, las elevaciones de la superficie del agua, el transporte de sedimento, y las velocidades. Se debe notar que la recabación de una base de datos adecuada para calibrar el modelo puede ser muy costosa y tomar mucho tiempo. Respecto al proceso de calibración, debe notarse lo siguiente:

1. En el caso de modelos en los que se cumplen muy bien las condiciones para similitud exacta, se necesita muy poca calibración. Por ejemplo, se pueden modelar las características gruesas del flujo en una estructura hidráulica con una escala relativamente grande que tenga muy poca, si es que alguna, distorsión geométrica. Por ende, el modelo reproducirá el comportamiento en el prototipo con muy poca calibración.

2. Cuando la fricción es importante (e.g., en el flujo en canales) el problema de la calibración se complica mucho. A lo menos, se deben comparar las elevaciones entre el modelo y el prototipo para gastos cercanos al de operación del modelo. Si el modelo va a simular gastos en el prototipo en un amplio intervalo, entonces se debe calibrar el modelo para un amplio intervalo de gastos.

3. Las mediciones de distribución de velocidad son valiosas, aunque en los modelos con escalas geométricas distorsionadas quizá no se pueda esperar que el modelo reproduzca en forma precisa las distribuciones. Además, la comparación de distribuciones de velocidades provee información valiosa sobre la precisión total del modelo.
4. Si el modelo va a simular velocidades puntuales en un tramo, entonces se necesitan datos precisos de campo sobre la velocidad del flujo en esos puntos.
5. Si el modelo va a simular eventos de flujos no permanentes, entonces debe reproducirse el movimiento del evento no permanente en el tramo —con las escalas apropiadas espaciales y temporales— en el modelo.
6. Si el modelo va a simular transporte de sedimento, el proceso de calibración necesita datos precisos sobre el transporte de sedimento y las formaciones del fondo en el prototipo. Sharp (1981) notó que aunque la información sobre transporte de sedimento en flujo permanente es útil, las mediciones de transporte de sedimento en condiciones no permanentes reviste gran interés.

Después de llegar a una concordancia razonable para el o los eventos de calibración, empieza el proceso de verificación. La verificación requiere datos independientes de los de calibración y busca confirmar que el modelo haya sido correctamente calibrado. En muchos casos, no se lleva a cabo un proceso riguroso de verificación, como consecuencia del alto costo de la recabación de datos empíricos adecuados y confiables. Los procesos de calibración y verificación son esenciales si el programa de modelaje va a proporcionar información útil y confiable.

14.6 MODELOS DE PROPÓSITOS ESPECIALES

Hielo

Como se discutió en la sección 5.4, el hielo puede ser un problema importante y crucial en el diseño y análisis de canales abiertos en climas nórdicos. Si se considera la importancia de los problemas de hielo en muchas áreas del mundo, es crucial tener en cuenta modelos de problemas de hielo. Se han desarrollado dos tipos diferentes de modelos. Cuando los esfuerzos internos de la capa de hielo son importantes (e.g., al considerar las fuerzas desarrolladas cuando una capa de hielo entra en contacto con pilas de puentes) no sólo se debe modelar la hidrodinámica del flujo en forma correcta, sino también debe tenerse una similitud hidroelástica entre el prototipo y el modelo. Por otro lado, las acumulaciones de hielo que se producen por el apilamiento de hielo a la deriva puede modelarse en muchos casos sin considerar la similitud hidroelástica.

En el caso en donde se deben considerar los esfuerzos internos del hielo, es importante la manera en la que se aplica a la estructura la carga del hielo (véa-

se, p. ej., Neill, 1976). Por ejemplo, cuando el hielo empuja contra una pila vertical, falla por compresión (Fig. 14.6). Si se supone que el flujo es turbulento y que la gravedad no importa en el problema ya que la capa de hielo no se dobla o desliza hacia arriba de la pila, entonces

$$F = g(h, d, u, \sigma_c, \epsilon, E) \tag{14.6.1}$$

donde F = fuerza sobre la pila
h = espesor de la capa de hielo
d = distancia característica de la pila
u = velocidad de la capa de hielo
σ_c = esfuerzo de falla de la compresión del hielo, a un ritmo de deformación ϵ
E = módulo de elasticidad de Young

Al aplicar el teorema II de Buckingham a la formulación funcional supuesta en la ecuación (14.6.1) se obtiene

$$\frac{F}{\sigma_c dh} = g\left(\frac{d}{h}, \frac{u}{\epsilon h}, \frac{E}{\sigma_c}\right) \tag{14.6.2}$$

Sharp (1981) notó que esta formulación también supone que el tamaño de los cristales es pequeño, relativo al ancho de la pila; el hielo se rompe en fragmentos pequeños, por lo que ϵ debe incluirse como consecuencia de la conocida variación del esfuerzo compresivo de falla con el ritmo de deformación.

Para el caso de una pila inclinada (Fig. 14.7), puede suponerse que el hielo fallará por una combinación de compresión, cortante, y flexión. En este caso, se deben considerar las fuerzas gravitacionales ya que el hielo se desliza hacia arriba de la superficie de la pila. Neill (1976) ha sugerido que para este caso

$$\frac{F}{\sigma_f h^2} = g\left(\frac{d}{h}, \Gamma, \frac{u^2}{gh}, \frac{E}{\sigma_f}\right) \tag{14.6.3}$$

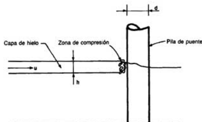


FIGURA 14.6 Falla de hielo en una pila vertical.

donde σ_f = esfuerzo de falla a flexión del hielo
Γ = ángulo de fuerza de la pila
g = aceleración de la gravedad

La dificultad principal asociada con problemas de modelado de hielo, en los que debe considerarse el esfuerzo interno del hielo, es el desarrollo de un modelo de hielo en el que las propiedades mecánicas del prototipo estén apropiadamente escaladas. Se han desarrollado numerosas técnicas para formar el hielo del modelo, y se ha demostrado que la resistencia a flexión de la capa de hielo depende de: *1*) la salinidad del agua en la que se formó el hielo; *2*) el ritmo de crecimiento de la capa de hielo; y *3*) la temperatura a la que se mantuvo la capa después de su formación. Si se controlan en forma adecuada estas variables, es posible entonces desarrollar capas de hielo con resistencias al cortante entre las del prototipo y 0.01 de éstas. Pero el problema principal es desarrollar capas en el modelo de hielo con el módulo elástico apropiado. En capas de hielo naturales del prototipo, la razón E/σ_f está entre los valores

$$2000 < \frac{E}{\sigma_f} < 8000$$

Mientras que en muchos modelos E/σ_f puede ser tan baja como 500, los valores bajos de E/σ_f producen hielo que se desvía demasiado antes de romperse (Schwarz, 1977). Dada la importancia de esta razón característica en el modelado de hielo, son apropiados algunos comentarios sobre la medición de σ_f y E. La resistencia a flexión del hielo en el laboratorio y campo se determina comúnmente cortando una viga en cantiliver en el hielo y probándola hasta la falla; así, σ_f se determina mediante

$$\sigma_f = \frac{6P_L L}{bh^2} \tag{14.6.4}$$

donde P_L = carga aplicada
L = longitud de la viga
b = ancho de la viga
h = altura de la viga

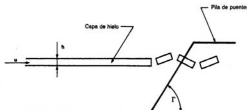


FIGURA 14.7 Falla del hielo en una pila de puente inclinada.

Aunque es difícil la medición del módulo de elasticidad en el campo, puede medirse convenientemente en el laboratorio por una combinación de mediciones de cargas y deflecciones. Para una capa de hielo continua, y con fronteras lo suficientemente distantes desde el punto de aplicación de la carga con el objeto de que la capa de hielo se pueda considerar infinita, la deflexión Δ para una carga P_L está dada por

$$\Delta = \frac{P_L}{8S_w l^2} \tag{14.6.5}$$

donde S_w = gravedad específica del agua y l = una medida de la longitud de la capa infinita de hielo sobre la que se distribuyen los esfuerzos. Puede estimarse l a partir de la teoría de losas infinitas apoyadas sobre un cimiento elástico o

$$l^4 = \frac{Eh^3}{12S_w(1 - n_p^2)} \tag{14.6.6}$$

donde n_p^2 = módulo de Poisson.

Una alternativa al uso de hielo artificial generado por refrigeración en un modelo, es el empleo de hielo artificial que está compuesto por varias sustancias químicas ligadas en una matriz de cera o yeso.. El Mod-Ice usado por Arcted de Columbia, Maryland, emplea cinco sustancias químicas en una mezcla —que es de su propiedad— para lograr valores adecuados y controlados de las resistencias a la flexión y compresión, módulo elástico, densidad, y rugosidad (Kotras, *et al.*, 1977). En la tabla 14.3 se resumen las propiedades relevan-

TABLA 14.3 Propiedades del hielo de agua dulce, hielo de agua salada, y Mod-Ice (Kotras, et al., 1977)

Propiedad	Hielo de agua dulce	Hielo de agua salada	Mod-Ice escala = 1/40
Espesor del hielo, ft (m)	0–2.0 (0–0.6)	0.1–11 (0–3.5)	0.3–20 (0.1–6.0)
Resistencia a flexión, lb/ft² (kPa)	10 000–21 000 (500–1000)	5200–16 000 (250–750)	8400–21 000 (400–1000)
Resistencia a la compresión/ resistencia a flexión	2.0–5.0	2.0–5.0	0.7–7.0
Módulo de elasticidad/ resistencia a flexión	1000–5000	1000–8000	500–11 000
Coeficiente de fricción de Darcy Weisbach	0.3–0.7	—	0.3–0.8
Coeficiente de fricción al deslizamiento	0.1–0.4	0.1–0.4	0.1–0.55

tes del hielo de agua fresca, hielo de agua salada, y Mod-Ice. En los modelos que emplean el Mod-Ice, las escalas del modelo están con frecuencia limitadas por un valor mínimo de la resistencia a la flexión —aproximadamente 2.5 lb/in^2 (13.8 kN/m^2) —aunque ésta no parece ser una limitación importante (Sharp, 1981). Además de las formulaciones privativas para el hielo, como la descrita arriba, se tienen formulaciones descritas y analizadas en la literatura abierta (véase, p. ej., Timco, 1979).

Si se diseña el modelo para estudiar el deslizamiento de hielo, las estructuras de control de hielo, o las concentraciones de hielo, se supone que el hielo es perfectamente rígido, por lo que pueden despreciarse los efectos térmicos, puede llevarse a cabo entonces el estudio de modelo empleando polietileno, polipropileno, madera o parafina para simular los bloques de hielo. En este caso, el movimiento del fluido es la preocupación principal del modelo; de todas maneras, el estudio se debe considerar de tipo cualitativo más que cuantitativo. La dificultad en la obtención de datos empíricos para la calibración de estos modelos es su problema principal.

BIBLIOGRAFÍA

Anonymous, "Hydraulic Models," *The American Society of Civil Engineers Manual of Practice*, No. 25, American Society of Civil Engineers, New York, 1942.

Blench, T., "Blench on Distorted Models," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 121, 1956, pp. 458–459.

Bogardi, J., "Hydraulic Similarity of River Models with Movable Bed," *Acta Tech. Acad. Sci. Hung.*, vol. 14, 1959, pp. 417–445.

Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Einstein, H. A., and Barbarossa, N. L., "River Channel Roughness," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 177, 1956a, pp. 440–457.

Einstein, H. A., and Chien, N., "Einstein-Chien on Distorted Models," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 121, 1956b, pp. 459–462.

Fischer, H. B., "The Mechanics of Dispersion in Natural Streams," Proceedings of the *American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 93, no. HY6, November 1967, pp. 187–216.

Fischer, H. B., and Holley, E. R., "Analysis of the Use of Distorted Hydraulic Models for Dispersion Studies," *Water Resources Research*, vol. 7, no. 1, February 1971, pp. 46–51.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, Macmillan, New York, 1966.

Kotras, T., Lewis, J., and Etzel, R., "Hydraulic Modeling of Ice-Covered Waters," *Proceedings of the 4th International Conference on POAC*, vol. 1, Memorial University of Newfoundland, St. John's, Newfoundland, Canada, 1977, pp. 453–463.

Moretti, P. M., and McLaughlin, D. K., "Hydraulic Modeling in Stratified Lakes," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 103, no. HY4, April 1977, pp. 368–380.

Neill, C. R., "Dynamic Ice Forces on Piers and Piles: An Assessment of Design Guidelines in the Light of Recent Research," *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 3, 1976, pp. 305–341.

Raudkivi, A. J., *Loose Boundary Hydraulics*, 2d ed., Pergamon Press, New York, 1976.

Roberts, B. R., Findikakis, A. N., and Street, R. L., "A Program of Research on Turbulent Mixing in Distorted Hydraulic Models," The American Society of Civil Engineers, *Proceedings of the Specialty Conference on Conservation and Utilization of Water and Energy Resources*, 1979, pp. 57–64.

Roberts, B. R., and Street, R. L., "Impact of Vertical Scale Distortion on Turbulent Mixing in Physical Models," The American Society of Civil Engineers, *Proceedings of the Specialty Conference on Computer and Physical Modeling in Hydraulic Engineering*, 1980, pp. 261–271.

Rouse, H., *Engineering Hydraulics*, Wiley, New York, 1958.

Rouse, H., and Ince, S., *History of Hydraulics*, Dover Publications, New York, 1963.

Schwarz, J., "New Developments in Modelling Ice Problems," *Proceedings of the 4th International Conference on POAC*, vol. 1, Memorial University of Newfoundland, St. John's, Newfoundland, Canada, 1977, pp. 45–61.

Sharp, J. J., *Hydraulic Modelling*, Butterworth, London, 1981.

Streeter, V. L., and Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

Timco, G. W., "The Mechanical and Morphological Properties of Doped Ice," *Proceedings of the 5th International Conference on POAC*, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway, 1979, pp. 719–739.

Walski, T. M., "Properties of Steady Viscosity-Stratified Flow to a Line Sink," Technical Rept. EL-79-6, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., July 1979.

Zwamborn, J. A., "Reproducibility in Hydraulic Models of Prototype River Morphology," *La Houille Blanche*, no. 3, 1966, pp. 291–298.

Zwamborn, J. A., "Solution of River Problems with Moveable-Bed Hydraulic Models," MEG 597, Council for Scientific and Industrial Research, Pretoria, South Africa, 1967.

Zwamborn, J. A., "Hydraulic Models," MEG 795, Council for Scientific and Industrial Research, Stellenbosch, South Africa, 1969.

APÉNDICE I

PROGRAMA PARA DETERMINAR LA PROFUNDIDAD NORMAL DE FLUJO EN CANALES RECTANGULARES, TRIANGULARES, TRAPEZOIDALES, CIRCULARES Y NATURALES

```
      PROGRAM DEPTH
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION S(20),INDEX(20)
      WRITE(*,100)
      READ(*,*) ARM
      WRITE(*,101)
      READ(*,*) ID
      IF ( ID .EQ. 40 .OR. ID .EQ. 30 ) WRITE(*,103)
      IF ( ID .EQ. 40 .OR. ID .EQ. 30 ) READ(*,*) Z
      IF ( ID .EQ. 20 .OR. ID .EQ. 40 ) WRITE(*,104)
      IF ( ID .EQ. 20 .OR. ID .EQ. 40 ) READ(*,*) B
      IF ( ID .EQ. 50 ) WRITE(*,106)
      IF ( ID .EQ. 50 ) READ(*,*) D
      IF ( ID .EQ. 50 ) GOTO 1
      IF ( ID .EQ. 60 ) GOTO 1
      I = 1
      YCH(I) = 0.05
      I = I+1
      YCH(I) = 0.5
      I = I+1
      YCH(I) = 1.0
      I = I+1
      YCH(I) = 5.0
      I = I+1
      YCH(I) = 10.0
      I = I+1
      YCH(I) = 15.0
      I = I+1
      YCH(I) = 20.0
      ERR = 0.0
      IF ( ID .EQ. 20 ) CALL RECT(ARM,B,ERR)
      IF ( ID .EQ. 30 ) B = 0.0
      IF ( ID .EQ. 30 .OR. ID .EQ. 40 ) CALL TRAP(ARM,B,Z,ERR)
    1 IF ( ID .EQ. 50 ) CALL CIRC(ARM,D,ERR)
      IF ( ID .EQ. 60 ) CALL NATDAT(ARM,ERR,M)
      IF ( ERR .EQ. 1.0 ) GOTO 500
```

```
      IF ( ID .NE. 60 ) N = 10
      IF ( ID .EQ. 60 ) N = M
      CALL SPCOEF(N,AR,Y,S,INDEX)
      CALL SPLINE(N,AR,Y,S,INDEX,ARM,YCOMP)
      IF ( ID .NE. 60 ) WRITE(*,105) YCOMP
      IF ( ID .EQ. 60 ) WRITE(*,107) YCOMP
  100 FORMAT(1X,'INDIQUE EL VALOR CALCULADO DE AR**0.667  ')
  101 FORMAT(1X,'IDENTIFIQUE EL TIPO DE CANAL: 20 RECTANGULAR;',/
     1,31X,'30 TRIANGULAR;',/,31X,'40 TRAPEZOIDAL;',/
     2,31X,'50 CIRCULAR;',/,31X,'60 NATURAL')
  102 FORMAT(I2)
  103 FORMAT(1X,'PROPORCIONE EL VALOR DE Z  ')
  104 FORMAT(1X,'PROPORCIONE EL ANCHO DEL FONDO  ')
  105 FORMAT(1X,'PROFUNDIDAD DE FLUJO = ',F10.2)
  106 FORMAT(1X,'PROPORCIONE EL DIAMETRO  ')
  107 FORMAT(1X,'TIRANTE NORMAL = ',F10.2)
  500 STOP
      END
C
      SUBROUTINE RECT(ARM,B,ERR)
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION ARCH(6)
      DO 1 I=1,6
         A = B*YCH(I)
         P = B + 2.*YCH(I)
         ARCH(I) = A*(A/P)**0.667
    1 CONTINUE
      DO 2 I=1,5
         IF ( ARM .GE. ARCH(I) .AND. ARM .LT. ARCH(I+1) ) GOTO 3
    2 CONTINUE
      WRITE(*,100)
  100 FORMAT(1X,'EL VALOR DE AR ESTA FUERA DE LOS LIMITES'
     A,' PERMISIBLES')
      ERR = 1.0
      GOTO 4
    3 Y1 = YCH(I)
      Y2 = YCH(I+1)
      DY = (YCH(I+1)-YCH(I))/10.
      J = 1
      Y(J) = YCH(I)
      AR(J) = ARCH(I)
      DO 5 I=2,10
         Y(I) = Y(I-1) + DY
         A = B*Y(I)
         P = B + 2.*Y(I)
         AR(I) = A*(A/P)**0.667
    5 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE TRIA(ARM,Z,ERR)
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION ARCH(6)
      DO 1 I=1,6
         A = Z*YCH(I)**2
         P = 2.*YCH(I)*SQRT( 1 + Z**2 )
         ARCH(I) = A*(A/P)**0.667
    1 CONTINUE
      DO 2 I=1,5
         IF ( ARM .GE. ARCH(I) .AND. ARM .LT. ARCH(I+1) ) GOTO 3
    2 CONTINUE
      WRITE(*,100)
```

```
  100 FORMAT(1X,'EL VALOR DE AR ESTA FUERA DE LOS LIMITES'
     A,' PERMISIBLES')
      ERR = 1.0
      GOTO 4
    3 Y1 = YCH(I)
      Y2 = YCH(I+1)
      DY = (Y2-Y1)/10.
      J = 1
      Y(J) = Y1
      AR(J) = ARCH(I)
      DO 5 I=2,10
         Y(I) = Y(I-1) + DY
         A = Z*Y(I)**2
         P = 2.*Y(I)*SQRT( 1. + Z**2 )
         AR(I) = A*(A/P)**0.667
    5 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE TRAP(ARM,B,Z,ERR)
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION ARCH(6)
      DO 1 I=1,6
         A = YCH(I)*( B + Z*YCH(I) )
         P = B + 2.*YCH(I)*SQRT( 1. + Z**2 )
         ARCH(I) = A*(A/P)**0.667
    1 CONTINUE
      DO 2 I=1,5
         IF ( ARM .GE. ARCH(I) .AND. ARM .LT. ARCH(I+1) ) GOTO 3
    2 CONTINUE
      WRITE(*,100)
  100 FORMAT(1X,'EL VALOR DE AR ESTA FUERA DE LOS LIMITES'
     A,' PERMISIBLES')
      ERR = 1.0
      GOTO 4
    3 Y1 = YCH(I)
      Y2 = YCH(I+1)
      DY = (Y2-Y1)/10.
      J = 1
      Y(J) = Y1
      AR(J) = ARCH(I)
      DO 5 I=2,10
         Y(I) = Y(I-1) + DY
         A = Y(I)*( B + Z*Y(I) )
         P = B + 2.*Y(I)*SQRT( 1. + Z**2 )
         AR(I) = A*(A/P)**0.667
    5 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE SPCOEF(N,XN,FN,S,INDEX)
      DIMENSION XN(N),FN(N),S(N),INDEX(N)
      DIMENSION RHO(50),TAU(50)
      NM1 = N-1
      DO 23017 I=1,N
         INDEX(I) = I
23017 CONTINUE
      DO 23019 I=1,NM1
         IP1 = I+1
         DO 23021 J = IP1,N
            II = INDEX(I)
```

```
            IJ = INDEX(J)
            IF( .NOT. ( XN(II) .GT. XN(IJ) ) ) GOTO 23023
            ITEMP = INDEX(I)
            INDEX(I) = INDEX(J)
            INDEX(J) = ITEMP
23023       CONTINUE
23021    CONTINUE
23019 CONTINUE
      NM2 = N-2
      RHO(2) = 0.0
      TAU(2) = 0.0
      DO 23025 I=2,NM1
         IIM1 = INDEX(I-1)
         II = INDEX(I)
         IIP1 = INDEX(I+1)
         HIM1 = XN(II) - XN(IIM1)
         HI = XN(IIP1) - XN(II)
         TEMP = (HIM1/HI)*( RHO(I)+2. ) + 2.
         RHO(I+1) = 1./TEMP
         D = 6.*((FN(IIP1)-FN(II))/HI - (FN(II)-FN(IIM1))/HIM1)/HI
         TAU(I+1) = (D-HIM1*TAU(I)/HI)/TEMP
23025 CONTINUE
      S(1) = 0.0
      S(N) = 0.0
      DO 23027 I=1,NM2
         IB = N-I
         S(IB) = RHO(IB+1)*S(IB+1) + TAU(IB+1)
23027 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE SPLINE(N,XN,FN,S,INDEX,X,SP)
      DIMENSION XN(N),FN(N),S(N),INDEX(N)
      I1 = INDEX(1)
      IF( .NOT. ( X .LT. XN(I1) ) ) GOTO 23029
      I2 = INDEX(2)
      H1 = XN(I2) - XN(I1)
      SP = FN(I1) + (X-XN(I1))*((FN(I2)-FN(I1))/H1-H1*S(2)/6.)
      GOTO 23030
23029 CONTINUE
      IN = INDEX(N)
      IF ( .NOT. ( X .GT. XN(IN) ) ) GOTO 23031
      INM1 = INDEX(N-1)
      HNM1 = XN(IN) - XN(INM1)
      SP = FN(IN) + (X-XN(IN))*((FN(IN)-FN(INM1))/HNM1+HNM1*S(N-1)/6.)
      GOTO 23032
23031 CONTINUE
      DO 23033 I=2,N
         II = INDEX(I)
         IF ( .NOT. ( X .LE. XN(II) ) ) GOTO 23035
         GOTO 23034
23035    CONTINUE
23033 CONTINUE
23034 CONTINUE
      L = I-1
      IL = INDEX(L)
      ILP1 = INDEX(L+1)
      A = XN(ILP1) - X
      B = X - XN(IL)
      HL = XN(ILP1) - XN(IL)
      SP = A*S(L)*(A**2/HL-HL)/6.+B*S(L+1)*(B**2/HL-HL)/6.+(A*FN(IL)+
     A B*FN(ILP1))/HL
23032 CONTINUE
```

```
23030 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE CIRC(ARM,D,ERR)
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION ARCH(6)
      DD = 0.15
      DO 1 I=1,6
         YCH(I) = D*DD*I
         Z = YCH(I) - D/2.
         R = D/2.
         A = (3.14*R*R/2.)+Z*SQRT(R*R-Z*Z)+R*R*ASIN(Z/R)
         IF ( Z .GE. 0.0 ) GOTO 6
         ZZ = ABS(Z)
         THETA = 2.*ACOS(ZZ/R)
         GOTO 7
    6    THETA = ASIN(Z/R)
         THETA = 2.*THETA + 3.14
    7    P = R*THETA
         ARCH(I) = A*(A/P)**0.667
    1 CONTINUE
      DO 2 I=1,5
         IF ( ARM .GE. ARCH(I) .AND. ARM .LT. ARCH(I+1) ) GOTO 3
    2 CONTINUE
      WRITE(*,100)
  100 FORMAT(1X,'EL VALOR DE AR ESTA FUERA DE LOS LIMITES'
     A,' PERMISIBLES')
      ERR = 1.0
      GOTO 4
    3 Y1 = YCH(I)
      Y2 = YCH(I+1)
      DY = (YCH(I+1)-YCH(I))/10.
      J = 1
      Y(J) = Y1
      AR(J) = ARCH(I)
      DO 5 I=2,10
         Y(I) = Y(I-1) + DY
         Z = Y(I) - R
         A = (3.14*R*R/2.)+Z*SQRT(R*R-Z*Z)+R*R*ASIN(Z/R)
         IF ( Z .GE. 0.0 ) GOTO 8
         ZZ = ABS(Z)
         THETA = 2.*ACOS(ZZ/R)
         GOTO 9
    8    THETA = ASIN(Z/R)
         THETA = 2.*THETA + 3.14
    9    P = R*THETA
         AR(I) = A*(A/P)**0.667
    5 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE NATDAT(ARM,ERR,N)
      COMMON YCH(7),Y(10),AR(10)
      DIMENSION A(20),P(20),S(20),X1(20),X2(20)
      WRITE(*,100)
      WRITE(*,101)
      READ(*,*) N
      DO 1 I=1,N
         WRITE(*,103) I
         READ(*,*) S(I),X1(I),X2(I)
         IF ( I .EQ. 1 ) GOTO 1
```

```
      DY = S(I) - S(I-1)
      DX1 = X1(I-1)-X1(I)
      DX2 = X2(I) - X2(I-1)
      IF ( I .GT. 2 ) GOTO 2
      P(I-1) = SQRT(DY**2+DX1**2) + SQRT(DY**2+DX2**2)
      A(I-1) = 0.5*DY*(X2(I)-X1(I))
      GOTO 3
  2   BT = X2(I)-X1(I)
      BB = X2(I-1)-X1(I-1)
      A(I-1) = A(I-2) + 0.5*DY*(BT+BB)
      P(I-1) = P(I-2) + SQRT(DY**2+DX1**2) + SQRT(DY**2+DX2**2)
  3   AR(I-1) = A(I-1)*(A(I-1)/P(I-1))**0.667
      Y(I-1) = S(I)
  1 CONTINUE
    DO 4 I=2,N
      IF( AR(I-1) .LE. ARM .AND. AR(I) .GT. ARM ) GOTO 5
  4 CONTINUE
    ERR = 1.0
    WRITE(*,104)
  5 CONTINUE
100 FORMAT(1X,'EN ESTE PROGRAMA SE PROPORCIONAN DE MANERA',/
   A,1X,'INTERACTIVA LOS DATOS QUE DEFINEN EL PERIMETRO DEL',/
   B,1X,'CANAL EN TERMINOS DE LA ALTURA DEL AGUA POR ENCIMA',/
   C,1X,'DE UN NIVEL DE REFERENCIA Y DOS PUNTOS DE INTERSECCION')
101 FORMAT(1X,'PROPORCIONE EL NUMERO DE TERNAS PARA LECTURA  ')
102 FORMAT(I2)
103 FORMAT(1X,'INDIQUE LA TERNA NUMERO ',2X,I2)
104 FORMAT(1X,'EL VALOR DE AR ESTA FUERA DE LOS LIMITES'
   A,' PERMISIBLES')
    RETURN
    END
```

APÉNDICE II

Tabla para determinar $F(u,N)$ para pendientes positivas*

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.161	0.161	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.202	0.201	0.201	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.223	0.222	0.221	0.221	0.221	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.244	0.243	0.242	0.241	0.241	0.241	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.265	0.263	0.262	0.262	0.261	0.261	0.261	0.260	0.260	0.260
0.28	0.286	0.284	0.283	0.282	0.282	0.281	0.281	0.281	0.280	0.280
0.30	0.307	0.305	0.304	0.303	0.302	0.302	0.301	0.301	0.301	0.300
0.32	0.329	0.326	0.325	0.324	0.323	0.322	0.322	0.321	0.321	0.321
0.34	0.351	0.348	0.346	0.344	0.343	0.343	0.342	0.342	0.341	0.341
0.36	0.372	0.369	0.367	0.366	0.364	0.363	0.363	0.362	0.362	0.361
0.38	0.395	0.392	0.389	0.387	0.385	0.384	0.383	0.383	0.382	0.382

*** Esta tabla es una reproducción de "Integrating the Equation of Gradually Varied Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 81, noviembre 1955, pp. 1-32.**

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.40	0.418	0.414	0.411	0.408	0.407	0.405	0.404	0.403	0.403	0.402
0.42	0.442	0.437	0.433	0.430	0.428	0.426	0.425	0.424	0.423	0.423
0.44	0.465	0.460	0.456	0.452	0.450	0.448	0.446	0.445	0.444	0.443
0.46	0.480	0.483	0.479	0.475	0.472	0.470	0.468	0.466	0.465	0.464
0.48	0.514	0.507	0.502	0.497	0.494	0.492	0.489	0.488	0.486	0.485
0.50	0.539	0.531	0.525	0.521	0.517	0.514	0.511	0.509	0.508	0.506
0.52	0.565	0.557	0.550	0.544	0.540	0.536	0.534	0.531	0.529	0.528
0.54	0.592	0.582	0.574	0.568	0.563	0.559	0.556	0.554	0.551	0.550
0.56	0.619	0.608	0.599	0.593	0.587	0.583	0.579	0.576	0.574	0.572
0.58	0.648	0.635	0.626	0.618	0.612	0.607	0.603	0.599	0.596	0.594
0.60	0.676	0.663	0.653	0.644	0.637	0.631	0.627	0.623	0.620	0.617
0.61	0.691	0.678	0.667	0.657	0.650	0.644	0.639	0.635	0.631	0.628
0.62	0.706	0.692	0.680	0.671	0.663	0.657	0.651	0.647	0.643	0.640
0.63	0.722	0.707	0.694	0.684	0.676	0.669	0.664	0.659	0.655	0.652
0.64	0.738	0.722	0.709	0.698	0.690	0.683	0.677	0.672	0.667	0.664
0.65	0.754	0.737	0.724	0.712	0.703	0.696	0.689	0.684	0.680	0.676
0.66	0.771	0.753	0.738	0.727	0.717	0.709	0.703	0.697	0.692	0.688
0.67	0.787	0.769	0.754	0.742	0.731	0.723	0.716	0.710	0.705	0.701
0.68	0.804	0.785	0.769	0.757	0.746	0.737	0.729	0.723	0.718	0.713
0.69	0.822	0.804	0.785	0.772	0.761	0.751	0.743	0.737	0.731	0.726
0.70	0.840	0.819	0.802	0.787	0.776	0.766	0.757	0.750	0.744	0.739
0.71	0.858	0.836	0.819	0.804	0.791	0.781	0.772	0.764	0.758	0.752
0.72	0.878	0.855	0.836	0.820	0.807	0.796	0.786	0.779	0.772	0.766
0.73	0.898	0.874	0.854	0.837	0.823	0.811	0.802	0.793	0.786	0.780
0.74	0.918	0.892	0.868	0.854	0.840	0.827	0.817	0.808	0.800	0.794
0.75	0.940	0.913	0.890	0.872	0.857	0.844	0.833	0.823	0.815	0.808
0.76	0.961	0.933	0.909	0.890	0.874	0.861	0.849	0.839	0.830	0.823
0.77	0.985	0.954	0.930	0.909	0.892	0.878	0.866	0.855	0.846	0.838
0.78	1.007	0.976	0.950	0.929	0.911	0.896	0.883	0.872	0.862	0.854
0.79	1.031	0.998	0.971	0.940	0.930	0.914	0.901	0.889	0.879	0.870
0.80	1.056	1.022	0.994	0.970	0.950	0.934	0.919	0.907	0.896	0.887
0.81	1.083	1.046	1.017	0.992	0.971	0.954	0.938	0.925	0.914	0.904
0.82	1.110	1.072	1.041	1.015	0.993	0.974	0.958	0.945	0.932	0.922
0.83	1.139	1.099	1.067	1.039	1.016	0.996	0.979	0.965	0.952	0.940
0.84	1.171	1.129	1.094	1.064	1.040	1.019	1.001	0.985	0.972	0.960
0.85	1.201	1.157	1.121	1.091	1.065	1.043	1.024	1.007	0.993	0.980
0.86	1.238	1.192	1.153	1.119	1.092	1.068	1.048	1.031	1.015	1.002
0.87	1.272	1.223	1.182	1.149	1.120	1.095	1.074	1.055	1.039	1.025
0.88	1.314	1.262	1.228	1.181	1.151	1.124	1.101	1.081	1.064	1.049
0.89	1.357	1.302	1.255	1.216	1.183	1.155	1.131	1.110	1.091	1.075

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0.90	1.401	1.343	1.294	1.253	1.218	1.189	1.163	1.140	1.120	1.103
0.91	1.452	1.389	1.338	1.294	1.257	1.225	1.197	1.173	1.152	1.133
0.92	1.505	1.438	1.351	1.340	1.300	1.266	1.236	1.210	1.187	1.166
0.93	1.564	1.493	1.435	1.391	1.348	1.311	1.279	1.251	1.226	1.204
0.94	1.645	1.568	1.504	1.449	1.403	1.363	1.328	1.297	1.270	1.246
0.950	1.737	1.652	1.682	1.518	1.467	1.423	1.385	1.352	1.322	1.296
0.960	1.833	1.741	1.665	1.601	1.545	1.497	1.454	1.417	1.385	1.355
0.970	1.969	1.866	1.780	1.707	1.644	1.590	1.543	1.501	1.464	1.431
0.975	2.055	1.945	1.853	1.773	1.707	1.649	1.598	1.554	1.514	1.479
0.980	2.164	2.045	1.946	1.855	1.783	1.720	1.666	1.617	1.575	1.536
0.985	2.294	2.165	2.056	1.959	1.880	1.812	1.752	1.699	1.652	1.610
0.990	2.477	2.333	2.212	2.106	2.017	1.940	1.873	1.814	1.761	1.714
0.995	2.792	2.621	2.478	2.355	2.250	2.159	2.070	2.008	1.945	1.889
0.999	3.523	3.292	3.097	2.931	2.788	2.663	2.554	2.457	2.370	2.293
1.000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	3.317	2.931	2.640	2.399	2.184	2.008	1.856	1.725	1.610	1.508
1.005	2.587	2.266	2.022	1.818	1.679	1.506	1.384	1.279	1.188	1.107
1.010	2.273	1.977	1.757	1.572	1.419	1.291	1.182	1.089	1.007	0.936
1.015	2.090	1.807	1.602	1.428	1.286	1.166	1.065	0.978	0.902	0.836
1.020	1.961	1.711	1.493	1.327	1.191	1.078	0.982	0.900	0.828	0.766
1.03	1.779	1.531	1.340	1.186	1.060	0.955	0.866	0.790	0.725	0.668
1.04	1.651	1.410	1.232	1.086	0.967	0.868	0.785	0.714	0.653	0.600
1.05	1.552	1.334	1.150	1.010	0.896	0.802	0.723	0.656	0.598	0.548
1.06	1.472	1.250	1.082	0.948	0.838	0.748	0.672	0.608	0.553	0.506
1.07	1.404	1.195	1.026	0.896	0.790	0.703	0.630	0.569	0.516	0.471
1.08	1.346	1.139	0.978	0.851	0.749	0.665	0.595	0.535	0.485	0.441
1.09	1.295	1.089	0.935	0.812	0.713	0.631	0.563	0.506	0.457	0.415
1.10	1.250	1.050	0.897	0.777	0.681	0.601	0.536	0.480	0.433	0.392
1.11	1.209	1.014	0.864	0.746	0.652	0.575	0.511	0.457	0.411	0.372
1.12	1.172	0.981	0.833	0.718	0.626	0.551	0.488	0.436	0.392	0.354
1.13	1.138	0.950	0.805	0.692	0.602	0.529	0.468	0.417	0.374	0.337
1.14	1.107	0.921	0.780	0.669	0.581	0.509	0.450	0.400	0.358	0.322
1.15	1.078	0.892	0.756	0.647	0.561	0.490	0.432	0.384	0.343	0.308
1.16	1.052	0.870	0.734	0.627	0.542	0.473	0.417	0.369	0.329	0.295
1.17	1.027	0.850	0.713	0.608	0.525	0.458	0.402	0.356	0.317	0.283
1.18	1.003	0.825	0.694	0.591	0.509	0.443	0.388	0.343	0.305	0.272
1.19	0.981	0.810	0.676	0.574	0.494	0.429	0.375	0.331	0.294	0.262
1.20	0.960	0.787	0.659	0.559	0.480	0.416	0.363	0.320	0.283	0.252
1.22	0.922	0.755	0.628	0.531	0.454	0.392	0.341	0.299	0.264	0.235
1.24	0.887	0.725	0.600	0.505	0.431	0.371	0.322	0.281	0.248	0.219

u \ N	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
1.26	0.855	0.692	0.574	0.482	0.410	0.351	0.304	0.265	0.233	0.205
1.28	0.827	0.666	0.551	0.461	0.391	0.334	0.288	0.250	0.219	0.193
1.30	0.800	0.644	0.530	0.442	0.373	0.318	0.274	0.237	0.207	0.181
1.32	0.775	0.625	0.510	0.424	0.357	0.304	0.260	0.225	0.196	0.171
1.34	0.752	0.605	0.492	0.408	0.342	0.290	0.248	0.214	0.185	0.162
1.36	0.731	0.588	0.475	0.393	0.329	0.278	0.237	0.204	0.176	0.153
1.38	0.711	0.567	0.459	0.378	0.316	0.266	0.226	0.194	0.167	0.145
1.40	0.692	0.548	0.444	0.365	0.304	0.256	0.217	0.185	0.159	0.138
1.42	0.674	0.533	0.431	0.353	0.293	0.246	0.208	0.177	0.152	0.131
1.44	0.658	0.517	0.417	0.341	0.282	0.236	0.199	0.169	0.145	0.125
1.46	0.642	0.505	0.405	0.330	0.273	0.227	0.191	0.162	0.139	0.119
1.48	0.627	0.493	0.394	0.320	0.263	0.219	0.184	0.156	0.133	0.113
1.50	0.613	0.480	0.383	0.310	0.255	0.211	0.177	0.149	0.127	0.108
1.55	0.580	0.451	0.358	0.288	0.235	0.194	0.161	0.135	0.114	0.097
1.60	0.551	0.425	0.335	0.269	0.218	0.179	0.148	0.123	0.103	0.087
1.65	0.525	0.402	0.316	0.251	0.203	0.165	0.136	0.113	0.094	0.079
1.70	0.501	0.381	0.298	0.236	0.189	0.153	0.125	0.103	0.086	0.072
1.75	0.480	0.362	0.282	0.222	0.177	0.143	0.116	0.095	0.079	0.065
1.80	0.460	0.349	0.267	0.209	0.166	0.133	0.108	0.088	0.072	0.060
1.85	0.442	0.332	0.254	0.198	0.156	0.125	0.100	0.082	0.067	0.055
1.90	0.425	0.315	0.242	0.188	0.147	0.117	0.094	0.076	0.062	0.050
1.95	0.409	0.304	0.231	0.178	0.139	0.110	0.088	0.070	0.057	0.046
2.00	0.395	0.292	0.221	0.169	0.132	0.104	0.082	0.066	0.053	0.043
2.10	0.369	0.273	0.202	0.154	0.119	0.092	0.073	0.058	0.046	0.037
2.20	0.346	0.253	0.186	0.141	0.107	0.083	0.065	0.051	0.040	0.032
2.3	0.326	0.235	0.173	0.129	0.098	0.075	0.058	0.045	0.035	0.028
2.4	0.308	0.220	0.160	0.119	0.089	0.068	0.052	0.040	0.031	0.024
2.5	0.292	0.207	0.150	0.110	0.082	0.062	0.047	0.036	0.028	0.022
2.6	0.277	0.197	0.140	0.102	0.076	0.057	0.043	0.033	0.025	0.019
2.7	0.264	0.188	0.131	0.095	0.070	0.052	0.039	0.029	0.022	0.017
2.8	0.252	0.176	0.124	0.089	0.065	0.048	0.036	0.027	0.020	0.015
2.9	0.241	0.166	0.117	0.083	0.060	0.044	0.033	0.024	0.018	0.014
3.0	0.230	0.159	0.110	0.078	0.056	0.041	0.030	0.022	0.017	0.012
3.5	0.190	0.126	0.085	0.059	0.041	0.029	0.021	0.015	0.011	0.008
4.0	0.161	0.104	0.069	0.046	0.031	0.022	0.015	0.010	0.007	0.005
4.5	0.139	0.087	0.057	0.037	0.025	0.017	0.011	0.008	0.005	0.004
5.0	0.122	0.076	0.048	0.031	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.003
6.0	0.098	0.060	0.036	0.022	0.014	0.009	0.006	0.004	0.002	0.002
7.0	0.081	0.048	0.028	0.017	0.010	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001
8.0	0.069	0.040	0.022	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
9.0	0.060	0.034	0.019	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000
10.0	0.053	0.028	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
20.0	0.023	0.018	0.011	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.321	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.341	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.361	0.361	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.381	0.381	0.381	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.402	0.401	0.401	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.422	0.421	0.421	0.421	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.443	0.442	0.441	0.441	0.441	0.441	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.463	0.462	0.462	0.461	0.461	0.461	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.484	0.483	0.482	0.481	0.481	0.481	0.480	0.480	[illegible]	0.480
0.50	0.505	0.504	0.503	0.502	0.501	0.501	0.501	0.500	0.500	0.500
0.52	0.527	0.525	0.523	0.522	0.522	0.521	0.521	0.521	0.520	0.520
0.54	0.548	0.546	0.544	0.543	0.542	0.542	0.541	0.541	0.541	0.541
0.56	0.570	0.567	0.565	0.564	0.563	0.562	0.562	0.561	0.561	0.561
0.58	0.592	0.589	0.587	0.585	0.583	0.583	0.582	0.582	0.581	0.581
0.60	0.614	0.611	0.608	0.606	0.605	0.604	0.603	0.602	0.602	0.601
0.61	0.626	0.622	0.619	0.617	0.615	0.614	0.613	0.612	0.612	0.611
0.62	0.637	0.633	0.630	0.628	0.626	0.625	0.624	0.623	0.622	0.622
0.63	0.649	0.644	0.641	0.638	0.636	0.635	0.634	0.633	0.632	0.632
0.64	0.661	0.656	0.652	0.649	0.647	0.646	0.645	0.644	0.643	0.642
0.65	0.673	0.667	0.663	0.660	0.658	0.656	0.655	0.654	0.653	0.653
0.66	0.685	0.679	0.675	0.672	0.669	0.667	0.666	0.665	0.664	0.663
0.67	0.697	0.691	0.686	0.683	0.680	0.678	0.676	0.675	0.674	0.673
0.68	0.709	0.703	0.698	0.694	0.691	0.689	0.687	0.686	0.685	0.684
0.69	0.722	0.715	0.710	0.706	0.703	0.700	0.698	0.696	0.695	0.694

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
0.70	0.735	0.727	0.722	0.717	0.714	0.712	0.710	0.708	0.706	0.705
0.71	0.748	0.740	0.734	0.729	0.726	0.723	0.721	0.719	0.717	0.716
0.72	0.761	0.752	0.746	0.741	0.737	0.734	0.732	0.730	0.728	0.727
0.73	0.774	0.765	0.759	0.753	0.749	0.746	0.743	0.741	0.739	0.737
0.74	0.788	0.779	0.771	0.766	0.761	0.757	0.754	0.752	0.750	0.748
0.75	0.802	0.792	0.784	0.778	0.773	0.769	0.766	0.763	0.761	0.759
0.76	0.817	0.806	0.798	0.791	0.786	0.782	0.778	0.775	0.773	0.771
0.77	0.831	0.820	0.811	0.804	0.798	0.794	0.790	0.787	0.784	0.782
0.78	0.847	0.834	0.825	0.817	0.811	0.806	0.802	0.799	0.796	0.794
0.79	0.862	0.849	0.839	0.831	0.824	0.819	0.815	0.811	0.808	0.805
0.80	0.878	0.865	0.854	0.845	0.838	0.832	0.828	0.823	0.820	0.818
0.81	0.895	0.881	0.869	0.860	0.852	0.846	0.841	0.836	0.833	0.830
0.82	0.913	0.897	0.885	0.875	0.866	0.860	0.854	0.850	0.846	0.842
0.83	0.931	0.914	0.901	0.890	0.881	0.874	0.868	0.863	0.859	0.855
0.84	0.949	0.932	0.918	0.906	0.897	0.889	0.882	0.877	0.872	0.868
0.85	0.969	0.950	0.935	0.923	0.912	0.905	0.898	0.891	0.887	0.882
0.86	0.990	0.970	0.954	0.940	0.930	0.921	0.913	0.906	0.901	0.896
0.87	1.012	0.990	0.973	0.959	0.947	0.937	0.929	0.922	0.916	0.911
0.88	1.035	1.012	0.994	0.978	0.966	0.955	0.946	0.938	0.932	0.927
0.89	1.060	1.035	1.015	0.999	0.986	0.974	0.964	0.956	0.949	0.943
0.90	1.087	1.060	1.039	1.021	1.007	0.994	0.984	0.974	0.967	0.960
0.91	1.116	1.088	1.064	1.045	1.029	1.016	1.003	0.995	0.986	0.979
0.92	1.148	1.117	1.092	1.072	1.054	1.039	1.027	1.016	1.006	0.999
0.93	1.184	1.151	1.123	1.101	1.081	1.065	1.050	1.040	1.029	1.021
0.94	1.225	1.188	1.158	1.134	1.113	1.095	1.080	1.066	1.054	1.044
0.950	1.272	1.232	1.199	1.172	1.148	1.128	1.111	1.097	1.084	1.073
0.960	1.329	1.285	1.248	1.217	1.188	1.167	1.149	1.133	1.119	1.106
0.970	1.402	1.351	1.310	1.275	1.246	1.319	1.197	1.179	1.162	1.148
0.975	1.447	1.393	1.348	1.311	1.280	1.250	1.227	1.207	1.190	1.173
0.980	1.502	1.443	1.395	1.354	1.339	1.288	1.262	1.241	1.221	1.204
0.985	1.573	1.508	1.454	1.409	1.372	1.337	1.309	1.284	1.263	1.243
0.990	1.671	1.598	1.537	1.487	1.444	1.404	1.373	1.344	1.319	1.297
0.995	1.838	1.751	1.678	1.617	1.565	1.519	1.479	1.451	1.416	1.388
0.999	2.223	2.102	2.002	1.917	1.845	1.780	1.725	1.678	1.635	1.596
1.000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	1.417	1.264	1.138	1.033	0.951	0.870	0.803	0.746	0.697	0.651
1.005	1.036	0.915	0.817	0.737	0.669	0.612	0.553	0.526	0.481	0.447
1.010	0.873	0.766	0.681	0.610	0.551	0.502	0.459	0.422	0.389	0.360
1.015	0.778	0.680	0.602	0.537	0.483	0.440	0.399	0.366	0.336	0.310
1.02	0.711	0.620	0.546	0.486	0.436	0.394	0.358	0.327	0.300	0.276

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
1.03	0.618	0.535	0.469	0.415	0.370	0.333	0.300	0.272	0.249	0.228
1.04	0.554	0.477	0.415	0.365	0.324	0.290	0.262	0.236	0.214	0.195
1.05	0.504	0.432	0.374	0.328	0.289	0.259	0.231	0.208	0.189	0.174
1.06	0.464	0.396	0.342	0.298	0.262	0.233	0.209	0.187	0.170	0.154
1.07	0.431	0.366	0.315	0.273	0.239	0.212	0.191	0.168	0.151	0.136
1.08	0.403	0.341	0.292	0.252	0.220	0.194	0.172	0.153	0.137	0.123
1.09	0.379	0.319	0.272	0.234	0.204	0.179	0.158	0.140	0.125	0.112
1.10	0.357	0.299	0.254	0.218	0.189	0.165	0.146	0.129	0.114	0.102
1.11	0.338	0.282	0.239	0.204	0.176	0.154	0.135	0.119	0.105	0.094
1.12	0.321	0.267	0.225	0.192	0.165	0.143	0.125	0.110	0.097	0.086
1.13	0.305	0.253	0.212	0.181	0.155	0.135	0.117	0.102	0.090	0.080
1.14	0.291	0.240	0.201	0.170	0.146	0.126	0.109	0.095	0.084	0.074
1.15	0.278	0.229	0.191	0.161	0.137	0.118	0.102	0.089	0.078	0.068
1.16	0.266	0.218	0.181	0.153	0.130	0.111	0.096	0.084	0.072	0.064
1.17	0.255	0.208	0.173	0.145	0.123	0.105	0.090	0.078	0.068	0.060
1.18	0.244	0.199	0.165	0.138	0.116	0.099	0.085	0.073	0.063	0.055
1.19	0.235	0.191	0.157	0.131	0.110	0.094	0.080	0.068	0.059	0.051
1.20	0.226	0.183	0.150	0.215	0.105	0.088	0.076	0.064	0.056	0.048
1.22	0.209	0.168	0.138	0.114	0.095	0.080	0.068	0.057	0.049	0.042
1.24	0.195	0.156	0.127	0.104	0.086	0.072	0.060	0.051	0.044	0.038
1.26	0.182	0.145	0.117	0.095	0.079	0.065	0.055	0.046	0.039	0.033
1.28	0.170	0.135	0.108	0.088	0.072	0.060	0.050	0.041	0.035	0.030
1.30	0.160	0.126	0.100	0.081	0.066	0.054	0.045	0.037	0.031	0.026
1.32	0.150	0.118	0.093	0.075	0.061	0.050	0.041	0.034	0.028	0.024
1.34	0.142	0.110	0.087	0.069	0.056	0.045	0.037	0.030	0.025	0.021
1.36	0.134	0.103	0.081	0.064	0.052	0.042	0.034	0.028	0.023	0.019
1.38	0.127	0.097	0.076	0.060	0.048	0.038	0.032	0.026	0.021	0.017
1.40	0.120	0.092	0.071	0.056	0.044	0.036	0.028	0.023	0.019	0.016
1.42	0.114	0.087	0.067	0.052	0.041	0.033	0.026	0.021	0.017	0.014
1.44	0.108	0.082	0.063	0.049	0.038	0.030	0.024	0.019	0.016	0.013
1.46	0.103	0.077	0.059	0.046	0.036	0.028	0.022	0.018	0.014	0.012
1.48	0.098	0.073	0.056	0.043	0.033	0.026	0.021	0.017	0.013	0.010
1.50	0.093	0.069	0.053	0.040	0.031	0.024	0.020	0.015	0.012	0.009
1.55	0.083	0.061	0.046	0.035	0.026	0.020	0.016	0.012	0.010	0.008
1.60	0.074	0.054	0.040	0.030	0.023	0.017	0.013	0.010	0.008	0.006
1.65	0.067	0.048	0.035	0.026	0.019	0.014	0.011	0.008	0.006	0.005
1.70	0.060	0.043	0.031	0.023	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004
1.75	0.054	0.038	0.027	0.020	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004	0.003
1.80	0.049	0.034	0.024	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003
1.85	0.045	0.031	0.022	0.015	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002

u \ N	4.2	4.6	5.0	5.4	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4	7.8
1.90	0.041	0.028	0.020	0.014	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002
1.95	0.038	0.026	0.018	0.012	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002
2.00	0.035	0.023	0.016	0.011	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
2.10	0.030	0.019	0.013	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
2.20	0.025	0.016	0.011	0.007	0.005	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
2.3	0.022	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
2.4	0.019	0.012	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
2.5	0.017	0.010	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001
2.6	0.015	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
2.7	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.8	0.012	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.9	0.010	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.0	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.200	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.40	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.42	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.44	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440
0.46	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
0.48	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480
0.50	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.52	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520
0.54	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
0.56	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560
0.58	0.581	0.581	0.580	0.580	0.580
0.60	0.601	0.601	0.601	0.600	0.600
0.61	0.611	0.611	0.611	0.611	0.610
0.62	0.621	0.621	0.621	0.621	0.621
0.63	0.632	0.631	0.631	0.631	0.631
0.64	0.642	0.641	0.641	0.641	0.641
0.65	0.652	0.652	0.651	0.651	0.651
0.66	0.662	0.662	0.662	0.661	0.661
0.67	0.673	0.672	0.672	0.672	0.671
0.68	0.683	0.683	0.682	0.682	0.681
0.69	0.694	0.693	0.692	0.692	0.692

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
0.70	0.704	0.704	0.703	0.702	0.702
0.71	0.715	0.714	0.713	0.713	0.712
0.72	0.726	0.725	0.724	0.723	0.723
0.73	0.736	0.735	0.734	0.734	0.733
0.74	0.747	0.746	0.745	0.744	0.744
0.75	0.758	0.757	0.756	0.755	0.754
0.76	0.769	0.768	0.767	0.766	0.765
0.77	0.780	0.779	0.778	0.777	0.776
0.78	0.792	0.790	0.789	0.788	0.787
0.79	0.804	0.802	0.800	0.799	0.798
0.80	0.815	0.813	0.811	0.810	0.809
0.81	0.827	0.825	0.823	0.822	0.820
0.82	0.839	0.837	0.835	0.833	0.831
0.83	0.852	0.849	0.847	0.845	0.844
0.84	0.856	0.862	0.860	0.858	0.856
0.85	0.878	0.875	0.873	0.870	0.868
0.86	0.892	0.889	0.886	0.883	0.881
0.87	0.907	0.903	0.900	0.897	0.894
0.88	0.921	0.918	0.914	0.911	0.908
0.89	0.937	0.933	0.929	0.925	0.922
0.90	0.954	0.949	0.944	0.940	0.937
0.91	0.972	0.967	0.961	0.957	0.953
0.92	0.991	0.986	0.980	0.975	0.970
0.93	1.012	1.006	0.999	0.994	0.989
0.94	1.036	1.029	1.022	1.016	1.010
0.950	1.062	1.055	1.047	1.040	1.033
0.960	1.097	1.085	1.074	1.063	1.053
0.970	1.136	1.124	1.112	1.100	1.087
0.975	1.157	1.147	1.134	1.122	1.108
0.980	1.187	1.175	1.160	1.150	1.132
0.985	1.224	1.210	1.196	1.183	1.165
0.990	1.275	1.260	1.243	1.228	1.208
0.995	1.363	1.342	1.320	1.302	1.280
0.999	1.560	1.530	1.500	1.476	1.447
1.000	∞	∞	∞	∞	∞
1.001	0.614	0.577	0.546	0.519	0.494
1.005	0.420	0.391	0.368	0.350	0.331
1.010	0.337	0.313	0.294	0.278	0.262
1.015	0.289	0.269	0.255	0.237	0.223
1.020	0.257	0.237	0.221	0.209	0.196

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
1.03	0.212	0.195	0.181	0.170	0.159
1.04	0.173	0.165	0.152	0.143	0.134
1.05	0.158	0.143	0.132	0.124	0.115
1.06	0.140	0.127	0.116	0.106	0.098
1.07	0.123	0.112	0.102	0.094	0.086
1.08	0.111	0.101	0.092	0.084	0.077
1.09	0.101	0.091	0.082	0.075	0.069
1.10	0.092	0.083	0.074	0.067	0.062
1.11	0.084	0.075	0.067	0.060	0.055
1.12	0.077	0.069	0.062	0.055	0.050
1.13	0.071	0.063	0.056	0.050	0.045
1.14	0.065	0.058	0.052	0.046	0.041
1.15	0.061	0.054	0.048	0.043	0.038
1.16	0.056	0.050	0.045	0.040	0.035
1.17	0.052	0.046	0.041	0.036	0.032
1.18	0.048	0.042	0.037	0.033	0.029
1.19	0.045	0.039	0.034	0.030	0.027
1.20	0.043	0.037	0.032	0.028	0.025
1.22	0.037	0.032	0.028	0.024	0.021
1.24	0.032	0.028	0.024	0.021	0.018
1.26	0.028	0.024	0.021	0.018	0.016
1.28	0.025	0.021	0.018	0.016	0.014
1.30	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012
1.32	0.020	0.017	0.014	0.012	0.010
1.34	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009
1.36	0.016	0.013	0.011	0.009	0.008
1.38	0.014	0.012	0.010	0.008	0.007
1.40	0.013	0.011	0.009	0.007	0.006
1.42	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005
1.44	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005
1.46	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004
1.48	0.009	0.007	0.005	0.004	0.004
1.50	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
1.55	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003
1.60	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002
1.65	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001
1.70	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
1.75	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
1.80	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
1.85	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001

u \ N	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8
1.90	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
1.95	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
2.00	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.10	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2.20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

APÉNDICE III

Tabla para determinar $F(u,N)$ para pendientes negativas*

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.099	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.199	0.119	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.139	0.139	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.158	0.159	0.159	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.178	0.179	0.179	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.197	0.198	0.199	0.199	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.216	0.217	0.218	0.219	0.219	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.234	0.236	0.237	0.238	0.239	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.253	0.255	0.256	0.257	0.258	0.259	0.259	0.260	0.260	0.260
0.28	0.272	0.274	0.275	0.276	0.277	0.278	0.278	0.279	0.280	0.280
0.30	0.291	0.293	0.294	0.295	0.296	0.297	0.298	0.298	0.299	0.299
0.32	0.308	0.311	0.313	0.314	0.316	0.317	0.318	0.318	0.319	0.319
0.34	0.326	0.329	0.331	0.333	0.335	0.337	0.338	0.338	0.339	0.339
0.36	0.344	0.347	0.350	0.352	0.354	0.356	0.357	0.357	0.358	0.358
0.38	0.362	0.355	0.368	0.371	0.373	0.374	0.375	0.376	0.377	0.377

* Esta tabla es una reproducción de V. T. Chow, Closure to "Integrating the Equation of Gradually Varied Flow," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 83, no. HY 1, febrero 1957, pp. 9-22.

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.40	0.380	0.384	0.387	0.390	0.392	0.393	0.394	0.395	0.396	0.396
0.42	0.397	0.401	0.405	0.407	0.409	0.411	0.412	0.413	0.414	0.414
0.44	0.414	0.419	0.423	0.426	0.429	0.430	0.432	0.433	0.434	0.435
0.46	0.431	0.437	0.440	0.444	0.447	0.449	0.451	0.452	0.453	0.454
0.48	0.447	0.453	0.458	0.461	0.464	0.467	0.469	0.471	0.472	0.473
0.50	0.463	0.470	0.475	0.479	0.482	0.485	0.487	0.489	0.491	0.492
0.52	0.479	0.485	0.491	0.494	0.499	0.502	0.505	0.507	0.509	0.511
0.54	0.494	0.501	0.507	0.512	0.516	0.520	0.522	0.525	0.527	0.529
0.56	0.509	0.517	0.523	0.528	0.533	0.537	0.540	0.543	0.545	0.547
0.58	0.524	0.533	0.539	0.545	0.550	0.554	0.558	0.561	0.563	0.567
0.60	0.540	0.548	0.555	0.561	0.566	0.571	0.575	0.578	0.581	0.583
0.61	0.547	0.556	0.563	0.569	0.575	0.579	0.583	0.587	0.589	0.592
0.62	0.554	0.563	0.571	0.578	0.583	0.578	0.591	0.595	0.598	0.600
0.63	0.562	0.571	0.579	0.585	0.590	0.595	0.599	0.603	0.607	0.609
0.64	0.569	0.579	0.586	0.592	0.598	0.602	0.607	0.611	0.615	0.618
0.65	0.576	0.585	0.592	0.599	0.606	0.610	0.615	0.619	0.623	0.626
0.66	0.583	0.593	0.600	0.607	0.613	0.618	0.622	0.626	0.630	0.634
0.67	0.590	0.599	0.607	0.614	0.621	0.626	0.631	0.635	0.639	0.643
0.68	0.597	0.607	0.615	0.622	0.628	0.634	0.639	0.643	0.647	0.651
0.69	0.603	0.613	0.621	0.629	0.635	0.641	0.646	0.651	0.655	0.659
0.70	0.610	0.620	0.629	0.637	0.644	0.649	0.654	0.659	0.663	0.667
0.71	0.617	0.627	0.636	0.644	0.651	0.657	0.661	0.666	0.671	0.674
0.72	0.624	0.634	0.643	0.651	0.658	0.664	0.669	0.674	0.679	0.682
0.73	0.630	0.641	0.650	0.659	0.665	0.672	0.677	0.682	0.687	0.691
0.74	0.637	0.648	0.657	0.665	0.672	0.679	0.684	0.689	0.694	0.698
0.75	0.643	0.655	0.664	0.671	0.679	0.686	0.691	0.696	0.701	0.705
0.76	0.649	0.661	0.670	0.679	0.687	0.693	0.699	0.704	0.709	0.713
0.77	0.656	0.667	0.677	0.685	0.693	0.700	0.705	0.711	0.715	0.719
0.78	0.662	0.673	0.683	0.692	0.700	0.707	0.713	0.718	0.723	0.727
0.79	0.668	0.680	0.689	0.698	0.705	0.713	0.719	0.724	0.729	0.733
0.80	0.674	0.685	0.695	0.703	0.712	0.720	0.726	0.732	0.737	0.741
0.81	0.680	0.691	0.701	0.710	0.719	0.727	0.733	0.739	0.744	0.749
0.82	0.686	0.698	0.707	0.717	0.725	0.733	0.740	0.745	0.751	0.755
0.83	0.692	0.703	0.713	0.722	0.731	0.740	0.746	0.752	0.757	0.762
0.84	0.698	0.709	0.719	0.729	0.737	0.746	0.752	0.758	0.764	0.769
0.85	0.704	0.715	0.725	0.735	0.744	0.752	0.759	0.765	0.770	0.775
0.86	0.710	0.721	0.731	0.741	0.750	0.758	0.765	0.771	0.777	0.782
0.87	0.715	0.727	0.738	0.747	0.756	0.764	0.771	0.777	0.783	0.788
0.88	0.721	0.733	0.743	0.753	0.762	0.770	0.777	0.783	0.789	0.794
0.89	0.727	0.739	0.749	0.758	0.767	0.776	0.783	0.789	0.795	0.800

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
0.90	0.732	0.744	0.754	0.764	0.773	0.781	0.789	0.795	0.801	0.807
0.91	0.738	0.750	0.760	0.770	0.779	0.787	0.795	0.801	0.807	0.812
0.92	0.743	0.754	0.766	0.776	0.785	0.793	0.800	0.807	0.813	0.818
0.93	0.749	0.761	0.772	0.782	0.791	0.799	0.807	0.812	0.818	0.823
0.94	0.754	0.767	0.777	0.787	0.795	0.804	0.813	0.813	0.824	0.829
0.950	0.759	0.772	0.783	0.793	0.801	0.809	0.819	0.823	0.829	0.835
0.960	0.764	0.777	0.788	0.798	0.807	0.815	0.824	0.829	0.835	0.841
0.970	0.770	0.782	0.793	0.803	0.812	0.820	0.826	0.834	0.840	0.846
0.975	0.772	0.785	0.796	0.805	0.814	0.822	0.828	0.836	0.843	0.848
0.980	0.775	0.787	0.798	0.808	0.818	0.825	0.830	0.839	0.845	0.851
0.985	0.777	0.790	0.801	0.811	0.820	0.827	0.833	0.841	0.847	0.853
0.990	0.780	0.793	0.804	0.814	0.822	0.830	0.837	0.844	0.850	0.856
0.995	0.782	0.795	0.806	0.816	0.824	0.832	0.840	0.847	0.753	0.859
1.000	0.785	0.797	0.808	0.818	0.826	0.834	0.842	0.849	0.856	0.862
1.005	0.788	0.799	0.810	0.820	0.829	0.837	0.845	0.852	0.858	0.864
1.010	0.790	0.801	0.812	0.822	0.831	0.840	0.847	0.855	0.861	0.867
1.015	0.793	0.804	0.815	0.824	0.833	0.843	0.850	0.858	0.864	0.870
1.020	0.795	0.807	0.818	0.828	0.837	0.845	0.853	0.860	0.866	0.872
1.03	0.800	0.811	0.822	0.832	0.841	0.850	0.857	0.864	0.871	0.877
1.04	0.805	0.816	0.829	0.837	0.846	0.855	0.862	0.870	0.877	0.883
1.05	0.810	0.821	0.831	0.841	0.851	0.859	0.867	0.874	0.881	0.887
1.06	0.815	0.826	0.837	0.846	0.855	0.864	0.871	0.879	0.885	0.891
1.07	0.819	0.831	0.841	0.851	0.860	0.869	0.876	0.883	0.889	0.896
1.08	0.824	0.836	0.846	0.856	0.865	0.873	0.880	0.887	0.893	0.900
1.09	0.828	0.840	0.851	0.860	0.870	0.877	0.885	0.892	0.898	0.904
1.10	0.833	0.845	0.855	0.865	0.874	0.881	0.890	0.897	0.903	0.908
1.11	0.837	0.849	0.860	0.870	0.878	0.886	0.894	0.900	0.907	0.912
1.12	0.842	0.854	0.864	0.873	0.882	0.891	0.897	0.904	0.910	0.916
1.13	0.846	0.858	0.868	0.878	0.886	0.895	0.902	0.908	0.914	0.919
1.14	0.851	0.861	0.872	0.881	0.890	0.899	0.905	0.912	0.918	0.923
1.15	0.855	0.866	0.876	0.886	0.895	0.903	0.910	0.916	0.922	0.928
1.16	0.859	0.870	0.880	0.890	0.899	0.907	0.914	0.920	0.926	0.931
1.17	0.864	0.874	0.884	0.893	0.902	0.911	0.917	0.923	0.930	0.934
1.18	0.868	0.878	0.888	0.897	0.906	0.915	0.921	0.927	0.933	0.939
1.19	0.872	0.882	0.892	0.901	0.910	0.918	0.925	0.931	0.937	0.942
1.20	0.876	0.886	0.896	0.904	0.913	0.921	0.928	0.934	0.940	0.945
1.22	0.880	0.891	0.900	0.909	0.917	0.929	0.932	0.938	0.944	0.949
1.24	0.888	0.898	0.908	0.917	0.925	0.935	0.940	0.945	0.950	0.955
1.26	0.900	0.910	0.919	0.927	0.935	0.942	0.948	0.954	0.960	0.964
1.28	0.908	0.917	0.926	0.934	0.945	0.948	0.954	0.960	0.965	0.970

u \ N	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
1.30	0.915	0.925	0.933	0.941	0.948	0.955	0.961	0.966	0.981	0.975
1.32	0.922	0.931	0.940	0.948	0.955	0.961	0.967	0.972	0.976	0.980
1.34	0.930	0.939	0.948	0.955	0.962	0.967	0.973	0.978	0.982	0.986
1.36	0.937	0.946	0.954	0.961	0.968	0.973	0.979	0.983	0.987	0.991
1.38	0.944	0.952	0.960	0.967	0.974	0.979	0.985	0.989	0.993	0.996
1.40	0.951	0.959	0.966	0.973	0.979	0.984	0.989	0.993	0.997	1.000
1.42	0.957	0.965	0.972	0.979	0.984	0.989	0.995	0.998	1.001	1.004
1.44	0.964	0.972	0.979	0.984	0.990	0.995	1.000	1.003	1.006	1.009
1.46	0.970	0.977	0.983	0.989	0.995	1.000	1.004	1.007	1.010	1.012
1.48	0.977	0.983	0.989	0.994	0.999	1.005	1.008	1.011	1.014	1.016
1.50	0.983	0.990	0.996	1.001	1.005	1.009	1.012	1.015	1.017	1.019
1.55	0.997	1.002	1.007	1.012	1.016	1.020	1.022	1.024	1.026	1.028
1.60	1.012	1.017	1.020	1.024	1.027	1.030	1.032	1.034	1.035	1.035
1.65	1.026	1.029	1.032	1.035	1.037	1.039	1.041	1.041	1.042	1.042
1.70	1.039	1.042	1.044	1.045	1.047	1.048	1.049	1.049	1.049	1.048
1.75	1.052	1.053	1.054	1.055	1.056	1.057	1.056	1.056	1.055	1.053
1.80	1.064	1.064	1.064	1.064	1.065	1.065	1.064	1.062	1.060	1.058
1.85	1.075	1.074	1.074	1.073	1.072	1.071	1.069	1.067	1.066	1.063
1.90	1.086	1.085	1.084	1.082	1.081	1.079	1.077	1.074	1.071	1.066
1.95	1.097	1.095	1.092	1.090	1.087	1.085	1.081	1.079	1.075	1.071
2.00	1.107	1.103	1.100	1.096	1.093	1.090	1.085	1.082	1.078	1.075
2.10	1.126	1.120	1.115	1.110	1.104	1.100	1.094	1.089	1.085	1.080
2.20	1.144	1.136	1.129	1.122	1.115	1.109	1.102	1.096	1.090	1.085
2.3	1.161	1.150	1.141	1.133	1.124	1.117	1.110	1.103	1.097	1.090
2.4	1.176	1.163	1.152	1.142	1.133	1.124	1.116	1.109	1.101	1.094
2.5	1.190	1.175	1.162	1.150	1.140	1.131	1.121	1.113	1.105	1.098
2.6	1.204	1.187	1.172	1.159	1.147	1.137	1.126	1.117	1.106	1.000
2.7	1.216	1.196	1.180	1.166	1.153	1.142	1.130	1.120	1.110	1.102
2.8	1.228	1.208	1.189	1.173	1.158	1.146	1.132	1.122	1.112	1.103
2.9	1.239	1.216	1.196	1.178	1.162	1.150	1.137	1.125	1.115	1.106
3.0	1.249	1.224	1.203	1.184	1.168	1.154	1.140	1.128	1.117	1.107
3.5	1.292	1.260	1.232	1.206	1.185	1.167	1.151	1.138	1.125	1.113
4.0	1.326	1.286	1.251	1.223	1.198	1.176	1.158	1.142	1.129	1.117
4.5	1.352	1.308	1.270	1.235	1.205	1.183	1.162	1.146	1.131	1.119
5.0	1.374	1.325	1.283	1.245	1.212	1.188	1.166	1.149	1.134	1.121
6.0	1.406	1.342	1.292	1.252	1.221	1.195	1.171	1.152	1.136	1.122
7.0	1.430	1.360	1.303	1.260	1.225	1.199	1.174	1.153	1.136	1.122
8.0	1.447	1.373	1.313	1.266	1.229	1.201	1.175	1.154	1.137	1.122
9.0	1.461	1.384	1.319	1.269	1.231	1.203	1.176	1.156	1.137	1.122
10.0	1.471	1.394	1.324	1.272	1.233	1.203	1.176	1.156	1.137	1.122

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
0.06	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060
0.08	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.12	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
0.14	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
0.16	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160
0.18	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180
0.20	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.22	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.24	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.26	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260
0.28	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280
0.30	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
0.32	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.34	0.339	0.340	0.340	0.340	0.340
0.36	0.359	0.360	0.360	0.360	0.360
0.38	0.378	0.379	0.380	0.380	0.380
0.40	0.397	0.398	0.398	0.400	0.400
0.42	0.417	0.418	0.418	0.419	0.420
0.44	0.436	0.437	0.437	0.439	0.440
0.46	0.455	0.456	0.457	0.458	0.459
0.48	0.474	0.475	0.476	0.478	0.479
0.50	0.493	0.494	0.495	0.497	0.498
0.52	0.512	0.513	0.515	0.517	0.518
0.54	0.531	0.532	0.533	0.536	0.537
0.56	0.549	0.550	0.552	0.555	0.558
0.58	0.567	0.569	0.570	0.574	0.576
0.60	0.585	0.587	0.589	0.593	0.595
0.61	0.594	0.596	0.598	0.602	0.604
0.62	0.603	0.605	0.607	0.611	0.613
0.63	0.612	0.615	0.616	0.620	0.622
0.64	0.620	0.623	0.625	0.629	0.631
0.65	0.629	0.632	0.634	0.638	0.640
0.66	0.637	0.640	0.643	0.647	0.650
0.67	0.646	0.649	0.652	0.656	0.659
0.68	0.654	0.657	0.660	0.665	0.668
0.69	0.662	0.665	0.668	0.674	0.677

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
0.70	0.670	0.673	0.677	0.682	0.686
0.71	0.678	0.681	0.685	0.690	0.694
0.72	0.686	0.689	0.694	0.699	0.703
0.73	0.694	0.698	0.702	0.707	0.712
0.74	0.702	0.705	0.710	0.716	0.720
0.75	0.709	0.712	0.717	0.724	0.728
0.76	0.717	0.720	0.725	0.731	0.736
0.77	0.724	0.727	0.733	0.739	0.744
0.78	0.731	0.735	0.740	0.747	0.752
0.79	0.738	0.742	0.748	0.754	0.760
0.80	0.746	0.750	0.755	0.762	0.768
0.81	0.753	0.757	0.762	0.770	0.776
0.82	0.760	0.764	0.769	0.777	0.783
0.83	0.766	0.771	0.776	0.784	0.790
0.84	0.773	0.778	0.783	0.791	0.798
0.85	0.780	0.784	0.790	0.798	0.805
0.86	0.786	0.791	0.797	0.804	0.812
0.87	0.793	0.797	0.803	0.811	0.819
0.88	0.799	0.803	0.810	0.818	0.826
0.89	0.805	0.810	0.816	0.825	0.832
0.90	0.811	0.816	0.822	0.831	0.839
0.91	0.817	0.821	0.828	0.837	0.845
0.92	0.823	0.828	0.834	0.844	0.851
0.93	0.829	0.833	0.840	0.850	0.857
0.94	0.835	0.840	0.846	0.856	0.864
0.950	0.840	0.845	0.852	0.861	0.869
0.960	0.846	0.861	0.857	0.867	0.875
0.970	0.851	0.866	0.863	0.972	0.881
0.975	0.854	0.859	0.866	0.875	0.883
0.980	0.857	0.861	0.868	0.878	0.886
0.985	0.859	0.863	0.870	0.880	0.889
0.990	0.861	0.867	0.873	0.883	0.891
0.995	0.864	0.869	0.876	0.885	0.894
1.000	0.867	0.873	0.879	0.887	0.897
1.005	0.870	0.874	0.881	0.890	0.899
1.010	0.873	0.878	0.884	0.893	0.902
1.015	0.875	0.880	0.886	0.896	0.904
1.020	0.877	0.883	0.889	0.898	0.907
1.03	0.882	0.887	0.893	0.902	0.911
1.04	0.888	0.893	0.898	0.907	0.916

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
1.05	0.892	0.897	0.903	0.911	0.920
1.06	0.896	0.901	0.907	0.915	0.924
1.07	0.901	0.906	0.911	0.919	0.928
1.08	0.905	0.910	0.916	0.923	0.932
1.09	0.909	0.914	0.920	0.927	0.936
1.10	0.913	0.918	0.923	0.931	0.940
1.11	0.917	0.921	0.927	0.935	0.944
1.12	0.921	0.926	0.931	0.939	0.948
1.13	0.925	0.929	0.935	0.943	0.951
1.14	0.928	0.933	0.938	0.947	0.954
1.15	0.932	0.936	0.942	0.950	0.957
1.16	0.936	0.941	0.945	0.953	0.960
1.17	0.939	0.944	0.948	0.957	0.963
1.18	0.943	0.947	0.951	0.960	0.965
1.19	0.947	0.950	0.954	0.963	0.968
1.20	0.950	0.953	0.958	0.966	0.970
1.22	0.956	0.957	0.964	0.972	0.976
1.24	0.962	0.962	0.970	0.977	0.981
1.26	0.968	0.971	0.975	0.982	0.986
1.28	0.974	0.977	0.981	0.987	0.990
1.30	0.979	0.978	0.985	0.991	0.994
1.32	0.985	0.986	0.990	0.995	0.997
1.34	0.990	0.992	0.995	0.999	1.001
1.36	0.994	0.996	0.999	1.002	1.005
1.38	0.998	1.000	1.003	1.006	1.006
1.40	1.001	1.004	1.006	1.009	1.011
1.42	1.005	1.008	1.010	1.012	1.014
1.44	1.009	1.013	1.014	1.016	1.016
1.46	1.014	1.016	1.017	1.018	1.018
1.48	1.016	1.019	1.020	1.020	1.020
1.50	1.020	1.021	1.022	1.022	1.022
1.55	1.029	1.029	1.029	1.028	1.028
1.60	1.035	1.035	1.034	1.032	1.030
1.65	1.041	1.040	1.039	1.036	1.034
1.70	1.047	1.046	1.043	1.039	1.037
1.75	1.052	1.051	1.047	1.042	1.039
1.80	1.057	1.055	1.051	1.045	1.041
1.85	1.061	1.059	1.054	1.047	1.043
1.90	1.065	1.060	1.057	1.049	1.045
1.95	1.068	1.064	1.059	1.051	1.046

u \ N	4.0	4.2	4.5	5.0	5.5
2.00	1.071	1.068	1.062	1.053	1.047
2.10	1.076	1.071	1.065	1.056	1.049
2.20	1.080	1.073	1.068	1.058	1.050
2.3	1.084	1.079	1.071	1.060	1.051
2.4	1.087	1.081	1.073	1.061	1.052
2.5	1.090	1.083	1.075	1.062	1.053
2.6	1.092	1.985	1.076	1.063	1.054
2.7	1.094	1.087	1.077	1.063	1.054
2.8	1.096	1.088	1.078	1.064	1.054
2.9	1.098	1.089	1.079	1.065	1.055
3.0	1.099	1.090	1.080	1.065	1.055
3.5	1.103	1.093	1.082	1.066	1.055
4.0	1.106	1.097	1.084	1.067	1.056
4.5	1.108	1.098	1.085	1.067	1.056
5.0	1.110	1.099	1.085	1.068	1.056
6.0	1.111	1.100	1.085	1.068	1.056
7.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
8.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
9.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056
10.0	1.111	1.100	1.086	1.068	1.056

Índice Onomástico

Índice

OTROS TÍTULOS McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EN ESPAÑOL CON TEMAS AFINES:

Anderson:	INTRODUCCIÓN A LA TOPOGRAFÍA
Beer:	MECÁNICA DE MATERIALES
Everad:	DISEÑO DE CONCRETO ARMADO (SCHAUM)
Fox:	INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS
Giles:	MECÁNICA DE FLUIDOS E HIDRÁULICA
Hearn:	RESISTENCIA DE MATERIALES
Hughes:	DINÁMICA DE FLUIDOS (SCHAUM)
Jackson:	ESTÁTICA Y RESISTENCIA DE MATERIALES (SCHAUM)
Laible:	ANÁLISIS ESTRUCTURAL
Mayor:	MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN (SCHAUM)
Nash:	RESISTENCIA DE MATERIALES (SCHAUM)
Norris:	ANÁLISIS ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS
Roberson:	MECÁNICA DE FLUIDOS
Streeter:	MECÁNICA DE FLUIDOS 8/ED.
Tuma:	ANÁLISIS ESTRUCTURAL AVANZADO (SCHAUM)
White:	MECÁNICA DE FLUIDOS
Willems:	RESISTENCIA DE MATERIALES
Wirshing:	INTRODUCCIÓN A LA TOPOGRAFÍA (SCHAUM)



ISBN 968-451-445-X